

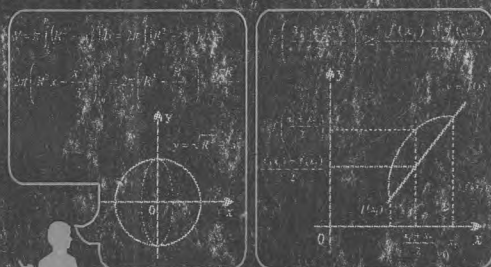
В. Б. Тукғатаров

Экономикалық мамандықтарға
арналған

ЖОҒАРЫ МАТЕМАТИКА КУРСЫ

Оқу құралы

2-бөлім



ЭКОНОМИКА

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ
МИНИСТРЛІГІ

Т. РЫСҚҰЛОВ АТЫНДАҒЫ ҚАЗАҚ ЭКОНОМИКАЛЫҚ
УНИВЕРСИТЕТІ

Ә.Б. ТҮНҒАТАРОВ

**ЭКОНОМИКАЛЫҚ МАМАНДЫҚТАРҒА
АРНАЛҒАН ЖОҒАРЫ МАТЕМАТИКА
КУРСЫ**

2-бөлім

Оқу құралы

Абылай хан атындағы
қазақ мемлекеттік
халықаралық қатынастар
және әлем тілдер
университетінің
КІТАПХАНАСЫ

АЛМАТЫ
ЭКОНОМИКА
2001

22.12.73
T80

ББК 65(5Каз)26я73
Т 87

Т 87

Тұнғатаров Ә.Б.

Экономикалық мамандықтарға арналған жоғары математика курсы /Оқу құралы. – Алматы: Экономика. 2001. – 223 бет.

ISBN 9965-532-54-5

Бұл бөлімде жоғары математика пәнінің математикалық анализ және жәй дифференциалдық теңдеулер теориясы қамтылған. Мұнда еліміздегі экономикалық жоғары оқу орындарының оқу жоспарына және қазіргі өмір талабына сәйкес математикалық ұғымдардың, тұжырымдардың экономикалық мағыналары мен қолданулары көптеп келтірілген. Сондай-ақ бұл оқулық экономикалық мамандықтарға арналған математикалық анализ бен дифференциалдық теңдеулер теориясы бойынша ана тіліндегі алғашқы оқу құралы.

Жоғары оқу орындарының экономикалық мамандықтар бойынша оқитын студенттеріне және аспиранттары мен оқытушыларына арналған.

ББК 65(5Каз)26я73

Пікір жазғандар: физика-математика ғылымдарының докторы, профессор **Ә.С. Сақабеков**; физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент **С.А. Нұрпейісов**.

ҚР Білім және ғылым министрлігі, ҚР жоғары оқу орындарының экономикалық мамандықтар бойынша ОӘБ және Т. Рысқұлов атындағы ҚазЭУ-дің Ғылыми кеңесі ұсынған.

Т $\frac{4310020000-36}{444(05)-01}$ 038-01.

ISBN 9965-532-57-5

© Тұнғатаров Ә.Б., 2001 ж.

© «Экономика» баспасы, 2001 ж.

Бұл еңбекті немесе оның бөліктерін автордың келісімісіз таратуға және авторлық құқық жөніндегі нормаларға қайшы келетін басқа да әрекеттерге тыйым салынады әрі заң бойынша жазаланады.

КІРІСПЕ

Қазіргі кезде жоғары математика пәні бойынша экономикалық мамандықтарға арналған қазақ тіліндегі оқулықтар мен оқу құралдарының жетіспей жатқандығы қатты сезіліп жатыр. Мұндай жағдай өсіресе сырттай оқитын студенттерге қиын болып тұр. Бұл кітап ең алдымен соларға арналады. Кітапқа жоғары математиканың экономикалық мамандықтар үшін қажет математикалық анализ және жәй дифференциалдық теңдеулер бөлімдері кіреді. Онда мүмкіндігінше математикалық ұғымдардың геометриялық және экономикалық мағыналары (мысалы, туындының, интегралдың т.б.) келтірілген, бірқатар экономикалық заңдылықтардың мысалы, кемімелі табыс заңдылығы, кемімелі шектік пайдалылық принципі, бұйым шығарудың тиімділік шарты математикалық кейіптемесі берілген.

Сонымен қатар жоғары математиканың экономикадағы қарапайым қолданулары (шектік талдам, функцияның икемділігі, өнеркәсіптік функциялар, экономикалық өсудің нобайлары және т.б.) қарастырылады. Оқулықты пайдалану үшін қосымша экономикалық білімнің қажеті жоқ, орта мектеп бағдарламасы көлеміндегі элементар математиканы білу жеткілікті.

Е К І Н Ш І Б Ө Л І М

МАТЕМАТИКАЛЫҚ АНАЛИЗ ЖӘНЕ ЖӘЙ- ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

АЛТЫНШЫ ТАРАУ

ФУНКЦИЯЛАР

6.1. Жиындар ұғымы

Жиын ұғымы басқа ұғымдар арқылы анықталмайтын бастапқы ұғымдардың қатарына жатады. Жиын ретінде белгілі бір заттардың (нәрселердің) тобын түсіну керек. Жиынды құрайтын заттар оның элементтері немесе нүктелері деп аталады. Институттағы студенттер тобы, белгілі бір саланың өнеркәсіптер тобы, натурал сандар тобы және т.б. жиындардың мысалы болады. Жиындар үлкен әріптермен, ал олардың элементтері кіші әріптермен белгіленеді. Егер a элементі A жиынында жатса, онда осы дерек $a \in A$ түрінде жазылады, ал егер b элементі A жиынында жатпаса, онда бұл деректі былай жазамыз: $b \notin A$.

Ешқандай элементі жоқ жиын бос жиын деп аталады, ол $\emptyset$ таңбасымен белгіленеді. Мысалы, $2x^2 + 3 = 0$ теңдеуінің түбірлер жиыны бос жиын болады.

Егер B жиынының элементтері түгелімен A жиынында жатса, онда B жиыны A жиынының жиыншағы деп аталады да, ол $B \subset A$ түрінде жазылады. Мысалы, егер B — институттағы барлық студенттердің жиыны, ал A — ондағы бірінші курс студенттерінің жиыны болса, онда A жиыны B жиынының жиыншағы болады: $A \subset B$.

Бірдей элементтерден тұратын екі жиын өзара тең жиындар деп аталады. Сонымен $A \subset B$, $B \subset A \Rightarrow A = B$.

Әрбір элементі A және B жиындарының ең болмағанда біреуінде жататын $C = A \cup B$ жиыны A және B жиындарының бірігуі деп аталады.

Кез келген элементі A жиынында да және B жиынында да жататын $D = A \cap B$ жиыны осы екі жиынның қиылысуы деп аталады.

B жиынында жатпайтын A жиынының барлық элементтерінен тұратын $E = A \setminus B$ жиыны A мен B жиындарының айырымы деп аталады. Мұнда $\cup$ —бірігу, $\cap$ — қиылысу, ал $\setminus$ —айырым белгілері.

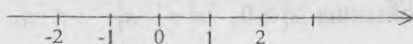
6.1-мысал. $A = \{2, 4, 5, 8\}$ және $B = \{3, 4, 5, 7\}$ жиындарының бірігуін, қиылысуын және айырымын табыңыз.

Шешуі: Анықтамалар бойынша $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 7, 8\}$, $A \cap B = \{4, 5\}$, $A \setminus B = \{2, 8\}$.

$A \subset B$ болсын. B жиынының A жиынында жатпайтын барлық элементтерінен тұратын A^c жиынды A жиынының толықтауышы деп атайды. Анықтама бойынша $A \cup A^c = B$, $A \cap A^c = \emptyset$, $B \setminus A^c = A$, $B \setminus A = A^c$.

Элементтері нақты сандар болатын жиындар сандар жиындары деп аталады. Алгебраның орта мектеп көлеміндегі курсынан $\mathbb{R}$ —нақты сандар, $\mathbb{Q}$ —рационал сандар, $\mathbb{I}$ —иррационал сандар, $\mathbb{Z}$ —бүтін сандар, $\mathbb{N}$ —натурал сандар жиындары белгілі. Осы жиындардың анықтамаларынан $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ және $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ қатынастары шығады.

Нақты сандар жиыны $\mathbb{R}$ сан түзуінің (сан осі) нүктелерімен бейнеленеді (6.1-сурет). Бастапқы нүктесі, оң бағыты және масштабтың бірлігі бар түзу сан осі деп аталады.



6.1-сурет

Нақты сандар жиыны мен сандар түзуінің арасында өзара бір мәнді қатынас бар. Яғни, әрбір нақты санға сан осінен тек бір нүкте, ал сан осінің әрбір нүктесінен тек бір нақты сан сәйкес келеді. Сондықтан біз көбінесе “ x саны” сөзінің орнына “ x нүктесі” сөзін қолданамыз.

Элементтері $a \leq x \leq b$ теңсіздігін қанағаттандыратын X нақты сандар жиыны кесінді (сегмент) деп аталады. Ол $[a, b]$ символымен белгіленеді, яғни $X = [a, b]$. Осы сияқты төмендегі жиындар анықталады:

$X = \{x : a < x < b\} = (a, b)$ – интервал;

$X = \{x : a \leq x < b\} = [a, b)$ – жартылай интервал;

$X = \{x : a < x \leq b\} = (a, b]$ – жартылай интервал;

$(-\infty, \infty) = \{x : -\infty < x < \infty\}$ – шексіз интервал, нақты сандар жиыны;

$X = [a, \infty) = \{x : a \leq x < \infty\}$ – шексіз жартылай сегмент;

$X = (a, \infty) = \{x : a < x < \infty\}$ – шексіз жартылай интервал;

$X = (-\infty, b] = \{x : -\infty < x \leq b\}$ – шексіз жартылай сегмент;

$X = (-\infty, b) = \{x : -\infty < x < b\}$ – шексіз жартылай интервал.

Осы жиындарды кейде X аралығы деп те айта береміз.

6.2. Нақты санның абсолют шамасы және

нүктенің маңайы

x нақты санының абсолют шамасын (модулін) $|x|$ таңбасы арқылы белгілеп, оны былай анықтайды:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{егер } x \geq 0, \\ -x, & \text{егер } x < 0 \end{cases}$$

Сонымен анықтама бойынша $|x| \geq 0$, $|x| = |-x|$, $x \leq |x|$, $-x \leq |x|$.

6.2-мысал. $|2x - |x||$ шамасын тап.

Шешуі. Егер $x \geq 0$ болса, онда $|x| = x$, сондықтан

$$|2x - |x|| = |2x - x| = |x| = x. \text{ Ал егер } x < 0 \text{ болса, онда } |x| = -x,$$

сондықтан $|2x - |x|| = |2x + x| = -3x$. Сонымен

$$|2x - |x|| = \begin{cases} x, & \text{егер } x \geq 0, \\ -3x, & \text{егер } x < 0. \end{cases}$$

Абсолют шаманың анықтамасынан тікелей мынандай қатынастар шығады:

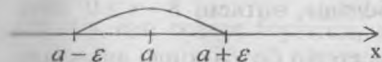
$$|x + y| \leq |x| + |y|, \quad |xy| = |x| \cdot |y|, \quad |x - y| \geq ||x| - |y||, \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

x және a сандарының айырымының абсолют шамасы $|x - a|$ сан өсінде осы екі нүктенің арасындағы қашықтықты көрсетеді (6.2-сурет).



6.2-сурет

Сондықтан $|x - a| < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) теңсіздігінің шешімдері $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$ теңсіздігін қанағаттандыратын $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ интервалының нүктелер жиыны болады (6.3-сурет).



6.3-сурет

a нүктесі ішінде жатқан кез келген интервал оның маңайы деп аталады.

$(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ интервалы a нүктесінің ε -маңайы деп аталады.

6.3. Функция ұғымы. Функциялардың негізгі түрлері

Қабылдайтын мәндері өзгермейтін, бір нақты санға тең шама тұрақты шама деп аталады. Мысалы, шеңбер ұзындығының оның диаметріне қатынасы тұрақты шама ол π санына тең.

Егер шаманың мәндері белгілі бір шартта тұрақты болса, онда ол параметр деп аталады.

Әр түрлі сандық мәндерді қабылдайтын шама айнымалы (шама) деп аталады.

Мысалы, бірқалыпты қозғалыс заңдылығы $s = vt$. Мұнда жол s пен уақыт t —айнымалы шамалар, ал v —параметр.

Анықтама. Егер X жиынының кез келген x элементіне белгілі бір заңдылықпен Y жиынының бір y элементі сәйкес келетін болса, онда X жиынында $y = f(x)$ функциясы берілген дейді.

Мұндай жағдайда x -ті тәуелсіз шама (аргумент), ал y -ті тәуелді шама деп атайды. f әрпі X пен Y жиындарының арасында сәйкестік заңдылықты береді.

X жиыны функцияның анықталу облысы, ал Y жиыны функция мәндерінің жиыны деп аталады.

Егер X жиыны арнайы берілмеген болса, онда анықталу облысы ретінде x аргументінің $y = f(x)$ үшін қабылдай алатын мәндер жиынын алады. Мысалы, $y = x^3 - \sqrt{8-x}$ функциясының анықталу облысы $(-\infty, 8]$ жартылай интервалы болады, өйткені $8-x \geq 0$ болу керек. Егерде x аргументі уақытты көрсететін болса, онда анықталу облысы ретінде $[0, 8]$ сегментін алар едік.

x оу жазықтығында жатқан $y = f(x)$ теңдігін қанағаттандыратын нүктелер жиыны осы функцияның графигі деп аталады.

Функцияның берілу жолдары. Функцияны анықтаудың үш негізгі тәсілі бар.

а) егер аргументтің мәндерін абсцисса осінің бойына, ал функция мәндерін ордината осінің бойына орналастырсак, онда жатыстықтағы $(x, f(x))$ нүктелер жиыны функцияның геометриялық бейнесі болады. Функцияның осылай берілуі графиктік берілу деп аталады;

в) егер функция мен аргументтің мәндері таблицамен (кестемен) берілсе, онда мұндай берілуді таблицалық (кестелік) берілу дейді. Мысалы, логарифмдік таблицамен логарифмдік функция берілген;

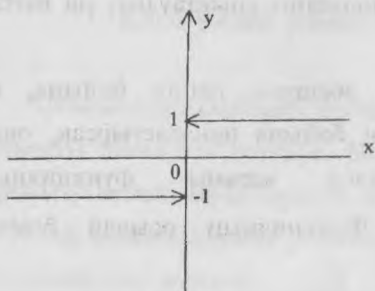
б) егер аргумент пен функцияның арасындағы байланыс формула арқылы, яғни $y = f(x)$ түрінде берілсе, онда мұндай берілуді аналитикалық берілу деп атайды.

Функция бірнеше формуладан тұруы мүмкін, мысалы анықталу облысының әр түрлі аралығында функция әр түрлі формуламен берілуіне болады. Функцияны аналитикалық түрде берудің мысалдарын келтірейік.

1. $y = x^2$. Бұл функция $-\infty < x < \infty$ сандар осінде берілген. Функцияның мәндер жиыны $0 \leq x < \infty$ оң сан осі.

$$2. y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & \text{егер } x > 0, \\ 0, & \text{егер } x = 0, \\ -1, & \text{егер } x < 0 \end{cases}$$

sign термині латынның *signum* таңба сөзінен алынған. Функция барлық сан осінде берілген, ал оның мәндері $-1, 0, 1$ сандарынан тұрады (6.4-сурет). 6.4-суреттегі стрелкалар жартылай



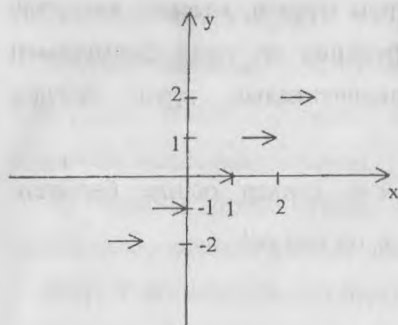
6.4-сурет

түзулердің ордината осіне жетпейтіндігін көрсетеді. Өйткені $x = 0$ нүктесінде функцияның мәні нөлге тең.

3. $y = [x]$. Мұнда $[x]$ — x мәнінің бүтін бөлігі. Функция барлық сан осінде берілген, ал оның мәндері $\mathbb{Z}$ —бүтін сандар

жиыны болады (6.5-сурет).

2. Дирихле функциясы: $y = \begin{cases} 0, & \text{егер } x - \text{иррационал сан болса,} \\ 1, & \text{егер } x - \text{рационал сан болса.} \end{cases}$



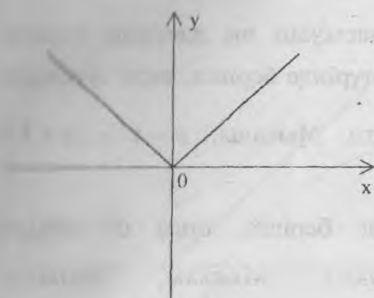
6.5-сурет

Дирихле функциясы барлық сандар осінде анықталған, ал оның мәндері 0 мен 1-ден тұрады. Бұл функцияны x оу жазықтығында графикпен көрсетуге болмайды.

Функцияның негізгі түрлеріне тоқталалық.

1. Егер берілген облыста әрбір x үшін $f(-x) = f(x)$ теңдігі орындалса, онда $f(x)$ функциясын осы облыста жұп функция деп, ал $f(-x) = -f(x)$ болса, онда тақ функция деп атайды. Мысалы, $y = x^2$ функциясы барлық сан осінде жұп функция болады, өйткені

$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, ал $y = x^3$ функциясы тақ функция, өйткені $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$. Ал $y = x^2 - x^3$ функциясы жұпта, тақта емес, өйткені $f(-x) = (-x)^2 - (-x)^3 = x^2 + x^3 \neq f(x)$. Жұп функцияның графигі ордината осіне қарағанда, ал тақ функцияның графигі бас нүктеге қарағанда симметриялы болады. Мысалы, $y = |x|$ функциясы жұп функция, өйткені $y(-x) = |-x| = |x| = y(x)$. Оның графигі ордината осіне қарағанда симметриялы (6.6-сурет).



6.6-сурет

2. Егер берілген облыста кез келген x үшін $f(x+T) = f(x)$ теңдігі орындалса, онда $f(x)$ функциясы осы облыста периодты функция деп аталады. Мұндағы $T \neq 0$ — нақты сан, ол функцияның периоды деп аталады.

Мысалы, $y = \sin 2x$ функциясы

периодты, оның периоды $T = \pi$ болады, өйткені $\sin 2(x + \pi) = \sin(2x + 2\pi) = \sin 2x$.

3. Егер X жиынында жатқан кез келген x_1 мен x_2 мәндері үшін $x_1 < x_2$ теңсіздігінен $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) \leq f(x_2)$) теңсіздігі шықса, онда $f(x)$ функциясын X жиынында өспелі (кемімейтін), ал егер $f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$) теңсіздігі шықса, онда кемімелі (өспейтін) функция дейді.

Осы функциялар монотонды функциялар деп аталады.

Мысалы, $y = x^2$ функциясы аралығында кемімелі, ал $[0, \infty)$ аралығында өспелі функция.

4. Егер X аралығында жатқан барлық x нүктелері үшін $|f(x)| \leq M$ теңсіздігі орындалатындай $M > 0$ саны табылса, онда $f(x)$ функциясы X аралығында шенелген функция деп аталады.

Мысалы, $y = \cos 3x$ функциясы барлық нақты сандар жиыны $\mathbb{R}$ -де шенелген, өйткені кезкелген $x \in \mathbb{R}$ үшін $|\cos 3x| \leq 1$.

6.4. Функциялардың классификациялары

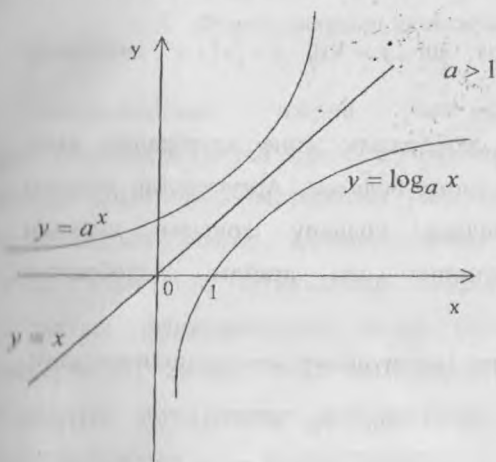
Егер функцияның берілу формуласының оң жағында тәуелді айнымалы болмаса, яғни ол $y = f(x)$ түрінде берілсе, онда функция айқын берілген функция деп аталады. Мысалы, $y = x^3 - 2x + 3$ — айқын функция.

Егер функция $F(x, y) = 0$ түрінде берілсе, онда ол айқын берілмеген функция деп аталады. Мысалы, функция $x^2 + y^2 - 2x = 0$ формуласымен берілсе онда ол айқын берілмеген болады. (Бұл формула екі функцияны береді, $y = \sqrt{2x - x^2}$ және $y = -\sqrt{2x - x^2}$).

Кері функция. $y = f(x)$ функциясының анықталу облысы X , ал мәндер жиыны Y болсын. Әрбір $y \in Y$ мәніне $f(x) = y$ теңдігі орындалатындай бір $x \in X$ мәнін сәйкес қойсақ, онда Y жиынында анықталған, ал мәндер жиыны X болатын $x = \varphi(y)$ функциясы анықталады. Осы функция $y = f(x)$ функциясының кері функциясы деп аталады. Жалпы біз x арқылы тәуелсіз айнымалыны (аргументті), ал y арқылы тәуелді айнымалыны (функцияны) белгілеп әдеттенгендіктен $y = f(x)$ функциясына кері функцияны $y = \varphi(x)$ түрінде жазамыз. $y = f(x)$ функциясына кері

функция $y = \varphi(x)$ -ты $y = f^{-1}(x)$ түрінде де жазуға болады. Мысалы, $y = a^x$ көрсеткіштік функциясының кері функциясы $x = \log_a y$ немесе $y = \log_a x$ логарифмдік функция болады.

Кез келген қатаң монотонды функцияның кері функциясы болады. Өзара кері функциялардың графиктері бірінші және үшінші координаттық бұрыштардың биссектрисасына ($y = x$ түзуіне) қарағанда симметриялы болады (6.7-сурет).



6.7-сурет

Күрделі функция.
 $y = f(u)$ функциясының анықталу облысы U , мәндер жиыны Y болсын, ал u айнымалысы X жиынында анықталған x -ке тәуелді, мәндер жиыны U болатын функция болсын: $u = \varphi(x)$. Сонда X жиынында берілген, мәндер жиыны Y

болатын $y = f[\varphi(x)]$ функциясы күрделі функция деп аталады. Мысалы, $y = \ln \cos x$ — күрделі функция, өйткені оны былай жазуға болады: $y = \ln u$, $u = \cos x$.

Элементар функциялар ұғымы. Негізгі элементар функциялар деп мектеп бағдарламасынан белгілі төмендегі функцияларды айтады:

$y = \text{const}$ — тұрақты функция; $y = x^\alpha$ (α — кез келген сан) — дәрежелік функция; $y = a^x$ ($0 < a \neq 1$, a — нақты сан) — көрсеткіштік функция; $y = \log_a x$ ($0 < a \neq 1$, a — нақты сан) — логарифмдік функция; $\sin x$,

$\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ — тригонометриялық функциялар; $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccot} x$ — кері тригонометриялық функциялар.

Негізгі элементар функциялар және оларға арифметикалық амалдар қолдану арқылы шыққан функциялар немесе осылар арқылы шыққан күрделі функциялар элементар функциялар деп аталады. Мысалға,

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}, \quad f(x) = \log_3(\cos x + e^{3x}), \quad f(x) = \operatorname{arccot} 2^x$$

элементар функциялар болады, ал $y = 3|x|$, $y = [x] + x$ элементар функциялар болмайды.

Элементар функциялар алгебралық және алгебралық емес (трансценденттік) болып екі топқа бөлінеді. Аргументіне ақырлы санды арифметикалық амалдар қолдану арқылы шыққан функцияны алгебралық функция деп атайды. Алгебралық функцияларға:

1) бүтін рационал функциялар (көпмүшелер немесе полиномдар):

$y = P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, a_n — нақты, n — натурал сан;

2) бөлшек рационал функциялар, яғни екі көпмүшенің қатынасынан тұратын функциялар:

$$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m}, \quad b_k \text{ — нақты сан.}$$

3) иррационал функциялар, яғни рационал емес, бүтін немесе бөлшек дәрежелі функцияларға ақырлы санды арифметикалық амалдар қолдану арқылы шыққан функциялар немесе осындай функциялардан пайда болған күрделі функциялар жатады.

Мысалы, $f(x) = x^3 + 2\sqrt{x}$, $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + \sqrt{x+1}}$, $f(x) = x^{\frac{3}{4}} + 3x^{\frac{1}{3}}$ —

иррационал функциялар болады.

Кез келген алгебралық емес функция трансценденттік функция деп аталады. Мысалы, $f(x) = \sin 3x$, $f(x) = \lg 2x + 2x^3$, $f(x) = 3^x + 4x$ — трансценденттік функциялар.

6.5. Функциялардың экономикадағы қолданулары

Экономикалық теория мен тәжірибеде сызықтық функциялардан бастап зерттеліп отырған заттың әр түрлі уақыттағы жағдайларын байланыстыратын рекуренттік қатынастар арқылы анықталатын белгілі алгоритмдермен құрылған функцияларға дейінгі көптеген функциялар кеңінен пайдаланылады. Онда сызықтық функциялармен қатар бөлшек рационал, дәрежелі (квадраттық, кубтық және т.б.), көрсеткіштік, логорифмдік және басқа да функциялар қолданылады. Бірқатар экономикалық құбылыстардың периодтылығы, өзгеру заңдылығы тригонометриялық функцияларды қолдануға мүмкіндік береді. Экономикада өте жиі қолданылатын кейбір функцияларды келтіріп кетейік.

1. Сұраным, пайдаланым және ұсыным функциялары жеке бұйымдарға немесе ұсыныстарға сұраным, пайдаланым және ұсыным көлемдерінің (мөлшерлерінің) әр түрлі жағдайлардан (мысалы, бағадан, түсімнен, т.б.) қалай тәуелділігін көрсетеді.

Мысалы, заттың бағасы P теңге болса, онда белгілі бір шарттар орындалғанда сол затқа сұраным q оның бағасына тәуелді, яғни $q = f(p)$ — сұраным функциясы болады. Кей жағдайларда бағаны

сұранымға тәуелді етіп талдау жүргізуге, яғни $p = f(q)$ функциясын зертеуге тура келеді.

2. Өндіріс функциясы өндіріс нәтижелерінің оларға жұмсалатын өндіріс күштерінен, себептерден қалай тәуелділігін көрсетеді.

3. Шығын функциясы (өндіріс функциясының бір түрі) өндіріс шығындарының өндіріс нәтижелеріне (өнімдеріне) қалай тәуелділігін көрсетеді. Мысалы, егер x — өндірілетін өнім мөлшері (көлемі) болғанда зат өндіргенде кететін жалпы шығынды $K(x)$ арқылы белгілесек, онда $\frac{K(x)}{x}$ функциясы орта немесе меншікті шығын функциясы деп аталады да, ол $\Pi(x)$ арқылы белгіленеді, яғни $\Pi(x) = \frac{K(x)}{x}$.

4. Түсім функциясы (өндіріс функциясының дербес түрі) өнім көлемінің оны шығаруға жұмсалатын шикі заттардан, жұмыс күшінен қалай тәуелділігін береді.

Мысалы, егер q мөлшерде зат сатылса, онда осы сатылған зат көлемін әр заттың бағасына көбейтсек жалпы түсім шығады, яғни $U = p \cdot q = q \cdot f(q)$ функциясы пайда болады. Бұл функцияны жалпы түсім функциясы деп атайды.

5. Пайдалылық (басымдылық беру) функциялары кең мағынада іс нәтижесінің осы істі жүргізу деңгейіне қалай тәуелділігін көрсетеді.

ЖЕТІНШІ ТАРАУ

ШЕКТЕР ЖӘНЕ ҮЗІЛІССІЗДІК

7.1. Сандық тізбектің шегі

Анықтама. Егер белгілі бір заңдылықпен әрбір натурал n санына a_n саны сәйкес келетін болса, онда $\{a_n\}$ сандық тізбегі

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

берілді дейді.

Басқа сөзбен айтқанда, аргументі n натурал саны болатын $a_n = f(n)$ функциясы сандық тізбек деп аталады.

$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ сандары тізбектің мүшелері деп, ал a_n — жалпы немесе n -і мүшесі деп аталады.

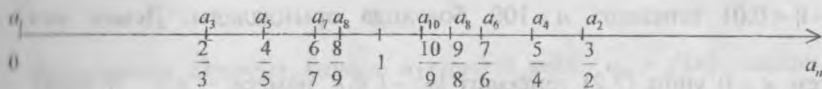
Сандық тізбектердің кейбір мысалдарын келтірейік:

1, 3, 5, 7, ..., $2n-1$, ... (монотонды, ақырсыз),

2, 0, 2, 0 ... (монотонсыз, ақырлы),

$$0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \dots, \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right), \dots \quad (\text{монотонсыз ақырлы}) \quad (7.1)$$

(7.1) сандық тізбегін сандар осінде нүктелермен бейнелейік:



7.1-сурет

n санының өсуіне байланысты тізбектің мүшелерінің 1 санына жақындай түсетінін көруге болады, яғни $n \rightarrow \infty$ болғанда $a_n \rightarrow 1$

болады. Осындай жағдайда $|a_n - 1|$ абсолюттік шамасы n саны өскен сайын кішірейсе береді, өйткені

Абылай хан атындағы
қазақ мемлекеттік
халықаралық қатынастар
және әлем тілдер
университетінің
КІТАПХАНАСЫ

$$|a_1 - 1| = 1, \quad |a_2 - 1| = \frac{1}{2}, \quad |a_3 - 1| = \frac{1}{3}, \quad |a_4 - 1| = \frac{1}{4}, \quad \dots, \quad |a_n - 1| = \frac{1}{n}.$$

Анықтама. Егер кез келген мейлінше кіші $\varepsilon > 0$ саны үшін N нөмері табылып, нөмерлері $n > N$ болатын барлық a_n мүшелері үшін

$$|a_n - A| < \varepsilon \quad (7.2)$$

теңсіздігі орындалса, онда A саны $\{a_n\}$ тізбегінің шегі деп аталады.

Егер A саны $\{a_n\}$ тізбегінің шегі болса, онда оны былай жазамыз

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \quad \text{немесе} \quad n \rightarrow \infty \Rightarrow a_n \rightarrow A$$

Шегі бар тізбек жинақталған тізбек, ал шегі жоқ тізбек жинақталмаған тізбек деп аталады.

Шек анықтамасының мағынасы:

Жеткілікті үлкен n нөмерлері үшін $\{a_n\}$ тізбегінің мүшелері сан осінде A санына мейлінше жақын орналасады.

7.1-мысал. (7.1) тізбегі үшін $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ болатындығын дәлелдеңіз.

Шешуі. Мысалы, $\varepsilon = 0.1$ болсын. Онда (7.2) теңсіздігі $|a_n - 1| < 0.1$

немесе $\left| 1 + \frac{(-1)^n}{n} - 1 \right| < 0.1$, яғни $\frac{1}{n} < \varepsilon$ түрінде жазылады. Бұл

теңсіздік $n > 10$ болғанда орындалады. Сол сияқты $\varepsilon = 0.01$ үшін

$|a_n - 1| < 0.01$ теңсіздігі $n > 100$ болғанда орындалады. Демек кез

келген $\varepsilon > 0$ үшін (7.2) теңсіздігі $|a_n - 1| < \varepsilon$ немесе $\frac{1}{n} < \varepsilon$ n саны

$n > \frac{1}{\varepsilon}$ болғанда орындалады. Сонымен кез келген $\varepsilon > 0$ үшін

$N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ нөмері табылып, нөмерлері $n > N$ болатын барлық a_n

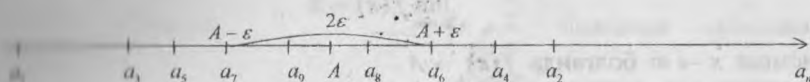
мүшелері үшін $|a_n - 1| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалады, яғни $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

Мұндағы $[a]$ — a санының бүтін бөлігі.

Сандар тізбегі шегінің геометриялық мағынасын талдайық. Ол үшін $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ тізбегінің мүшелерін сан осіне орналастырамыз (7.2-сурет).

$|a_n - A| < \varepsilon$ теңсіздігі $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$ теңсіздіктеріне эквивалентті.

Сонымен белгілі бір N нөмерден бастап берілген тізбектің барлық мүшелері A нүктесінің ε -аймағында жатады.



7.2-сурет

Сонымен егер кез келген мейлінше аз $\varepsilon > 0$ саны үшін N нөмері табылып, нөмерлері $n > N$ болатын барлық a_n мүшелері A нүктесінің ε -аймағында жатса, онда A саны $\{a_n\}$ тізбегінің шегі деп аталады.

ε -аймағының сыртында тізбектің санаулы ғана мүшелері жатуы тиіс.

7.2. Функцияның шегі

Функцияның ақырсыз қашық нүктедегі шегі. $a_n = f(n)$ сандық тізбегінің шегімен $y = f(x)$ функциясының ақырсыз қашық нүктедегі шегі тығыз байланысты. Тізбек жағдайында n айнымалысы бүтін мәндерді қабылдай отырып өсетін болса, ал функция жағдайында x айнымалысы кез келген нақты мәнді қабылдай отырып өзгереді.

Анықтама. Егер кез келген оң, тіпті мейлінше кіші ε саны үшін

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad (7.3)$$

теңсіздігі барлық $|x| > s$ теңсіздігін орындайтын x -тер үшін орындалатындай $s > 0$ саны табылатын болса, онда A саны $f(x)$ функциясының x айнымалысы ақырсыздыққа ұмтылғандағы шегі деп аталады.

Егер A саны $f(x)$ функциясының x ақырсыздыққа ұмтылғандағы шегі болса, онда осы дерек былай жазылады:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

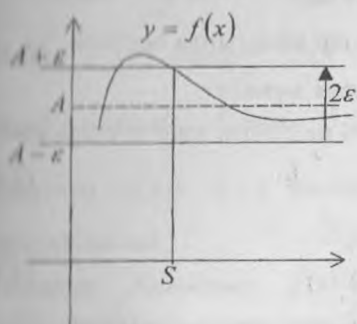
немесе $x \rightarrow \infty$ болғанда $f(x) \rightarrow A$.

Логикалық символдар арқылы келтірілген анықтаманы былай жазамыз:

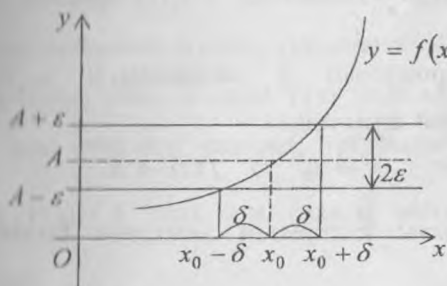
$$\left(A = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists s = s(A) > 0) (\forall x : |x| > s) : |f(x) - A| < \varepsilon$$

Бұл анықтаманың мағынасы сандық тізбек шегінің мағынасындай. Абсолют шамасы бойынша үлкен x -тер үшін $f(x)$ функциясы мөндерінің A санынан айырмашылығы мейлінше аз болады.

$y = f(x)$ функциясының ақырсыз қашық нүктедегі шегінің геометриялық мағынасына тоқталалық. $|f(x) - A| < \varepsilon$ теңсіздігі $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ теңсіздіктеріне эквивалентті екендігі белгілі. Сондықтан абсолют шамасы берілген $s > 0$ санынан үлкен x -тер үшін $f(x)$ функциясының мөндері екі 2ε -нан аспайтын $A - \varepsilon < y < A + \varepsilon$ жолақтың ішінде жатады (7.3-сурет).



7.3-сурет



7.4-сурет

7.2-мысал.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+2}{x} = 3$$

теңдігін дәлелденіз.

Шешуі. Кез келген $\varepsilon > 0$ үшін

$$\left| \frac{3x+2}{x} - 3 \right| < \varepsilon \quad \text{теңсіздігінен} \quad \frac{2}{|x|} < \varepsilon$$

теңсіздігі шығады. Бұл теңсіздік

$$|x| > \frac{2}{\varepsilon} \quad \text{болғанда} \quad \text{орындалады.}$$

Сондықтан, кез келген $\varepsilon > 0$

$$\text{саны үшін} \quad \left| \frac{3x+2}{x} - 3 \right| < \varepsilon$$

$$\text{теңсіздігі барлық } |x| > s = \frac{2}{\varepsilon}$$

теңсіздігін қанағаттандыра-
тын x -тер үшін орын-

$$\text{далатын} \quad s = \frac{2}{\varepsilon} > 0 \quad \text{саны}$$

табылады.

Ескерту. Жоғарыда берілген анықтамада $x \rightarrow \infty$ өрнегі x айнымалысы абсолют шамасы бойынша ақырсыз өсетінін білдіреді. Сондай-ақ, шек ұғымының анықтамасын x айнымалысы белгілі таңбаны сақтай отырып ақырсыз өсетін жағдайда да, яғни $x > 0$ ($x \rightarrow +\infty$) және $x < 0$ ($x \rightarrow -\infty$) болғанда беруге болады. Мұндай жағдайда (7.3) теңсіздігі $x \rightarrow +\infty$ болғанда $x > s$ теңсіздігін орындайтын, ал $x \rightarrow -\infty$ болғанда $x < -s$ теңсіздігін орындайтын барлық x -тер үшін орындалуы керек.

Функцияның нүктедегі шегі.

$y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінің бір аймағында берілсін, ал x_0 нүктесінің өзінде ол анықталмаған болуы мүмкін.

Анықтама. Егер кез келген оң, тіпті мейлінше кіші ε саны үшін

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad (7.4)$$

теңсіздігі барлық

$$|x - x_0| < \delta, \quad x \neq x_0 \quad (7.5)$$

теңсіздігін қанағаттандыратын x -тер үшін орындалатындай $\delta > 0$ саны табылатын болса, онда A саны $f(x)$ функциясының x айнымалысы x_0 мәніне (нүктесіне) ұмтылғандағы шегі деп аталады.

A санының $f(x)$ функциясының x айнымалысы x_0 -ге ұмтылғандағы шегі екендігі былай жазылады:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{немесе} \quad x \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x) \rightarrow A$$

Логикалық символдар арқылы келтірілген анықтама былай жазылады:

$$\left(A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0) (\forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta):$$

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

Бұл анықтаманың мағынасы: x_0 нүктесіне мейлінше жақын жатқан x -тер үшін $f(x)$ функциясы мәндерінің A санынан айырмашылығы (абсолют шамасы бойынша) мейлінше аз болады.

Дәлірек айтқанда, кез келген $\varepsilon > 0$ саны бойынша $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ интервалында жатқан ($x \neq x_0$) x -тер үшін $f(x)$ функциясының мәндері $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ интервалында жататындай δ саны табылса, онда A саны $f(x)$ функциясының x айнымалысы x_0 -ге ұмтылғандағы шегі болады (7.4-сурет).

7.3-мысал. $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 5) = 7$ теңдігін дәлелдеңіз.

Шешуі. $\varepsilon = 0,1$ болсын. $|2x + 5 - 7| < 0,1$ теңсіздігінен $|x - 1| < 0,05$

теңсіздігі шығады. Демек $\delta = \frac{\varepsilon}{2} = 0,05$ саны үшін $|x - 1| < \delta$ теңсіздігінен $|2x + 5 - 7| < \varepsilon$ теңсіздігі шығады. Олай болса берілген теңдік дәлелденді.

1-ескерту. Анықтама $f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде анықталуын талап етпейді, өйткені $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінің бір аймағында жатқан, x_0 -дің өзіне тең емес нүктелерінде берілген.

2-ескерту. Егер x айнамамысы x_0 -ге одан кіші мәндерді (яғни $x < x_0$) қабылдай отырып ұмтылғанда A саны $f(x)$ функциясының шегі болса, онда A саны $f(x)$ функциясының $x \rightarrow x_0$ болғандағы сол жақ шегі деп аталады, бұл былай жазылады $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A$.

$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A$ шегі осы сияқты анықталып, оң жақ шек деп аталады.

Егер $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A$ теңсіздіктері орындалса, онда

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ теңдігі орындалады.

7.3. Ақырсыз кіші және ақырсыз үлкен шамалар

Анықтама. Егер $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ $\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0 \right)$ теңдігі орындалса,

онда $\alpha(x)$ функциясы $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$) болғанда, яғни x айнамамысы x_0 -ге (∞ -ке) ұмтылғандағы ақырсыз кіші шама деп аталады.

Мысалы, $y = \cos 2x$ функциясы $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$, ал $y = \frac{2}{x-8}$ функциясы $x \rightarrow \infty$ болғанда ақырсыз кіші шамалар болады.

7.1-теорема. (Ақырсыз кіші шаманың функция шектерімен байланысы туралы). Егер $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ $\left(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \right)$ теңдігі

орындалса, онда $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$) болғанда

$$f(x) = A + \alpha(x) \quad (7.6)$$

теңдігі орындалады. Мұндағы $\alpha(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \infty$) болғандағы бір ақырсыз кіші шама.

Дәлелдеуі. $x \rightarrow x_0$ үшін дәлелдейік. Теореманың шарты бойынша $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. Яғни, кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін

$|f(x) - A| < \varepsilon$ теңсіздігі барлық $|x - x_0| < \delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын x -тер үшін орындалатындай $\delta > 0$ саны табылады. Сондықтан $\alpha(x) = f(x) - A$ деп белгілесек, онда $|\alpha(x)| < \varepsilon$, яғни $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$. Олай болса, осы $\alpha(x)$ ақырсыз кіші

шамасы үшін (7.6) теңдігі орындалады.

Осы теоремаға кері теореманы да шектің анықтамасын қолдана отырып дәлелдеуге болады:

7.2-теорема. Егер (7.6) теңдігі орындалса, онда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \left(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \right)$$

Ақырсыз кіші шамалардың қасиеттері:

1. Ақырлы санды ақырсыз кіші шамалардың алгебралық қосындысы ақырсыз кіші шама болады.

2. Ақырсыз кіші шамамен ақырлы функцияның көбейтіндісі ақырсыз кіші шама болады.

3. Ақырсыз кіші шаманың $x \rightarrow x_0$ болғанда шегі нөлге тең емес функцияға қатынасы ақырсыз кіші шама болады.

Мысал ретінде бірінші қасиетті дәлелдейік.

$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0$ теңдігі орындалсын. Сондықтан кез келген

$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ саны үшін

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (7.7)$$

теңсіздіктерін $|x - x_0| < \delta_1$, $|x - x_0| < \delta_2$ теңсіздіктерін қанағаттандыратын барлық x -тер үшін орындалатындай δ_1 және δ_2 сандары табылады. Олай болса $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ саны үшін $|x - x_0| < \delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын x -тер (7.7) теңсіздіктерін

қанағаттандырады. Демек $|\alpha(x) + \beta(x)| \leq |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Бұл $\alpha(x) + \beta(x)$ функциясының $x \rightarrow x_0$ болғанда ақырсыз кіші шама екендігін көрсетеді.

$\alpha(x)$ және $\beta(x)$ шамалары $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$) болғанда ақырсыз кіші шамалар болсын.

Егер $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = l$ болса, онда $\alpha(x)$ және $\beta(x)$ шамаларын $x \rightarrow x_0$

болғанда эквивалентті шамалар деп, ал $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ болса, онда

$\alpha(x)$ шамасын $\beta(x)$ шамасына қарағанда реті үлкен ақырсыз кіші шама деп атайды. Осы жағдайлар былай жазылады:

$\alpha(x) \approx \beta(x)$ — эквивалентті шамалар;

$\alpha(x) = o(\beta(x))$, $x \rightarrow x_0$ — $\alpha(x)$ шамасы $\beta(x)$ шамасына қарағанда реті үлкен ақырсыз кіші шама.

Анықтама. Егер кез келген қандайда болсын үлкен $M > 0$ саны үшін $|x - x_0| < \delta$ теңсіздігі орындалатын барлық x -тер $|f(x)| > M$ теңсіздігін қанағаттандыратындай $\delta > 0$ саны табылса, онда $f(x)$ функциясын $x \rightarrow x_0$ болғанда ақырсыз үлкен шама деп атайды.

Анықтама бойынша, егер $x \rightarrow x_0$ болғанда $f(x)$ функциясы ақырсыз үлкен шама болса, онда осы деректі былай жазамыз:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \quad \text{немесе} \quad x \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x) \rightarrow \infty.$$

Мысалы, $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ болғанда $y = \operatorname{tg} x$ ақырсыз үлкен шама болады.

Ескерту. Ақырсыз үлкен шама $x \rightarrow x_0$ болғанда шенелмеген функция болады, бірақ кез келген шенелмеген функция ақырсыз үлкен шама болмайды. Мысалы, $y = x \cos x$ функциясы $x \rightarrow \infty$ болғанда шенелмеген функция болғанмен ақырсыз үлкен функция бола алмайды, өйткені $y\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Ақырсыз үлкен шама мен ақырсыз кіші шамалардың арасында мынандай байланыс бар.

7.3-теорема. Егер $x \rightarrow x_0$ болғанда $\alpha(x)$ ақырсыз кіші шама болса, онда $f(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$ функциясы ақырсыз үлкен шама болады.

Керісінше, $x \rightarrow x_0$ болғанда $f(x)$ функциясы ақырсыз үлкен шама болса, онда $\alpha(x) = \frac{1}{f(x)}$ функциясы ақырсыз кіші шама болады.

7.4. Шектер туралы негізгі теоремалар.

Шек бар болуының белгілері.

$f(x)$ және $\varphi(x)$ функцияларының $x \rightarrow x_0$ болғанда шектері бар болсын:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = B$$

Мұнда $x_0 = \infty$ болуы да мүмкін деп есептейміз. Сонда

1°. Функцияның бір шектен артық шегі болмайды.

Дәлелдеуі. Кері әдіспен дәлелдейміз. $f(x)$ функциясының екі шегі бар болсын делік: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = B$. Онда 7.1-

теорема бойынша $f(x) = A + \alpha(x), \quad f(x) = B + \beta(x)$ теңдіктері $x \rightarrow x_0$ болғанда орындалады. Мұнда $\alpha(x)$ пен $\beta(x)$ ақырсыз кіші шамалар. Олай болса $A - B + (\alpha(x) - \beta(x)) = 0$. Сондықтан $\alpha(x) - \beta(x) = B - A$. Бірақ бұл теңдік орындалмайды, өйткені $\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha(x) - \beta(x)) = 0$. Олай болса $B = A$.

2°. Екі функцияның қосындысының шегі олардың шектерінің қосындысына тең:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + \varphi(x)) = A + B$$

3°. Екі функцияның көбейтіндісінің шегі олардың шектерінің көбейтіндісіне тең:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot \varphi(x)) = A \cdot B$$

Сондықтан, тұрақты шаманы шек таңбасының алдына шығаруға болады:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (Cf(x)) = C \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = C \cdot A$$

4°. Бөлімінің шегі нөлге тең болмаған жағдайда екі функцияның қатынасының шегі олардың шектерінің қатынасына тең болады:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{B}, \quad (B \neq 0)$$

5°. Егер $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = u_0$ болса, онда күрделі $f(\varphi(x))$ функциясы үшін $\lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = A$ теңдігі орындалады.

6°. Егер x_0 нүктесінің бір аймағында $f(x) < \varphi(x)$ теңсіздігі орындалса, онда $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$.

Осы тұжырымдардың бәрін 7.1-теоремаға сүйеніп оңай дәлелдеуге болады. Мысал ретінде 2° тұжырымын дәлелдейік.

Дәлелдеуі. Теореманың шарты бойынша $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ және

$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = B$. Сондықтан 7.1-теорема бойынша

$f(x) = A + \alpha(x)$, $\varphi(x) = B + \beta(x)$ теңдіктері $x \rightarrow x_0$ болғанда орындалады. Мұнда $\alpha(x)$ пен $\beta(x)$ $x \rightarrow x_0$ болғанда ақырсыз кіші шамалар. Осы екі теңдікті өзара көбейтелік:

$$f(x) \cdot \varphi(x) = AB + (B \cdot \alpha(x) + A \cdot \beta(x) + \alpha(x) \cdot \beta(x))$$

Ақырсыз кіші шамалардың қасиеттері бойынша жақшаның ішіндегі функция $x \rightarrow x_0$ болғанда ақырсыз кіші шама болады.

Сондықтан 7.2-теорема бойынша $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot \varphi(x)) = A \cdot B$.

Шек бар болуының белгілері.

Шектің бар болуын тексеру үшін анықтаманы қолдану әрқашанда тиімді емес. Оны көп жағдайда шек бар болуының белгілері арқылы жасауға болады.

7.4-теорема. Егер $\{a_n\}$ сандық тізбегі монотонды және шенелген болса, онда оның шегі бар.

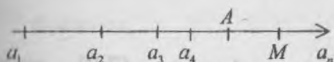
Теореманың шарты орындалатын екі жағдай бар:

а) тізбек—кемімейтін және жоғарыдан шенелген тізбек:

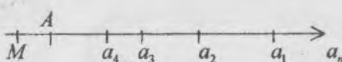
$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq M \quad (7.5\text{-сурет});$$

ә) тізбек—өспейтін және төменнен шенелген тізбек:

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots \geq M \quad (7.6\text{-сурет});$$



7.5-сурет



7.6-сурет

7.5-теорема. Егер x_0 нүктесінің бір аймағында (немесе x айнымалысының жеткілікті үлкен мәндерінде) $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ теңсіздіктері орындалса және $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \varphi(x) = A$, $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \psi(x) = A$ болса,

онда $f(x)$ функциясының да $x \rightarrow x_0$ болғанда шегі бар және

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = A.$$

(түсініксіздік)

Дәлелдеуі. $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = A$ теңдіктері орындалсын.

Онда кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін барлық $|x - x_0| < \delta$ теңсіздігін

қанағаттандыратын x -тер үшін $|\varphi(x) - A| < \varepsilon$ және $|\psi(x) - A| < \varepsilon$

теңсіздіктері орындалатын δ саны табылады. Олай болса

$A - \varepsilon < \varphi(x)$, $\psi(x) < A + \varepsilon$ теңсіздіктері орындалатын δ саны бар.

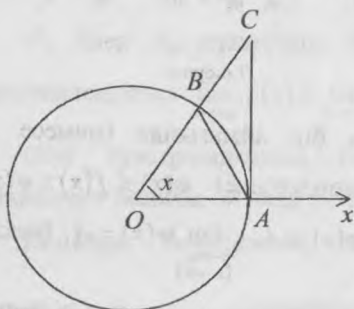
Сондықтан $A - \varepsilon < \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) < A + \varepsilon$, яғни $|f(x) - A| < \varepsilon$.

7.5. Тамаша шектер.

Пайызды үзіліссіз қосу есебі

Бірінші тамаша шек деп

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (7.8)$$



7.7-сурет

теңдігін айтады. (7.8) теңдігін дәлелдеу үшін радиусы R -ге тең, центрі O нүктесінде жатқан дөңгелекті қарастырамыз (7.7-сурет).

OB — Ox осімен x бұрышын жасайтын қозғалмалы радиус және

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ болсын. Сонда AOB

секторы, AOB және AOC үшбұрыштарының аудандары төмендегі теңсіздіктерді қанағаттандырады:

$$S_{\triangle AOB} < S_{\text{сек.}AOB} < S_{\triangle AOC}.$$

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} R^2 \sin x, \quad S_{\text{сек.}AOB} = \frac{1}{2} R^2 x, \quad S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg} x \quad \text{болғандықтан,}$$

соңғы теңсіздіктерден мынандай теңсіздіктер шығады:

$$\frac{1}{2} R^2 \sin x < \frac{1}{2} R^2 x < \frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg} x.$$

$\frac{1}{2} R^2 \sin x > 0$ болғандықтан, осы теңсіздіктердің екі жақтарын

$$\frac{1}{2} R^2 \sin x \text{ мәніне бөлеміз: } 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \text{немесе}$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad (7.9)$$

$\cos x$ және $\frac{\sin x}{x}$ функциялары жұп функциялар болғандықтан

соңғы теңсіздіктер $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ теңсіздіктерін қанғаттандыратын x -

тер үшін де орындалады. $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ болғандықтан (7.9)

теңсіздіктерінен 7.5-теоремасы бойынша (7.8) теңдігі шығады.

7.4-мысал.

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{5x}$; ө) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2}$ шектерін табыңыз.

Шешуі. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{5x} = \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = \frac{3}{5} \cdot 1 = \frac{3}{5}$;

ө) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \cdot 2 =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = 1^2 = 1.$$

Екінші тамаша шек. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ сандық тізбегін қарастырамыз.

Егер де осы тізбектің алғашқы мүшелерін есептеп көретін болсақ,

$$a_1 = 2,0, \quad a_2 = 2,25, \quad a_3 = 2,37, \quad a_4 = 2,441, \quad a_5 = 2,488, \dots,$$

онда оның өспелі тізбек екенін байқауға болады. Тізбектің өспелі екендігін қатаң математикалық түрде Ньютон биномы арқылы дәлелдеуге болады. Ньютон биномы арқылы

$$a_n = 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

теңдігін көрсетуге болады. Осы теңдіктен

$$2 < a_n < 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} < 2 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

теңсіздігін аламыз. Сондықтан $\{a_n\}$ тізбегі өспелі және жоғарыдан шенелген. Олай болса 7.4-теорема бойынша $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ шен ақырлы.

Анықтама. e саны (екінші тамаша шек) деп $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ санын айтады.

Сонымен

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (7.10)$$

Жоғарыда біз $2 < e < 3$ теңсіздіктері орындалатынын көрсеттік. e санының иррационал сан екендігі жоғары математика курстарында дәлелденеді. e санының жуық мәні: $e \approx 2,718281\dots$. Сондай-ақ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

теңдіктерінің де орындалатынын көрсетуге болады. Математикалық анализде e санының маңызы өте үлкен. Негізі e саны болып келетін натурал логарифмдер математикада кеңінен қолданылады. Натурал логарифмдер $\ln$ таңбасымен белгіленеді: $\log_e x = \ln x$.

7.5-мысал.

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}; \quad \text{ә) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{4x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} (1-4x)^{\frac{3}{x}}$$

шектерін есептеңіз.

Мысал. а) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \left| \frac{1}{x} = y \Rightarrow x \rightarrow 0, y \rightarrow \infty \right| = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^y = e;$

ә) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^{4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{3}} \right)^{\frac{x}{3} \cdot 12} = e^{12};$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-4x)^{\frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+(-4x))^{\frac{1}{4x} \cdot (-12)} = e^{-12}.$

Статистика, физика, биология және химия сияқты көптеген ғылымдарда (халық санының өсуі, радийдің бөлінуі, бактериялардың көбеюі, химиялық реакциялардың жүру барысы және т.б. есептер) e саны қолданылады. Мысал ретінде пайызды үзіліссіз қосу есебін қарастырамыз.

Пайызды (процентті) үзіліссіз қосу есебі. Жинақ банкісіне ағашқы салынған теңгенің көлемі Q_0 болсын. Егер банк жыл сайын $p\%$ өсім беретін болса, онда t жылдан кейінгі банкте жиналған теңгенің көлемі Q_t -ді есептейік. Жәй пайызды қолданатын болса, онда банкке салынған теңгенің көлемі жыл сайын $\frac{p}{100} Q_0$ -ге өсіп отырады еді, яғни

$$Q_1 = Q_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right), \quad Q_2 = Q_0 \left(1 + \frac{2p}{100} \right), \quad \dots, \quad Q_t = Q_0 \left(1 + \frac{pt}{100} \right).$$

Өмірде көбінесе күрделі пайыз пайдаланылады. Мұндай жағдайда банкке салынған теңгенің көлемі жыл сайын $1 + \frac{p}{100}$ рет өсіп отырады, яғни

$$Q_1 = Q_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right), \quad Q_2 = Q_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^2, \quad \dots, \quad Q_t = Q_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^t.$$

Егер банкке құйылған теңгенің пайызын жылына бір рет емес рет есептейтін болса, онда $p\%$ жылдық өсім бойынша жылдың бөлігінде салым $\frac{P}{n}\%$ -ға өседі, ал t жылда nt қосылу болғандықтан

$$Q_t = Q_0 \left(1 + \frac{P}{100n} \right)^{nt} \quad (7.11)$$

көлеміндегі теңгені құрайды.

Салынымға қосылатын пайыз әрбір жарты жылда ($n = 2$), квартал сайын ($n = 4$), ай сайын ($n = 12$), күн сайын ($n = 365$), сағат сайын ($n = 8760$), үзіліссіз ($n \rightarrow \infty$) қосылып отырсын. Сонда салынымның t жылдағы көлемі

$$Q_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[Q_0 \left(1 + \frac{P}{100n} \right)^{nt} \right] = Q_0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{P}{100n} \right)^{\frac{100n}{P}} \right]^{\frac{Pt}{100}}$$

санымен есептелінеді. Осы формулада $x = \frac{100n}{P} \rightarrow \infty$ түрлендіруін жасап, (7.10) формуласын қолдансақ, онда

$$Q_t = Q_0 e^{\frac{Pt}{100}} \quad (7.12)$$

формуласы шығады. (7.12)-і формула $p > 0$ болғанда көрсеткішті (экспоненциалды) кему заңын, ал $p < 0$ болғанда көрсеткішті кему заңын көрсетеді. Бұл формула үзіліссіз пайызды есептеуге қолданылады.

7.6. Функцияның үзіліссіздігі

Шек ұғымы сияқты функцияның үзіліссіздік ұғымы да математикалық анализдің негізгі ұғымдарының бірі болады.

Функцияның нүктедегі үзіліссіздігі ұғымын беру үшін 3 шартты қояымыз:

1) $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде анықталған (яғни $f(x_0)$ мәні бар);

2) $x \rightarrow x_0$ (x шамасы x_0 -ге ұмтылғанда) болғанда $f(x)$ функциясының ақырлы шегі $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ бар;

3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ шегі функцияның x_0 нүктесіндегі мәніне тең:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (7.12)$$

Бұл анықтаманы береміз.

Анықтама. Егер $y = f(x)$ функциясы келтірілген үш шартты оқындайтын болса, онда ол x_0 нүктесінде үзіліссіз дейді.

7.6-мысал. Берілген функциялардың $x = 0$ нүктесіндегі үзіліссіздігін зерттеңіз.

$$a) y = \frac{1}{x}; \quad б) y = \begin{cases} x+2, & \text{егер } x \geq 0, \\ x-1, & \text{егер } x < 0 \end{cases}; \quad в) y = \begin{cases} x^2, & \text{егер } x \neq 0, \\ 2, & \text{егер } x = 0 \end{cases};$$

$$г) y = x^3.$$

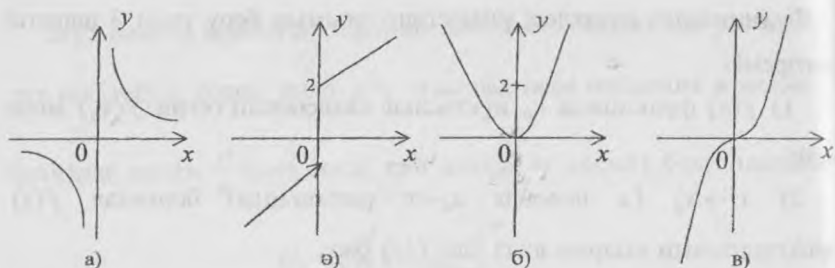
Шешуі.

а) $y = f(x)$ функциясы $x = 0$ нүктесінде үзіліссіз емес, өйткені (7.8а-суретін қара) үзіліссіздіктің бірінші шарты орындалмай отыр: $f(0)$ мәні анықталмаған;

б) үзіліссіздіктің бірінші шарты орындалады: $f(0) = 2$ бірақ екінші шарт орындалмайды, өйткені $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ шегі жоқ (7.8б-суретін қара).

Функцияның $x = 0$ нүктесіндегі оң жақ және сол жақ шектері бар, бірақ олар өзара тең емес: $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -1$. Сондықтан

функция $x = 0$ нүктесінде үзіліссіз емес;



7.8-сурет

б) Берілген функция үшін бірінші және екінші шарттар орындалады: $f(0)=2$, $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 0$. Бірақ үшінші шарт орындалмайды (7.8б-сурет):

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \neq f(0) = 2$$

Сондықтан функция $x = 0$ нүктесінде үзіліссіз емес;

в) функция $x = 0$ нүктесінде үзіліссіз, өйткені ол үшін үш шарт орындалады (7.8в-сурет):

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$$

Функцияның x_0 нүктесіндегі үзіліссіздігінің анықтамасы (7.12) формуласын былай жазуға болады:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right) \quad (7.13)$$

Функция x_0 нүктесінде үзіліссіз болса, онда оның графигін x_0 нүктесі арқылы үзіліссіз сызуға (қарындашты қағаздан алмай) болады.

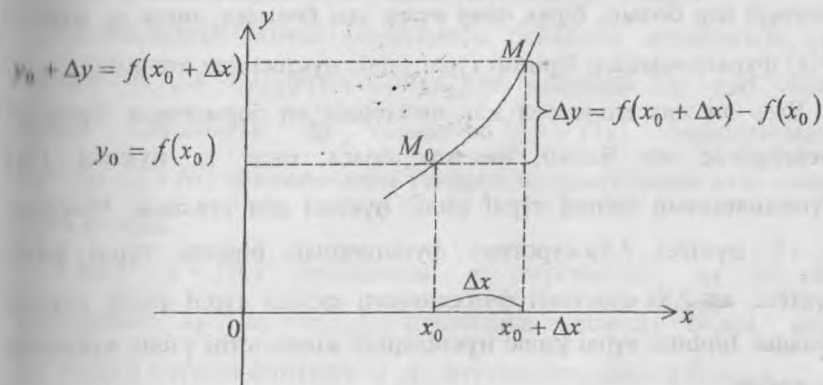
Енді үзіліссіздіктің екінші бір анықтамасын берейік. x_0 аргументіне Δx өсімшесін берсек, $y = f(x)$ функциясы Δy

шінісін алады. Ол $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ формуласымен анықталады (7.9-сурет).

2-анықтама. Егер $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде анықталса және

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0 \quad (7.14)$$

теңдігі орындалса, онда ол функция x_0 нүктесінде үзіліссіз дейді.



7.9-сурет

Үзіліссіздіктің осы екі анықтамасының өзара эквивалентті екендіктерін көрсетелік.

Бірінші анықтамадан (7.12) теңдік бойынша

$$x = x_0 + \Delta x, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

теңдігі шығады, өйткені $x \rightarrow x_0$ пен $\Delta x \rightarrow 0$ ұмтылыстары өзара эквивалентті. Сондықтан 7.1-теоремасы бойынша ((7.6) формуласы) $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \alpha(\Delta x)$ теңдігі орындалады. Мұндағы $\alpha(\Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$ шамасы $\Delta x \rightarrow 0$ болғанда (Δx шамасы нөлге ұмтылғандағы) ақырсыз кіші шама болады.

Сондықтан $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$. Егер $x = x_0 + \Delta x$ теңдігін пайдалансақ, онда

(7.14) теңдігінен (7.12) теңдігі шығады.

Егер $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз болмаса, онда бұл нүкте $f(x)$ функциясының үзіліс нүктесі деп аталады.

Үзіліс нүктесінің екі түрі бар.

Егер $f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде оң жақ және сол жақ шектері бар болып, бірақ олар өзара тең болмаса, онда x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының бірінші түрлі үзіліс нүктесі деп аталады.

Егер оң жақ және сол жақ шектердің ең болмағанда біреуі не шексіздікке тең болып, не жоқ болса, онда x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының екінші түрлі үзіліс нүктесі деп аталады. Мысалы, $x_0 = 0$ нүктесі 7.8а-суреттегі функцияның бірінші түрлі үзіліс нүктесі, ал 7.8а-суреттегі функцияның екінші түрлі үзіліс нүктесі болады. Бірінші түрлі үзіліс нүктелеріне жөнделетін үзіліс нүктелері де жатады.

Егер $x = x_0$ нүктесінде ақырлы оң жақ және сол жақ шектер бар болып, бірақ олар осы нүктедегі функцияның мәніне тең болмаса, онда x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының түзелетін үзіліс нүктесі деп аталады. 7.8б-суреттегі $x_0 = 0$ нүктесі берілген функцияның түзелетін үзіліс нүктесі болады.

Нүктеде үзіліссіз функцияның қасиеттері.

1. Егер x_0 нүктесінде $f(x)$ және $\varphi(x)$ функциялары үзіліссіз болса, онда осы нүктеде $f(x) + \varphi(x)$, $f(x) \cdot \varphi(x)$ және $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ($\varphi(x_0) \neq 0$ болған жағдайда) функциялары да үзіліссіз болады.

Бұл тұжырымның дәлелдеуі функцияның үзіліссіздігінің анықтамасы мен функция шектерінің сәйкес қасиеттерінен шығады (7.4-тақырыпты қараңыз).

2. Егер $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз және $f(x_0) > 0$ болса, онда $f(x) > 0$ теңсіздігі орындалатын x_0 нүктесінің бір маңайы табылады.

Тұжырымның дұрыстығын былай түсіндіруге болады.

Үзіліссіздіктің екінші анықтамасы бойынша аргументтің кіші өсімшесіне ($\Delta x \rightarrow 0$) функцияның кіші өсімшесі ($\Delta y \rightarrow 0$) сәйкес келеді. Сондықтан Δy өсімшесін $y = f(x)$ функциясының $(x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x)$ аралығындағы таңбасы өзгермейтіндей етіп тандап алуға болады.

3. Егер $y = f(u)$ функциясы u_0 нүктесінде, ал $u = \varphi(x)$ функциясы x_0 ($u_0 = \varphi(x_0)$) нүктесінде үзіліссіз болса, онда $y = f(\varphi(x))$ күрделі функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз болады.

Тұжырымды былай дәлелдейміз. Үзіліссіздіктің екінші анықтамасы бойынша $\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta u \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta y \rightarrow 0$.

3-қасиетті $\lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)\right)$ түрінде жазуға болады.

Енді функцияның аралықтағы үзіліссіздігін қараймыз. Аралық ретінде сегментті немесе интервалды қарауға болады.

$y = f(x)$ функциясы X аралығының кез келген нүктесінде үзіліссіз болса, онда ол X аралығында үзіліссіз дейді.

Барлық элементар функциялардың өздерінің сәйкес анықталу облыстарында үзіліссіз екендіктерін дәлелдеуге болады.

7.7-мысал. $y = \sin x$ функциясының үзіліссіздігін дәлелдеңіз.

Шешуі. Функцияның нүктеде үзіліссіздігінің екінші анықтамасын қолданамыз:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\sin(x + \Delta x) - \sin x) = 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \frac{2x + \Delta x}{2} = 0$$

Сонымен, екінші анықтама бойынша $y = \sin x$ функциясы сан осінің кез келген x нүктесінде үзіліссіз.

Ескерту. Функцияның анықталу облысындағы үзіліссіздігі тек элементар функциялар үшін ғана міндетті түрде орындалады. Мысал ретінде $f(x) = [x]$ элементар емес функциясын қарастыралық. Мұндағы $[x]$ — x санының бүтін бөлігі.

$[2,4] = 2$, $[-3,6] = -3$. $x = \frac{3}{2}$ нүктесінде функция үзіліссіз, өйткені

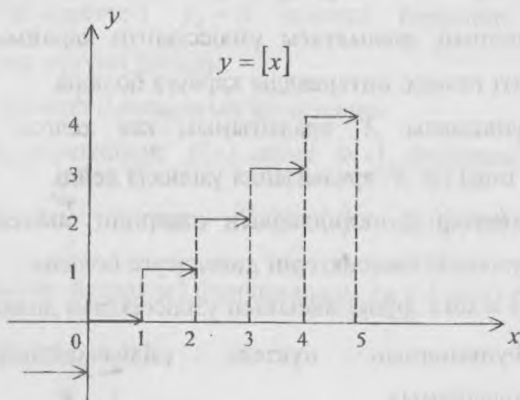
$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 1$, ал $x = 1$ нүктесінде функция анықталған.

$f(1) = 1$, бірақ үзіліссіз емес, өйткені $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ шегі жоқ (бұл нүктеде

оң жақ және сол жақ шектер бар: $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 1$, бірақ

олар өзара тең емес).

Сонымен $f(x) = [x]$ функциясы элементар функция болмағандықтан сан осінің барлық нүктесінде анықталса да (7.10-суретін қара) барлық бүтін сандарды көрсететін нүктелерде үзіліссіз.



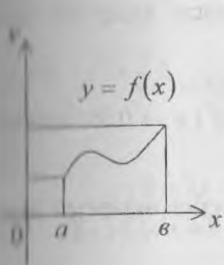
7.10-сурет

Кесіндіде (сегментте) үзіліссіз функциялардың қасиеттері.

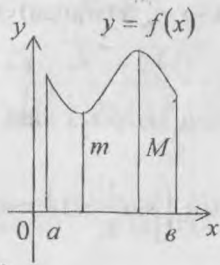
1. Егер $y = f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда ол осы кесіндіде ақырлы (шенелген). (7.11-суретті қара).

2. Егер $y = f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда ол осы кесіндіде өзінің ең кіші m және ең үлкен M мәндерін қабылдайды (7.12-сурет). (Вейерштрасс теоремасы).

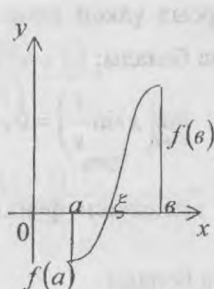
3. Егер $y = f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз және



7.11-сурет



7.12-сурет



7.13-сурет

оның кесіндінің ұштарындағы мәндерінің ($f(a)$ мен $f(b)$) таңбалары әр түрлі болса, онда $f(\xi) = 0$ теңдігі орындалатын $[a, b]$ кесіндісінің ең болмағанда бір ξ нүктесі бар (Больцано-Коши теоремасы). (7.13-сурет).

7.7. Шектермен байланысты кейбір есептердің шығару жолдары

7.8 -мысал. Шектерді табыңыз:

а) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x+3}{x-4}$; б) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x+7}{x-4}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 3x}{x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{1}{x} \right)$.

ә) $x \rightarrow \infty$ болғанда $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ түріндегі анықталмағандық шығады, анықталмағандықты ашу үшін бөлшектің алымы мен бөлімін бөлеміз:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \cos x}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{\cos x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = \frac{3 + 0}{1 + 0} = 3.$$

б) $x \rightarrow +\infty$ болғанда $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ түріндегі анықталмағандық шығады.

Оны ашу үшін бөлшектің алымы мен бөлімін 5^x -ке бөлеміз, шекке көшеміз:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{x+1} + 5^{x+2}}{2^x + 5^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\left(\frac{2}{5}\right)^x + 25}{\left(\frac{2}{5}\right)^x + 1} = \frac{2 \cdot 0 + 25}{0 + 1} = 25.$$

$x \rightarrow -\infty$ болғанда $\left(\frac{0}{0}\right)$ түріндегі анықталмағандық шығады. Оны ашу үшін бөлшектің алымы мен бөлімін 3^x -ке бөлеміз де шекке көшеміз:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^{x+1} + 5^{x+2}}{2^x + 5^x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + 25\left(\frac{5}{2}\right)^x}{1 + \left(\frac{5}{2}\right)^x} = 2.$$

7.11-мысал. Шектерді есептеңіз:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 - 2})$; ә) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3} + x)$.

а) $(\infty - \infty)$ түріндегі анықталмағандықты ашу үшін өрнекті өзінің түйіндесіне көбейтіп, бөлеміз:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 - 2}) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 - 2})(\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 - 2})}{\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 - 2}}.$$

$$(\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 - 2}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2 - x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 - 2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{x^2 - 2}} =$$

$$\frac{4}{\infty} = 0.$$

в) алдыңғы шек сияқты:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3} + x) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3} + x)(\sqrt{x^2 + 3} - x)}{(\sqrt{x^2 + 3} - x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3 - x^2}{(\sqrt{x^2 + 3} - x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{(\sqrt{x^2 + 3} - x)} = 0.$$

§ 12-мысал. Шектерді табыңыз:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^4}{\sin^3 x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \lg \frac{\pi x}{2}$.

(Немәлі)

$$а) \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = (\infty \cdot 0) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0} \right) = \left| \frac{1}{x} = y, \quad x \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow 0 \right| =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1;$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \frac{3}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{\sin 4x}{4x} = \frac{3}{4};$$

Шешуі. а) Функция $x=5$ нүктесінде үсіліссіз болғандықтан, берілген шек функцияның $x=5$ нүктесіндегі мәніне тең:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x+3}{x-4} = \frac{5+3}{5-4} = 8;$$

ә) $x \rightarrow 4$ болғанда қатынастың алымы $2 \cdot 4 + 7 = 15$ санына, ал бөлімі нольге ұмтылады. Сондықтан берілген шек ақырсыз үлкен шама болады: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x+7}{x-4} = \infty$;

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 3x}{x} = 0$, өйткені шенелеген функцияның $(|\sin 3x| \leq 1)$ ақырсыз үлкен шамаға ($x \rightarrow \infty$ болғанда) қатынасы ақырсыз кіші шама болады;

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = 0$, өйткені ақырсыз кіші шама ($x \rightarrow 0$ болғанда)

мен шенелеген функцияның $\left(\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1 \right)$ көбейтіндісі ақырсыз кіші шама болады.

Қарастырылған мысалдарда шектер не ақырлы сан не ∞ түрінде бірден табылды. Бірақ көптеген шектерді есептеуде $\left(\frac{0}{0} \right), \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$ түріндегі анықталмағандықтар кездеседі. Математикалық анализде $(\infty - \infty)$, $(0 \cdot \infty)$, (1^∞) , (∞^0) , (0^0) түрлеріндегідей де анықталмағандықтар қарастырылады.

7.9. мысал. Шектерді есептеңіз:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{(x-2)^2}; \quad \text{ә) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - \sqrt{7x+2}}{x^2 - 1}.$$

Шешуі. а) $\left(\frac{0}{0} \right)$ түріндегі анықталмағандықты ашу үшін алымды

көбейткіштерге жіктейміз де, бөлшектің алымы мен бөлімін $x - 2$ -ге қысқартамыз (қысқартуға болады, өйткені $x \rightarrow 2$ болғанда $x - 2$ нөлге ұмтылады, бірақ нөлге тең емес):

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{(x - 2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 2)}{(x - 2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x + 1}{x - 2} = \infty;$$

б) $\left(\frac{0}{0}\right)$ түріндегі анықталмағандықты ашу үшін бөлшектің алымы

мен бөлімін алымының түйіндесіне ($\sqrt{x+8} + \sqrt{7x+2}$ өрнегіне) көбейтеміз:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - \sqrt{7x+2}}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+8} - \sqrt{7x+2})(\sqrt{x+8} + \sqrt{7x+2})}{(x^2 - 1)(\sqrt{x+8} + \sqrt{7x+2})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 8 - 7x - 2}{(x - 1)(x + 1)(\sqrt{x+8} + \sqrt{7x+2})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-6(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)(\sqrt{x+8} + \sqrt{7x+2})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-6}{(x + 1)(\sqrt{x+8} + \sqrt{7x+2})} = \frac{-6}{2(3 + 3)} = -\frac{1}{2}$$

7.10-мысал. Шектерді есептеңіз:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3}{3x^3 + x^2 + 2}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \cos x}{x + \sin x}$; в) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2^{x+1} + 5^{x+2}}{2^x + 5^x}$.

Шешуі. а) $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ түріндегі анықталмағандықты ашу үшін

бөлшектің алымы мен бөлімін x -тің ең үлкен дәрежесі x^3 -ке бөлеміз:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3}{3x^3 + x^2 + 2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{x} + \frac{3}{x^3}}{3 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}} = \frac{0 + 0}{3 + 0 + 0} = 0;$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^4}{\sin^3 x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \frac{\sin x^4}{x^4} : \left(\frac{\sin x}{x} \right)^3 \right) = 0 \cdot 1 : 1 = 0;$$

в) $x \rightarrow 1$ болғанда $(0 \cdot \infty)$ түріндегі анықталмағандық шығады
 $1 - x = y$ түрлендіруін жасаймыз, сонда $x = 1 - y$ және $x \rightarrow 1$
 $\Rightarrow y \rightarrow 0$. Сонымен

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = (0 \cdot \infty) = \lim_{y \rightarrow 0} y \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi y}{2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} y \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi y}{2} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\cos \frac{\pi y}{2} : \frac{\sin \frac{\pi y}{2}}{y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \cos \frac{\pi y}{2} : \left[\frac{\pi}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi y}{2}}{\frac{\pi y}{2}} \right] = 1 : \left(\frac{\pi}{2} \cdot 1 \right) = \frac{2}{\pi}.$$

7.13-мысал. Шектерді табыңыз:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^x; \quad \text{ә) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x(\ln(1+x) - \ln x)); \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 3} \right)^{x^2 - 4}.$$

Шешуі. а) Шек (1^∞) түріндегі анықталмағандықты береді. Мұндай анықталмағандықты $x \rightarrow \infty$ болғанда негізі бірге ұмтылатын, ал дәрежесі шексізге ұмтылатын функция ретінде түсінеді. Екінші тамаша шекті пайдалану үшін өрнекте $\frac{2}{x} = y$ түрлендіруін енгіземіз:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^x = \left| \frac{2}{x} = y, \quad x = \frac{2}{y}, \quad x \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow 0 \right| = \lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y} \cdot 2} = e^2$$

$$\text{ә) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x(\ln(1+x) - \ln x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \ln \frac{1+x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \ln e = 1$$

$$\begin{aligned}
 \text{III } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 3} \right)^{x^2 - 4} &= (1^\infty) = (\text{негізде алымын бөліміне бөлеміз}) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x^2 - 3} \right)^{x^2 - 4} = (\text{шектердің қасиеттерін қолданамыз}) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x^2 - 3} \right)^{x^2 - 3} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x^2 - 3} \right)^{-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x^2 - 3} \right)^{x^2 - 3} = \\
 &= \left| \frac{y^2 - 3}{4} = y, x \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow \infty \right| = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^y = e^4.
 \end{aligned}$$

14-мысал. Берілген функцияның X нүктесіндегі үзіліссіздігін немесе осы нүктенің берілген функция үшін қандай түрлі үзіліс түрлері болатындығын анықта:

$$\text{а) } y = \frac{\sin x}{x}; \quad \text{б) } y = \frac{1}{1 + 3^x}; \quad \text{в) } y = 3^{\frac{1}{x}}.$$

Шешуі. а) Функция $x = 0$ нүктесінде анықталмаған, сондықтан ол осы нүктеде үзіліссіз емес. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ болғандықтан $x = 0$ нүктесіндегі функцияның оң жақ және сол жақ шектері бар, олар біріге тең. Демек, $x = 0$ — түзелетін үзіліс нүктесі.

а) Функция $x = 0$ нүктесінде үзіліссіз, өйткені $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$;

б) $x = 0$ нүктесінде функция анықталмаған.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{1 + 3^x} = \frac{1}{1 + 0} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{1 + 3^{\frac{1}{x}}} = 0$$

(өйткені $x \rightarrow 0+ \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow \infty$)

Сонымен функцияның ақырлы оң жақ және сол жақ шектері бар. Сондықтан $x = 0$ нүктесі берілген функция үшін бірінші түрлі үзіліс нүктесі болады.

в) $x = 0$ нүктесінде функция анықталмаған:

$$\lim_{x \rightarrow 0-} 3^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} 3^x = \infty.$$

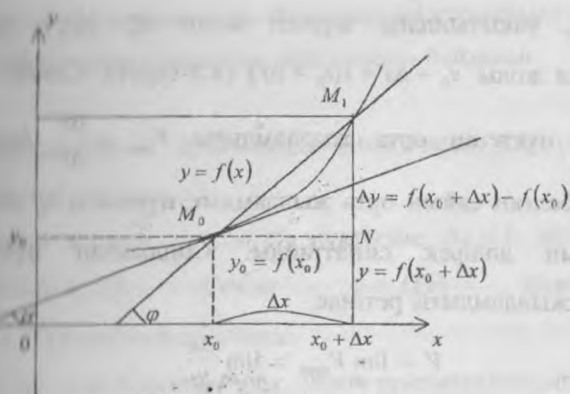
Сондықтан $x = 0$ нүктесі берілген функция үшін екінші түрлі үзіліс нүктесі болады.

СЕГІЗІНШІ ТАРАУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ЕСЕПТЕУЛЕР

8.1. Туынды ұғымына келтіретін есептер

1. *Жанама туралы есеп.* Оху жазықтығында $y = f(x)$ үзіліссіз қисығы берілсін. Қисықтың бойында жатқан $M_0(x_0, y_0)$ нүктесі арқылы өтетін қисыққа жүргізілген жанаманың теңдеуін табу керек (8.1-сурет). Аргументтің x_0 мәніне Δx өсімшесін береміз де қисықтың бойымен $M_0(x_0, f(x_0))$ нүктесінен $M_1(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ нүктесіне көшеміз. Осы екі нүкте арқылы M_0M_1 қиюшы түзуін жүргіземіз (8.1-сурет).

$y = f(x)$ қисығына M_0 нүктесінде жүргізілген жанама ретінде $\Delta x \rightarrow 0$ болғанда (Δx нөлге ұмтылғанда), яғни M_1 нүктесі қисықтың бойымен M_0 нүктесіне ұмтылғанда M_0M_1 қиюшы түзуінің ұмтылатын шектік түзуін аламыз. M_0 нүктесінен өтетін түзудің теңдеуі:



8.1-сурет

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

Белгілі. Қиюшы түзуінің бұрыштық коэффициенті (8.1-сурет бойынша)

$$K_{M_0 M_1} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

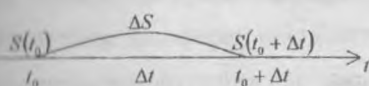
формуласымен табылады.

Егер болса

$$K = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} K_{M_0 M_1} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (8.1)$$

формуласымен жанама түзудің бұрыштық коэффициенті табылады.

Қозғалыс жылдамдығы туралы есеп. Бір түзудің бойымен $s(t)$ заңы бойынша материалдық нүкте қозғалатын болсын. Мұндағы s —нүктенің жүріп өтетін жолының ұзындығы, ал t —



8.2-сурет

уақыты. Материалдық нүктенің t_0 мезгіліндегі жылдамдығын табу керек. Заңдылық бойынша

нүктенің t_0 уақытындағы жүрген жолы $s_0 = s(t_0)$, ал $t_0 + \Delta t$ уақытындағы жолы $s_0 + \Delta s = s(t_0 + \Delta t)$ (8.2-сурет). Сонда Δt уақыт мезгіліндегі нүктенің орта жылдамдығы $V_{opt} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ болады. Δt шамасы аз болған сайын орта жылдамдық нүктенің t_0 мезгіліндегі жылдамдығын дәлірек сипаттайды. Сондықтан нүктенің t_0 мезгіліндегі жылдамдығы ретінде

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} V_{opt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (8.2)$$

шегі алынады.

2. Еңбек өнімділігі туралы есеп. $u = u(t)$ функциясы t уақыт мөлшеріндегі өндірілген өнімнің саны u -ды көрсететін болсын. t_0 мезгіліндегі еңбек өнімділігін табу керек. t_0 уақытынан $t_0 + \Delta t$ уақытына дейін өндірілген өнімнің саны $u_0 = u(t_0)$ мәнінен $u_0 + \Delta u = u(t_0 + \Delta t)$ мәніне дейін өседі. Сондықтан осы уақыт ішінде орта еңбек өнімділігі $z_{cp} = \frac{\Delta u}{\Delta t}$ болады. Демек, t_0 уақыт мерзіміндегі еңбек өнімділігін

$$z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} z_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} \quad (8.3)$$

формуласымен анықтаған жөн.

Сонымен үш түрлі есепті қарай отырып біз бір-біріне ұқсас (8.1) - (8.3) шектерін алып отырмыз. Бұл шектер дифференциалдық есептеулердің негізі бола отырып, математикалық анализде өте маңызды орынға ие болады.

§ 3. Туындының анықтамасы. Функцияның үзіліссіздігі мен дифференциалдануының арасындағы байланыс

$y = f(x)$ функциясы X аралығында анықталсын (X —сегмент, аралық, жартылай сегмент,...).

X аралығында жатқан x ($x \in X$) нүктесіне $\Delta x \neq 0$ өсімшесін таңдап ($x + \Delta x \in X$). Сонда $y = f(x)$ функциясы

$y = f(x + \Delta x) - f(x)$ өсімшесін алады.

Анықтама. $\Delta x \rightarrow 0$ болғанда (Δx нөлге ұмтылғанда) функцияның аргумент өсімшесіне қатынасының шегі

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

болса, онда ол $y = f(x)$ функциясының x нүктесіндегі туындысы деп аталады.

$y = f(x)$ функциясының туындысын $f'(x)$ (немесе y') белгілеміз.

Еңімен анықтама бойынша

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Туындыны y' , $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$ таңбаларының кез келгенімен

Функцияның туындысын табуды оны дифференциалдау дейді.

Егер функцияның x нүктесінде ақырлы туындысы бар болса, онда ол осы нүктеде дифференциалданады дейді. X аралығының ішкі нүктелерінде дифференциалданатын функция осы аралықта дифференциалданатын функция деп аталады.

Жаңама туралы есептен туындының геометриялық мағынасы келесі: $k = f'(x_0)$, яғни $f'(x_0)$ туындысы $y = f(x)$ қисығына x_0

нүктесінде жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициенті беріледі.

Сондықтан $y = f(x)$ қисығына x_0 нүктесінде жүргізілген жанаманың теңдеуі

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

түрінде жазылады.

Қозғалыс жылдамдығы туралы есептен туындының механикалық мағынасы шығады: $v(t_0) = s'(t_0)$, яғни t_0 нүктесіндегі жолдың уақыт бойынша туындысы нүктенің t_0 мезгіліндегі жылдамдығын береді.

Еңбек өнімділігі туралы есептен өндірілген өнім көлемінің уақыт бойынша туындысы $u'(t_0)$ t_0 уақыт мезгіліндегі өнімділікке тең екендігі шығады.

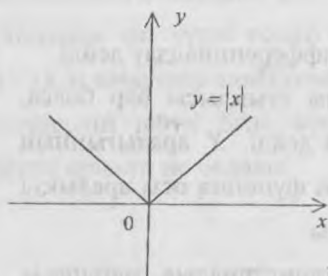
8.1-мысал. $y = |x|$ функциясының $x = 0$ нүктесінде дифференциалданбайтындығын көрсетіңіз.

Шешуі. Туындының анықтамасы бойынша

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x}.$$

Сондықтан

$$y'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \text{егер } \Delta x > 0, \\ -1, & \text{егер } \Delta x < 0 \end{cases}$$



8.3-сурет

Олай болса $y = |x|$ функциясының $x = 0$ нүктесінде туындысы жоқ, өйткені шек бар болса, ол тек біреу болуы керек. Бұл функцияның оң жақ және сол жақ туындылары бар, бірақ олар өзара тең емес. $y = |x|$ қисығына $x = 0$ нүктесінде жанама

үзінуге болмайды. (8.3-суретті қараңыз).

Функцияның үзіліссіздігі мен дифференциалдануының арасындағы байланыс.

Теорема. Егер $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде дифференциалданатын болса, онда ол осы нүктеде үзіліссіз.

Дәлелдеуі. Функция x_0 нүктесінде дифференциалданатын, яғни оның акырлы $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$ шегі бар болсын. Мұнда $f'(x_0) \cdot \Delta x$ - Δx -ке тәуелсіз тұрақты шама. Сондықтан 7.1-теорема бойынша

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x) \quad \text{немесе}$$

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x \quad (8.4)$$

теңдіктері орындалады. Мұнда $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x \rightarrow 0$ болғанда акырсыз кіші шама.

(8.4) формуласынан $\Delta x \rightarrow 0$ болғанда $\Delta y \rightarrow 0$ болатындығын көреміз. Олай болса үзіліссіздіктің екінші анықтамасы бойынша $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз.

Кері тұжырым жалпы жағдайда дұрыс емес, яғни функцияның нүктеде үзіліссіздігінен әр уақытта оның осы нүктеде дифференциалдануы шықпайды. Мысалы, $y = |x|$ функциясы $x = 0$ нүктесінде үзіліссіз болғанымен $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = |0| = 0$, ол осы нүктеде дифференциалданбайды (8.1-мысал).

Сонымен функцияның үзіліссіздігі оның дифференциалдануына тек қажетті шарт, бірақ жеткілікті шарт болмайды.

Математиканың кең курстарында бірде бір нүктеде дифференциалданбайтын функциялар келтірілген.

8.3. Дифференциалдаудың негізгі ережелері

1. Тұрақты шаманың туындысы нөлге тең, яғни

$$C' = 0 \quad (8.6)$$

2. Екі дифференциалданатын функцияның қосындысының туындысы олардың туындыларының қосындысына тең, яғни

$$(u + v)' = u' + v' \quad (8.6)$$

3. Екі дифференциалданатын функцияның көбейтіндісінің туындысы бірінші функцияның туындысын екінші функцияға, ал екінші функцияның туындысын бірінші функцияға көбейтіп шыққан нәтижелерді бір-біріне қосқанға тең, яғни

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad (8.7)$$

- 1-салдар.* Тұрақты көбейткішті туынды таңбасының алдына шығаруға болады, яғни

$$(Cu)' = Cu' \quad (8.8)$$

3. Екі дифференциалданатын функциялардың қатынасының туындысын

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \quad (8.9)$$

формуласымен анықтайды.

Мысал ретінде үшінші ережені дәлелдейік.

$u = u(x)$ және $v = v(x)$ — дифференциалданатын функциялар болсын. x аргументіне Δx өсімшесін беріп, $y = u(x) \cdot v(x)$ өсімшесін есептейік:

$$y(x + \Delta x) - y(x) = u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x) =$$

$$u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x) =$$

$$[u(x + \Delta x) - u(x)]v(x + \Delta x) + u(x) \cdot (v(x + \Delta x) - v(x)).$$

Осы формуладан $\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x)$, $\Delta v = v(x + \Delta x) - v(x)$

болғандықтан,

$$\Delta y = \Delta u \cdot (v(x) + \Delta v) + u(x) \cdot \Delta v = v(x) \cdot \Delta u + u(x) \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v$$

формуласы шығады.

Осы теңдікті Δx -ке бөліп, $\Delta x \rightarrow 0$ болғанда шекке көшеміз

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = v(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x.$$

Сондықтан туындының анықтамасы бойынша

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v' + u' \cdot v' \cdot 0 \quad \text{немесе} \quad (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

8.2-мысал. Берілген функцияның туындысын және оның $x = 4$ нүктесіндегі мәнін тап.

$$a) y = x^2(\sqrt{x} + 2); \quad б) y = 10(x^3 - 2); \quad в) y = \frac{x^4 + 2}{\sqrt{x}};$$

Шешуі. а) (8.7), (8.6) және (8.5) формулалары бойынша

$$y' = (x^2)'(\sqrt{x} + 2) + x^2(\sqrt{x} + 2)' = 2x(\sqrt{x} + 2) + x^2 \left(\left(\frac{1}{x^2} \right)' + (2)' \right) =$$

$$= 2x(\sqrt{x} + 2) + x^2 \left(\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + 0 \right) = 2x(\sqrt{x} + 2) + \frac{x^2}{2\sqrt{x}}, \quad y'(4) = 36.$$

б) (8.8) формуласы бойынша тұрақты шаманы туындының алдына шығарамыз

$$y' = 10(x^3 - 2)' = 10((x^3)' - (2)') = 30x^2, \quad y'(4) = 30 \cdot 16 = 480;$$

б) (8.9) формуласы бойынша

$$y' = \frac{(x^4 + 2)' \sqrt{x} - (x^4 + 2)(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = \frac{4x^3 \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^4 + 2)}{x} = 4x^2 \sqrt{x} - \frac{x^4 + 2}{2x}$$

$$y'(4) = 4 \cdot 4^2 \cdot 2 - \frac{4^4 + 2}{2 \cdot 2 \cdot 4} = 128 - 16 \frac{1}{8} = 111 \frac{7}{8}.$$

8.4. Күрделі және кері функцияларды дифференциалдау

y айнамалысы u -ға тәуелді (яғни $y = f(u)$), ал u айнамалысы x -ке тәуелді (яғни $u = \varphi(x)$) функциялар болсын. Енді $y = f(\varphi(x))$ күрделі функциясын қарастырамыз.

Теорема. Егер $y = f(u)$ және $u = \varphi(x)$ функциялары аргументтерінің дифференциалданатын функциялары болса, онда $y = f(\varphi(x))$ күрделі функциясының x бойынша туындысы бар және ол

$$y' = f'(u) \cdot u' \quad \left(y' = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} \right) \quad (8.10)$$

теңдігімен анықталады.

Дәлелдеуі. x -ке $\Delta x \neq 0$ өсімшесін береміз. Сонда $u = \varphi(x)$ және $y = f(u)$ функциялары Δu және Δy сәйкес өсімшелерін қабылдайды. $\Delta u \neq 0$ болсын. $y = f(u)$ функциясы дифференциалданатын болғандықтан

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u)$$

Сондықтан 7.1-теорема бойынша

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u) + \alpha(\Delta u),$$

қалдығы $\alpha(\Delta u) \cdot \Delta u \rightarrow 0$ болғанда ақырсыз кіші шама), яғни

$$\Delta y = f'(u) \cdot \Delta u + \alpha(\Delta u) \cdot \Delta u \quad (8.11)$$

(8.11) формуласының екі жағын $\Delta x \neq 0$ шамасына бөліп $\Delta x \rightarrow 0$ шекке көшеміз. Сонда $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta u) = 0$, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u \rightarrow 0$ ($u = \varphi(x)$)

дифференциалданатын функция $\Rightarrow$ үзіліссіз), $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x)$

болғандықтан (8.10) теңдігі шығады.

Есеп. Берілген функциялардың туындысын табыңыз:

$$a) \quad y = (\sqrt{x} + x)^4; \quad \text{б)} \quad y = \frac{10}{x^2 + x + 3}.$$

Шешуі. а) Функцияны $y = u^4$, $u = \sqrt{x} + 3$ түрінде жазайық (8.10) формуласы бойынша

$$y' = (u^4)' \cdot u' = 4u^3 \cdot (\sqrt{x} + x)' = 4(\sqrt{x} + x)^3 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1 \right);$$

$$б) \quad y = \frac{10}{u}, \quad u = x^2 + x + 3 \text{ болғандықтан}$$

$$y' = -\frac{10}{u^2} \cdot (x^2 + x + 3)' = -\frac{10(2x + 1)}{(x^2 + x + 3)^2}.$$

Енді кері функцияның туындысына көшейік.

$y = f(x)$ функциясы X аралығында дифференциалданатын және монотонды функция (яғни өспелі немесе кемімелі) болсын.

Егер y айнымалысын аргумент, ал x -ты функция ретінде қарайтын болсақ, онда $x = \varphi(y)$ функциясы $y = f(x)$ функциясына кері функция болады (6.4-пунктің қара) және ол Y аралығында үзінсіз.

Теорема. Туындысы нөлге тең емес дифференциалданатын функцияның кері функциясы да дифференциалданады және оның туындысы

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} \quad (8.10)$$

теңдігімен анықталады.

Дәлелдеуі. $\Delta y \neq 0$ — y айнымалысының өсімшесі, ал $\Delta x = \varphi(y)$ функциясының сәйкес өсімшесі болсын.

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

теңдігінде $\Delta y \rightarrow 0$ болғанда шекке көпсек, онда (8.11) формуласы шығады. Өйткені кері функцияның үзіліссіздігінен: $\Delta y \rightarrow 0$ болса, $\Delta x \rightarrow 0$.

8.5. Негізгі элементар функциялардың туындылары.

Жоғары ретті туындылар ұғымы

Логорифмдік функцияның туындысы. а) $y = \ln x$. Анықтама бойынша

$$\begin{aligned} (\ln x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} (\ln(x + \Delta x) - \ln x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \ln \frac{x + \Delta x}{x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) = \left| \frac{\Delta x}{x} = y, \Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0 \right| = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{xy} \ln(1 + y) = \frac{1}{x} \lim_{y \rightarrow 0} \ln(1 + y)^{\frac{1}{y}} = \end{aligned}$$

(логорифмдік функция үзіліссіз болғандықтан)

$$= \frac{1}{x} \ln \left(\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} \right) = (7.5 - \text{мысал}) = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$a) y = \log_a x. \quad (\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{\ln a} (\ln x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad \text{яғни}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad \text{және} \quad (\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}.$$

Көрсеткіштік функцияның туындысы. а) $y = e^x$. Теңдіктің екі

жағын e негізі бойынша логарифмдейік: $\ln y = x$. Енді теңдіктің екі

жағын x бойынша дифференциалдайық $(\ln y)' = 1$. Сондықтан

яғни

$$(e^x)' = e^x \quad \text{және} \quad (e^u)' = e^u \cdot u' \quad (8.12)$$

$$b) y = a^x, \quad y' = (a^x)' = \left((e^{\ln a})^x \right)' = ((8.10) \text{ формуласы бойынша}) =$$

$$= e^{x \ln a} \cdot (x \ln a)' = a^x \cdot \ln a$$

Сонымен

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad (a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u' \quad (8.13)$$

Дәрежелік функцияның туындысы. $y = x^n$. Осы теңдіктен

$\ln y = n \ln x$. Теңдіктің екі жағын дифференциалдайық $\frac{y'}{y} = \frac{n}{x}$. Олай

$$y' = ny \cdot \frac{1}{x} = nx^n \cdot \frac{1}{x} = nx^{n-1},$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad (u^n)' = nu^{n-1} \cdot u' \quad (8.14)$$

Дәрежелік-көрсеткіштік функцияның туындысы. $y = f(x)^{\varphi(x)}$ функциясын қарастырайық. Сонда

$$\ln y = \varphi(x) \cdot \ln f(x), \quad \frac{y'}{y} = (\varphi(x) \cdot \ln f(x))' = \varphi'(x) \ln f(x) + \varphi(x) \frac{f'(x)}{f(x)}$$

яғни $\left((f(x))^{\varphi(x)} \right)' = f(x)^{\varphi(x)} \left(\varphi'(x) \ln f(x) + \varphi(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right).$

Ескерту. Логарифмдік функцияның туындысы $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$ логарифмдік туынды деп аталады. Ол кейде функция өзгеруінің салыстырмалы жылдамдығы немесе функция өзгеруінің қарқыны деп аталады.

Тригонометриялық функциялардың туындылары. а) $y = \sin x$ Анықтама бойынша

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x; \end{aligned}$$

Соңғы теңдіктерде бірінші тамаша шек пен $\cos x$ функциясының үзіліссіздігін пайдаландық.

Сонымен

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\sin u)' = u' \cdot \cos u. \quad (8.15)$$

ә) $y = \cos x.$

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad (\cos u)' = -u' \cdot \sin u \quad (8.16)$$

Дәлелдеуі (8.15) формуласынікі сияқты.

б) $y = \operatorname{tg} x.$

$$y' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\operatorname{tgu})' = \frac{u'}{\cos^2 u} \quad (8.17)$$

Осы формула сияқты

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad (\operatorname{ctgu})' = -\frac{u'}{\sin^2 u} \quad (8.18)$$

$$b) \ y = \arcsin x, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

Берілген аралықта функция қатаң монотонды, яғни оның кері функциясы бар:

$$x = \sin y, \quad x'_y = \cos y \neq 0, \quad \text{егер} \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}. \quad (8.11) \text{ формуласын}$$

қолданамыз

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

8.11) болғанда туынды анықталмайды.

Сонымен

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad (\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}} \quad (8.19)$$

Осы формула сияқты

г)

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad (\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}} \quad (8.20)$$

формулалары дәлелденіледі.

Жоғары ретті туындылар.

Дифференциалданатын $f(x)$ функциясының туындысы $f'(x)$

оның бірінші ретті туындысы деп аталады. $f'(x)$ -тың өзі функция

болғандықтан оның туындысы бар болуы мүмкін. Ол туынды $f(x)$ функциясының 2-ретті туындысы деп атаймыз. Жалпы жағдайда $(n-1)$ ретті туындының туындысын n -і ретті туынды деп атайды.

Екінші ретті туынды $f''(x)$ белгісімен, ал жалпы жағдайда n -і ретті туынды $f^{(n)}(x)$ белгісімен жазылады. Жолдың бірінші ретті туындысы жылдамдық болса, ал екінші ретті туындысы үдеу болады.

8.4-мысал. $y = \ln x$ функциясының n -і ретке дейінгі барлық туындыларын табыңыз.

Шешуі. $y' = \frac{1}{x}, \quad y'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad y''' = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3},$

$$y^{(4)} = \left(\frac{2}{x^3}\right)' = -\frac{2 \cdot 3}{x^4}, \quad \dots, \quad y^{(n)} = -\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

8.6. Туындының экономикалық мағынасы. Туынды ұғымын экономикада қолдану

8.1-пунктте өндірілген өнім мөлшерінен уақыт бойынша туындының еңбек өнімділігін беретінін көрдік. Енді туындының экономикалық мағынасын көрсететін тағы бір ұғымды береміз.

Өндіріс шығындарын өндірілетін өнімнің мөлшері x -ке тәуелді функция ретінде қарастырамыз. Өнімнің өсімі Δx болса, онда өндіріс шығынының өсімшесі Δy , ал өнім бірлігіне жұмсалатын өндіріс шығынының орта өсімшесі $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ болады. Сонда туынды

$\frac{\Delta \pi}{\Delta x}$ — өндірістің шекті шығынын береді және қосымша өнімнің бірлігіне жұмсалатын қосымша шығынды жуықтап анықтайды.

Шекті шығындар өндіріс күші (шығарылатын өнім көлемі) x -ке тәуелді және тұрақты емес тек айнымалы өндіріс шығындарымен (өзіндік, жанармай және т.б.) анықталады. Осы сияқты шекті өнім, шекті пайдалылық, шекті өнімділік және басқа шекті шамаларды қарастыруға болады.

Шекті шамалар экономикалық ұғымдардың өзгеру барысын анықтайды. Туынды қайсыбір экономикалық объектінің басқа бір объектіге қарағанда өзгеру жылдамдығын анықтайды. Кейбір жағдайларда экономикалық көрсеткіштердің үзіліссіз еместігіне қарамастан шекті шамаларды ұтымды пайдалануға болады. Мысал ретінде монополистік және бәсекелік рынок жағдайындағы орта және шекті табыстардың байланысын қараймыз.

Өнімді сатқаннан шыққан жиынтық табысты өнім бірлігінің бағасымен өнім санының көбейтіндісі ретінде анықтауға болады:



8.4-сурет



8.5-сурет

$r = pq$, r — жиынтық табыс, p — өнім бірлігінің бағасы, q — өнім саны.

Монополия жағдайында бір немесе бірнеше фирма белгілі санды өнімді өндіріп, сатады. Осы жағдайдағы өнім ұсынысын, демек өнім бағасын толығымен қадағалайды. Әрине, бағаның өсуіне байланысты өнімге деген сұраныс азайады. Сұраныстың азаюы $p = aq + v$, ($a < 0$, $v > 0$) кемімелі функция арқылы берілісін делік. Мұндағы $p = p(q)$ — өнім саны q -ға тәуелді сұраныс мөлшері. Сонда сатылған өнімнен түсетін жиынтық табыс $r = (aq + v)q = aq^2 + vq$ (8.4-сурет), өнім бірлігінен түсетін орта табыс — $r_{op} = \frac{r}{q} = aq + v$, ал шекті табыс, яғни қосымша өнім бірлігінен түсетін қосымша табыс $-r'_q = 2aq + v$ (8.4-сурет) болады.

Сонымен монополистік рынок жағдайында сатылған өнім саны өскен сайын шекті табыс кемиді. Ол орта табыстың аз жылдамдықпен азаюына соқтырады.

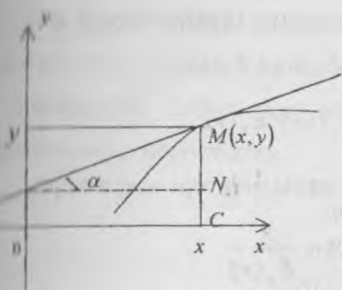
Рынокқа өнім шығаратындар өте көп және жеке фирма бағаның деңгейін қадағалай алмайтын бәсекелік жағдайында сатылатын өнім саны тұрақты, мысалы, $p = v$ болады. Сонда жиынтық табыс $r = vq$, орта табыс $-r_{op} = \frac{r}{q} = v$, ал шекті табыс $-r'_q = v$ болады. (8.5-сурет). Сонымен еркін бәсекелік рынок жағдайында орта және шекті табыстар өзара тең болады.

Экономикалық процесстерді зерттеу үшін көбінесе функцияның икемділік ұғымы қолданылады.

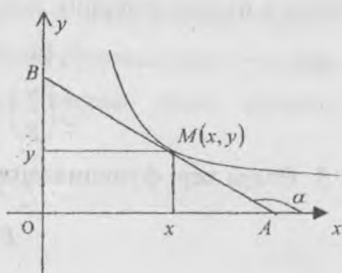
Анықтама. $\Delta x \rightarrow 0$ болғанда y функциясының салыстырмалы өсімшесінің x аргументінің салыстырмалы өсімшесіне қатынасының шегі $E_x(y)$ y функциясының икемділігі деп аталады:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y' \quad (8.21)$$

Функция икемділігінің геометриялық мағынасын қарастыралық.



8.6-сурет



8.7-сурет

(8.31) формуласы бойынша $E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot \operatorname{tg} \alpha$, мұнда $\operatorname{tg} \alpha = M'(x, y)$

нүктесінде $y = y(x)$ қисығына жүргізілген жанаманың көлбеу бұрышы (8.6-суретті қараңыз).

MBN үшбұрышы бойынша $MN = x \operatorname{tg} \alpha$, $MC = y$. MBN мен AMC үшбұрыштары ұқсас болғандықтан $\frac{MN}{MC} = \frac{MB}{MA}$. Сондықтан

$$E_x(y) = \frac{MB}{MA}.$$

Егер A және B нүктелері жанаманың бойында M нүктесінің бір жағында орналасса, онда $E_x(y)$ оң (8.6-сурет), ал екі жағында орналасса—теріс (8.7-сурет) болады.

Функция икемділігінің қасиеттері:

1. Функция икемділігі функция өзгеру қарқыны $T_y = (\ln y)' = \frac{y'}{y}$

пен тәуелсіз айнымалы x -тің көбейтіндісіне тең

$$E_x(y) = x \cdot T_y$$

2. Екі функцияның көбейтіндісінің (қатынасының) икемділігі олардың икемділіктерінің қосындысына (айырымына) тең

$$E_x(u \cdot v) = E_x(u) + E_x(v)$$

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v)$$

3. Өзара кері функциялардың икемділіктері өзара кері:

$$E_x(y) = \frac{1}{E_y(x)}.$$

Функция икемділігі сұраныс пен тұтынуды талдау кезінде қолданылады. Егер $|E_x(y)| > 1$ болса, онда бағамен (немесе табыспен) салыстырғанда сұранысты икемді, ал $|E_x(y)| < 1$ болса – икемсіз дейді.

Егер $|E_x(y)| = 1$ болса, онда сұранысты бірлік икемді дейді.

Мысал ретінде өнімді сату кезінде бағамен салыстырғанда сұраныстың икемділігі жиынтық табыс $r = pq$ -ге қалай әсер ететінін қарастыралық. Сұраныс қисығы $p = p(q)$ – кезкелген функция болсын. Шекті табысты табамыз

$$r'_q = (pq)'_q = p' \cdot q + p \cdot 1 = p(1 + E_q(p))$$

$E_p(q) < 1$ және $E_q(p) = \frac{1}{E_p(q)}$ болғандықтан

$$r'_q = p \left(1 - \frac{1}{|E_p(q)|} \right) \quad (8.22)$$

Егер сұраныс икемсіз, яғни $|E_x(y)| < 1$ болса, онда (8.22) формуласы бойынша шекті табыс r'_q кез келген баға үшін теріс, ал икемді, яғни $|E_x(y)| > 1$ болса – оң болады. Сонымен, икемсіз сұраныс үшін баға мен шекті табыс бір бағытта, ал икемді сұраныс

бір ор түрлі бағытта өзгереді. Бұдан мынандай қортынды жасаймыз: баға өскен сайын икемді сұраныс үшін сатудан түскен табыс өсіп отырады да, ал икемсіз сұраныс үшін — кеміп отырады. 8.4-суретте табыс қисығында икемді және икемсіз сұраныстар аралықтары көрсетілген.

ТОҒЫЗЫНШЫ ТАРАУ ТУЫНДЫНЫҢ ҚОЛДАНЫЛУЫ ЖӘНЕ ФУНКЦИЯНЫҢ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

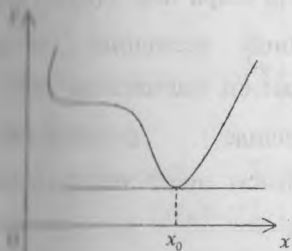
Туынды ұғымы функцияларды зерттеу кезінде, олардың қасиеттерін салуда қолданылады. Туындыны қолдана білу үшін біз дифференциалдық есептеудің бірнеше негізгі теоремаларымен танысуымыз керек.

9.1. Дифференциалдық есептеудің негізгі теоремалары

Ферма теоремасы. Егер X аралығында дифференциалданатын

$y = f(x)$ функциясы осы аралықтың ішінде жатқан бір x_0 нүктесінде өзінің ең үлкен немесе ең кіші мәнін қабылдаса, онда оның туындысы x_0 нүктесінде нөлге тең болады:
$$f'(x_0) = 0.$$

Дәлелдеуі. X аралығында дифференциалданатын $y = f(x)$



9.1-сурет

функциясы $x_0 \in X$ нүктесінде өзінің ең кіші мәнін қабылдайтын болсын (9.1-сурет). Сонда егер $x_0 + \Delta x \in X$ болса, онда $f(x_0 + \Delta x) \geq f(x_0)$. Демек $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \geq 0$. Олай болса $\Delta x > 0$ болғанда $\frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$, ал $\Delta x < 0$ болғанда $\frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$.

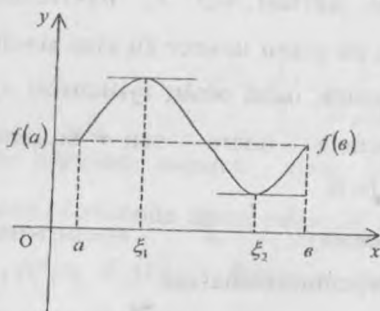
Осы теңсіздіктерде $\Delta x \rightarrow 0+$ және $\Delta x \rightarrow 0-$ болғанда шек алу көшеміз: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$ және $\lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$. Бірақ теореманың шарты бойынша $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде дифференциалданады, яғни $\lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Олай болса $f'(x_0) = 0$. x_0 нүктесінде функцияның ең үлкен мән қабылдайтын жағдай да осылай дәлелденіледі.

Ферма теоремасының геометриялық мағынасы:

Функцияның ең үлкен немесе ең кіші мәнін қабылдайтын нүктеде оның графигіне жүргізілген жанама абсцисса осіне параллель болады.

Роль теоремасы. $y = f(x)$ функциясы үшін мынандай шарттар орындалсын:

- 1) $[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз;
- 2) (a, b) интервалында дифференциалданады;
- 3) кесіндінің шеткі нүктелеріндегі мәндері өзара тең: $f(a) = f(b)$.



9.2-сурет

Сонда кесіндінің ішінде жатқан ең болмағанда бір нүктесінде функцияның туындысы нөлге тең болады: $f'(\xi) = 0$.

Дәлелдеуі. Кесіндіде үзіліссіз функцияның 2-

шарты (Вейерштрасс теоремасы, 7.6 пункт) бойынша $y = f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесіндісінде өзінің ең үлкен M және ең кіші m мәндерін қабылдайды. Егер осы екі мәнді функция шеткі нүктелерде қабылдайтын болса, онда үшінші шарт бойынша $f'(x) = 0$. Олай болса функция $[a, b]$ аралығында тұрақты, демек $f(x) = 0$. Ал егер осы екі мәннің ең болмағанда біреуін функция ішкі нүктеде қабылдайтын болса, онда Ферма теоремасы бойынша бұл нүктеде туынды нөлге тең.

Ролль теоремасының геометриялық мағынасы:

Ішкі нүктелердің ең болмағанда біреуінде функция графигіне жүргізілген жанама абсцисса осіне параллель болады. Бұл нүктеде туындының мәні нөлге тең (9.2-сурет). 9.2-суретте екі нүктеде (ξ_1 және ξ_2) туынды нөлге тең.

Ролль теоремасы Лагранж теоремасының дербес түрі болады.

Лагранж теоремасы. $y = f(x)$ функциясы үшін төмендегі шарттар орындалсын:

- 1) $[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз;
- 2) (a, b) интервалында дифференциалданады.

Сонда

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (9.1)$$

теңдігі орындалатын (a, b) аралығынан ең болмағанда бір ξ нүктесі табылады.

Дәлелдеуі. Теореманы дәлелдеу үшін қосымша

$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ функциясын қарастырамыз. $g(x)$

функциясы Ролль теоремасының барлық шарттарын қанағаттандырады: $[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз, (a, b) аралығында

дифференциалданады және $g(a) = f(a)$, $g(b) = f(b)$. Сондықтан $g'(\xi) = 0$ болатын (a, b) аралығынан ең болмағанда бір ξ нүкте табылады. Олай болса

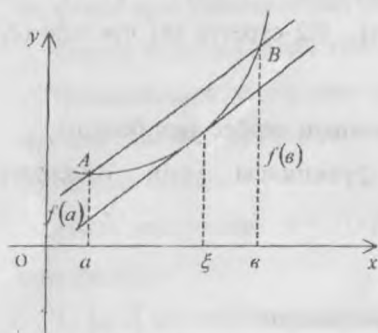
$$g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

(9.1) формуласы

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) \quad (9.2)$$

түрінде жиі қолданылады. (9.2) формуласы Лагранж формуласы деп аталады.

Лагранж теоремасының геометриялық мағынасы: $[a, b]$



9.3-сурет

кесіндісінің ішінен қисыққа жанамасы AB хордасына параллель болатын ең болмағанда бір ξ нүктесі табылады (9.3-сурет).

Салдар. Егер X аралығында функцияның туындысы нөлге тең болса, онда осы аралықта осы функция тұрақты болады.

Дәлелдеуі. X аралығынан $[a, x]$ кесіндісін аламыз. Лагранж теоремасы бойынша $f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a)$, $a < \xi < x$. Шарт бойынша $f'(\xi) = 0$. Сондықтан $f(x) - f(a)$, яғни $f(x) = f(a)$.

9.2. Лопиталь ережесі

Теорема. Екі ақырсыз кіші немесе ақырсыз үлкен шамалардың қатынасының шегі (туындылар бар болған жағдайда) олардың

аңдамаларының қатынастарының шегіне тең болады.

Сонымен, $\left(\frac{0}{0}\right)$ немесе $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ түріндегі анықталмағандықтар бар

және

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (9.3)$$

Дәлелдеуі. Теореманың жалпы жағдайдағы дәлелдеулері жоғары математиканың математикалық анализ курстарында келтірілген. Біз

қазіргі $f(x)$, $g(x)$ функциялары мен олардың туындылары x_0

нүктесінде үзіліссіз болғанда және $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = 0$,

$g(x) - g(x_0) = 0$ теңдіктері орындалған жағдайда дәлелдейік.

Бірінші жағдайда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}.$$

Енді соңғы теңдікте $f(x)$ және $g(x)$ формулалары үшін $[x, x_0]$

аралығында Лагранж формуласын қолданайық:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(\xi_1)(x - x_0)}{g'(\xi_2)(x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)}.$$

Мұнда $x < \xi_1 < x_0$, $x < \xi_2 < x_0$.

$f'(\xi_1)$ және $g'(\xi_2)$ функциялары үзіліссіз болғандықтан

$x \rightarrow x_0 \Rightarrow f'(\xi_1) \rightarrow f'(x_0)$, $g'(\xi_2) \rightarrow g'(x_0)$.

Сонымен соңғы теңдікте екі функцияның қатынасының шегі бізге теореманы (7.4-пункт) қолдансақ (9.3) формуласын аламыз.

Мысал. Шектерді табыңыз.

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{2x}}; \quad \text{ә) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2^x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_3 x}{x^3}.$$

Шешуі. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{2x}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$. Лопиталь ережесін қолданамыз:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2e^{2x}} = 0.$$

ә) Шек $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$ түріндегі анықталмағандықты береді. Лопиталь ережесін 2 рет қолданамыз:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2^x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2^x \cdot \ln 2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2^x \cdot \ln^2 2} = 0;$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_3 x}{x^3} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x \ln 3}}{x^3} = \frac{1}{\ln 3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^4} = 0.$$

9.2-мысал. Шектерді табыңыз.

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}; \quad \text{ә) } \lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x.$$

$$\text{Шешуі. а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1;$$

ә) шек $(0 \cdot \infty)$ түріндегі анықталмағандықты береді. Сондықтан оны $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$ түріндегі анықталмағандыққа келтіріп алып, Лопиталь ережесін қолданамыз:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow 0+} x = 0.$$

9.3. Функцияның өсуі және кемуі

$y = f(x)$ функциясы X аралығында берілсін. Егер кез келген $x_1, x_2 \in X$ үшін $x_1 < x_2$ теңсіздігінен $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$) теңсіздігі шығатын болса, онда $f(x)$ функциясы X аралығында өседі (кемиді) дейді (6.3-пункт).

Теорема. (Функция монотондығының жеткілікті шарты). Егер X аралығында дифференциалданатын $f(x)$ функциясының туындысы осы аралықта оң (теріс) болса, онда ол X аралығында өседі (кемиді).

Дәлелдеуі. $x_1, x_2 \in X$; $x_1 < x_2$ болсын. $f(x)$ функциясы үшін X аралығында Лагранж формуласын пайдаланамыз

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \quad x_1 < \xi < x_2$$

Осы теңдіктен $f'(\xi) > 0$ ($f'(\xi) < 0$) және $x_1 < x_2$ болғандықтан $f(x_2) > f(x_1)$ ($f(x_2) < f(x_1)$) теңсіздігі шығады.

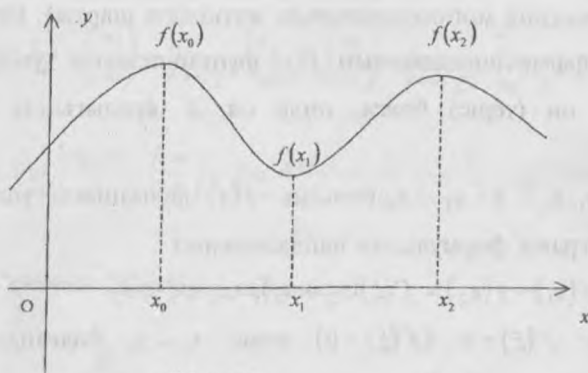
9.3-мысал. $y = x^2 - 2x + 5$ функциясының монотонды интервалдарын табыңыз.

Шешуі. Туындысын табамыз: $y' = 2x - 2$. Олай болса $x > 1$ болғанда $y' > 0$, ал $x < 1$ болғанда $y' < 0$, яғни $(-\infty, 1)$ аралығында функция кемиді, ал $(1, \infty)$ аралығында өседі.

9.4. Функцияның экстремумы

Анықтама. Егер x_0 нүктесінің бір маңайында $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$) теңсіздігі орындалса, онда x_0 нүктесін

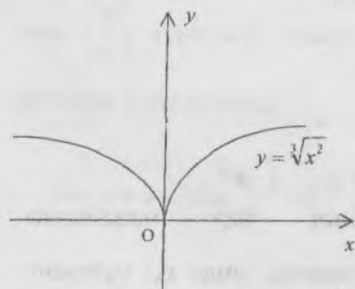
$f(x)$ функциясының төңіректік максимум (минимум) нүктесі де (9.4-сурет), ал $f(x_0)$ мәнін $f(x)$ функциясының төңіректік максимумы (минимумы) деп атайды. 9.4-суретте x_0, x_2 - $f(x)$ функциясының төңіректік максимум, ал x_1 - минимум нүктелері.



9.4-сурет

Сол сияқты $f(x_0), f(x_2)$ —төңіректік максимум, ал $f(x_1)$ —төңіректік минимум мәндері. Функцияның максимумы мен минимумы оның экстремумдері деп аталады.

Экстремумнің қажетті шарты. Егер x_0 нүктесінде



9.5-сурет

дифференциалданатын $y = f(x)$ функциясының төңіректік экстремумы бар болса, онда Ферма теоремасы бойынша (9.1 пункт) $f'(x_0) = 0$. Бірақ функцияның дифференциалданбайтын нүктелерде де төңіректік экстремумы болуы мүмкін.

Мысалы, $y = |x|$ функциясының $x = 0$ нүктесінде төңіректік минимумы бар, бірақ ол $x = 0$ нүктесінде дифференциалданбайды (1-мысал). Ал $y = \sqrt[3]{x^2}$ функциясының да $x = 0$ нүктесінде төңіректік минимумы бар, бірақ оның $x = 0$ нүктесінде туындысы нөлге тең емес: $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, $y'(0) = \infty$ (9.5-сурет).

Сонымен, экстремумның қажетті шарты былай айтылады: $f(x)$ функциясының $x = x_0$ нүктесінде төңіректік экстремумы болуы үшін $x = x_0$ нүктесінде оның туындысы не нөлге тең болуы, не нөлге болмауы қажетті.

Қажетті шарт орындалатын, яғни не туынды нөлге тең не нөлге болмайтын нүкте функцияның күдікті нүктесі деп аталады. Күдікті нүктелер әрине функцияның анықталу облысына кіреді.

Сонымен, егер бір нүктеде функцияның экстремумы болса, онда бұл нүкте күдікті нүкте болады.

Бірі тұжырым мүмкін емес, яғни күдікті нүкте міндетті түрде экстремум нүктесі болмайды.

Мысалы, $y = x^3$ функциясы үшін $x = 0$ нүктесі күдікті, өйткені $y' = 3x^2$, $y'(0) = 0$, бірақ $x = 0$ экстремум нүктесі болмайды.

Сонымен, функцияның экстремумдарын табу үшін күдікті нүктелерді қосымша зерттеу керек.

Экстремумның бірінші жеткілікті шарты.

Теорема. Егер x_0 нүктесі арқылы дифференциалданатын $y = f(x)$ функциясының туындысының таңбасы $+$ тен $-$ ке өзгерсе, онда x_0 нүктесі төңіректік максимум нүктесі болады да, ал $-$ тан $+$ ке өзгерсе төңіректік минимум нүктесі болады.

Дәлелдеуі. Туындының y' нүктесінің бір сол жақ төңірегінде таңбасы оң, ал оң жақ төңірегіндегі таңбасы теріс болсын. Яғни $x \in (a, x_0) \Rightarrow f'(x) > 0$; $x \in (x_0, b) \Rightarrow f'(x) < 0$. Онда функцияның монотондылығы жеткілікті шарты бойынша $f(x)$ функциясы (a, x_0) аралығында өседі де, (x_0, b) аралығында кемиді. Сондықтан x_0 нүктесі төңіректік максимум нүктесі болады. Туындының таңбасы терістен оңға өзгерген жағдайда осылай қарастырылады.

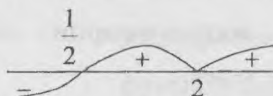
9.4- мысал. $y = x(x-2)^3$ функциясының экстремумы бар немесе жоғын зерттеңіз.

Шешуі. Функцияның туындысын табамыз:

$$y' = (x-2)^3 + 3x(x-2)^2, \quad y' = (x-2)^2(4x-2), \quad \text{яғни}$$

$$y' = 4(x-2)^2 \left(x - \frac{1}{2} \right).$$

Туындыны нөлге теңестіре отырып, күдікті нүктелер анықтаймыз: $y' = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 2$. y' функциясы сан осінде барлық нүктелерінде анықталған, сондықтан осы екі нүктеден басқа күдікті нүктелер жоқ. Енді осы екі нүктенің маңайларында туындының таңбаларын анықтаймыз, мысалға, интервал әдісімен.



Сонымен $x = \frac{1}{2}$ нүктесі төңіректік минимум нүктесі болады, ал $x = 2$ нүктесінде экстремум жоқ.

$$f_{\text{төң. min}} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 2 \right)^3 = \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{2} \right)^3 = -\frac{27}{16}.$$

Экстремумның екінші жеткілікті шарты. —

Теорема. Екі рет дифференциалданатын $y = f(x)$ функциясының бірінші туындысы x_0 нүктесінде нөлге тең болсын: $f'(x_0) = 0$. Егер x_0 нүктесінде екінші туынды оң болса ($f''(x_0) > 0$), онда x_0 — функцияның төңіректік минимум нүктесі, ал егер теріс болса ($f''(x_0) < 0$), онда төңіректік максимум нүктесі болады.

Дәлелдеуі. $f'(x_0) = 0$ және $f''(x_0) > 0$ болсын. Олай болса x_0 нүктесінің бір маңайында $f'(x)$ функциясы өседі. Сондықтан $f'(x_0) = 0$ болғандықтан x_0 нүктесінің сол жағында $f'(x) < 0$, ал оң жағында $f'(x) > 0$. Онда экстремумның бірінші жеткілікті шарты бойынша x_0 — төңіректік минимум нүктесі болады. $f'(x_0)$ және $f''(x_0) < 0$ жағдайы да осылай қарастырылады.

8.8-мысал. Өнеркәсіп өзінің әрбір өнімін p теңгеге сатады және өнімді шығаруға жұмсалатын шығынмен өнім көлемінің арасындағы байланыс $s(x) = ax + \lambda x^3$ ($a < p$, $\lambda > 0$) функциясымен беріледі. Мұндағы x — өндірілген өнім көлемі. Өнеркәсіп үшін өнім көлемін және оған сәйкес пайданы табыңыз.

Шешуі. x арқылы өндірілген өнім көлемін белгілейміз де, пайда функциясын құрамыз: $C(x) = px - s(x)$, яғни $C(x) = px - (ax + \lambda x^3)$. Мұнда px — сатылған өнімнен түсетін табыс. $C(x)$ функциясынан табысты табу арқылы оның күдікті нүктелерін табамыз.

$$C'(x) = p - a - 3\lambda x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}, \quad x_2 = -\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}.$$

Үлестің мағынасы бойынша $x > 0$. Сондықтан x_2 нүктесін қарастырмаймыз. Енді $C(x)$ функциясының екінші туындысының мағынасы арқылы x_1 нүктесінің қандай күдікті нүкте екендігін

анықтаймыз.

$$C''(x) = (C'(x))' = -6\lambda x, \quad C''(x_1) = -6\lambda \sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}} < 0$$

Сонымен экстремумның екінші шарты бойынша $x_1 = \sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}$

төңіректі максимум нүктесі. Демек $x = \sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}$ мәнінде $C(x)$ табысы

ең үлкен болады, яғни пайданың ең үлкені $\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}$ өнім көлемін

өндіргенде және ол пайданың мәні

$$C_{\max}(x_1) = \frac{(p-a)\sqrt{p-a}}{\sqrt{3\lambda}} - \lambda \frac{p-a}{3\lambda} \sqrt{\frac{p-a}{3}} = \frac{2(p-a)\sqrt{p-a}}{3\sqrt{3\lambda}}$$

болады.

Екінші жеткілікті шарт бойынша егер x_0 күдікті нүкте және $f''(x_0) \neq 0$ болса, онда осы нүктеде функцияның төңіректік экстремумы болады. Бірақ кері тұжырым дұрыс емес. Күдікті нүктеде экстремум екінші туынды нөлге тең болса да болуы мүмкін. Мысалға, $y = x^4$ функциясы үшін $y' = 4x^3$, $y'' = 12x^2$. Демек күдікті $x = 0$ нүктесінде екінші туынды нөлге тең, бірақ $x = 0$ нүктесі — осы функция үшін төңіректік минимум нүктесі болады.

9.5. Функцияның кесіндідегі ең үлкен және ең кіші мәндері

Көптеген қолданбалы есептерді, соның ішінде тиімділік есептерін шығаруда функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табу есептерінің маңызы өте зор. Вейерштрасс теоремасы (9.6-пункт) бойынша егер $y = f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда ол осы аралықта өзінің ең үлкен және ең кіші

мәндерін қабылдайды. Ең үлкен және ең кіші мәнді функция не кесіндінің төңірегіндегі экстремум нүктелерінде не кесіндінің шеткі нүктелерінде қабылдауы мүмкін. Ең үлкен және ең кіші мәндерді табу үшін алдымен функцияның күдікті нүктелерін (не туынды нөлге тең, не туынды жоқ нүктелер) табу керек. Сонан соң функцияның күдікті нүктелеріндегі және кесіндінің шеткі нүктелеріндегі мәндерін тауып, олардың ішінен ең үлкен және ең кіші мәндерді іздеу керек.

9.6-мысал. $y = (x-1)^2 e^{-2x}$ функциясының $[0, 4]$ кесіндісіндегі ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңыз.

Шешуі. Күдікті нүктелерді табамыз: $f'(x) = 2(x-1)e^{-2x} - 2(x-1)^2 e^{-2x} = -2(x-1)(x-2)e^{-2x} = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 2$ — күдікті нүктелер. Енді функцияның күдікті нүктелердегі және шеткі нүктелердегі мәндерін табамыз:

$$f(0) = 0, \quad y(2) = e^{-4}, \quad y(0) = 1, \quad y(4) = 9e^{-8}. \text{ Сонымен}$$

$$f_{\text{үлкен}} = f(0) = 1, \quad f_{\text{кіші}} = y(1) = 0$$

9.6. Функцияның дөңестігі. Иррең нүктесі

Функцияның графигін салу үшін экстремум нүктелерінен басқа да өте қажетті математикалық ұғымдар қолданылады. Біз енді оларға тоқталамыз.

Анықтама. Егер X аралығының кез келген x_1 және x_2 нүктелері үшін

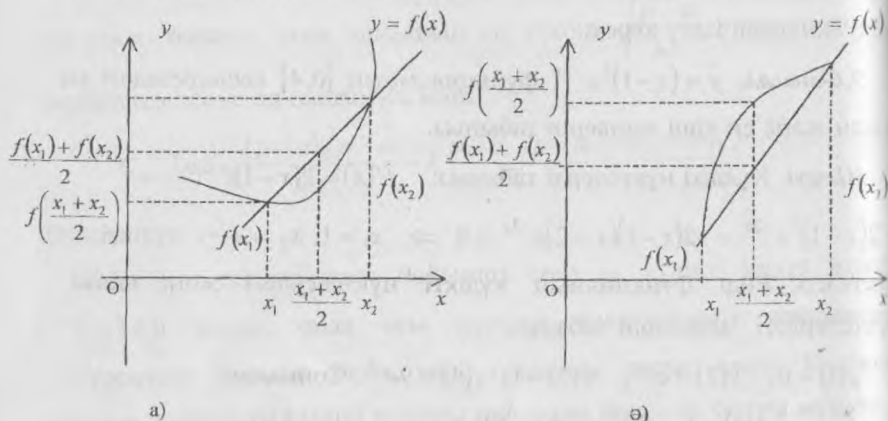
$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \quad (9.4)$$

теңсіздігі орындалса, онда $y = f(x)$ функциясының графигінің дөңестігі X аралығында төмен бағытталған деп, ал егер

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \quad (9.5)$$

теңсіздігі орындалса — жоғары бағытталған деп айтады.

Дөңестігі төмен және жоғары бағытталған функциялардың графиктері 9.6-суретте көрсетілген.

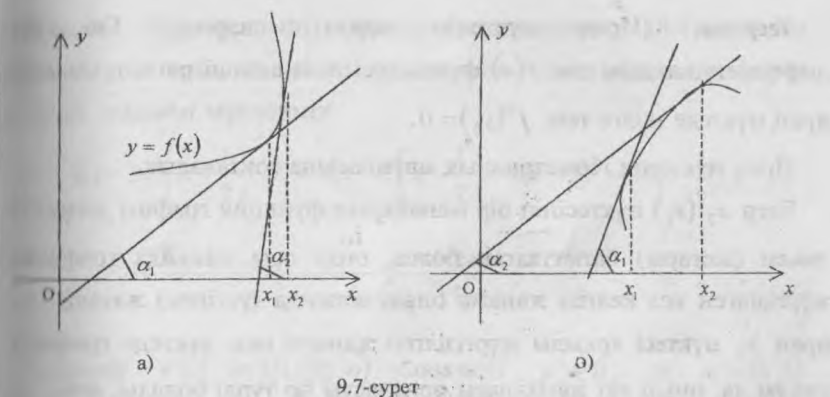


9.6-сурет

Егер функция графигінің дөңестігі төмен (жоғары) бағытталса, онда графиктің кез келген екі нүктесін қосатын кесінді (хорда) тұтасымен графиктің үстінде (астында) жатады.

Теорема. X аралығында функция графигінің дөңестігі төмен (жоғары) бағытталуы үшін оның бірінші туындысы бұл аралықта өсуі (кемуі) қажетті және жеткілікті.

Теореманың геометриялық мағынасы: Егер $f'(x)$ X аралығында өсетін (кемитін) болса, онда график жанамаларының көлбеу



9.7-сурет

бұрыштары да өседі (кемиді) (9.7а,б-сурет). Бұл функция графигінің төмен (жоғары) бағытталғанын көрсетеді.

Монотондық шартты қолдана отырып функция графигі дөңестігінің төмен (жоғары) бағытталуының жеткілікті шартын анықтауға болады.

Теорема. Егер екі рет дифференциалданатын функцияның екінші туындысы X аралығында оң (теріс) болса, онда осы аралықта функция графигінің дөңестігі төмен (жоғары) бағытталған.

Дәлелдеуі. Егер $f''(x) = (f'(x))' > 0$, $x \in X$ болса, онда $f'(x)$ X аралығында өседі, сондықтан алдыңғы теорема бойынша функция графигінің дөңестігі төмен бағытталған. $f''(x) < 0$, $x \in X$ жағдайы да осылай қарастырылады.

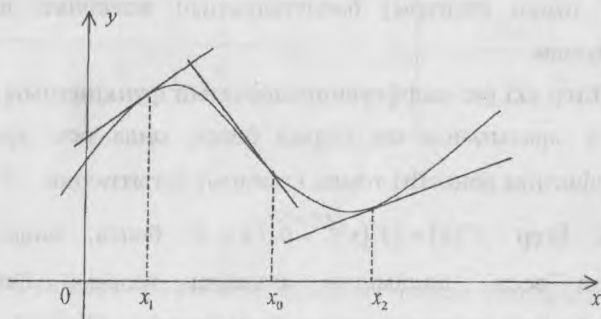
Анықтама. Функция графигі дөңестігінің төмен және жоғары бағытталған аралықтарын бөліп тұрған нүктенің абсциссасы осы графиктің ирең нүктесі деп аталады.

Жоғарыда айтылғандардан ирең нүктенің бірінші туындының нөлге тең болуы экстремумы болатындығы шығады. Сондықтан мынандай тұжырым дұрыс.

Теорема. (Ирең нүктенің қажетті шарты). Екі рет дифференциалданатын $f(x)$ функциясының екінші ретті туындысы ирең нүктеде нөлге тең: $f''(x_0) = 0$.

Ирең нүктенің геометриялық мағынасына тоқталалық.

Егер x_2 (x_1) нүктесінің бір маңайында функция графигі дөңестің төмен (жоғары) бағытталған болса, онда осы маңайда графикке жүргізілген кез келген жанама оның астында (үстінде) жатады. Ал ирең x_0 нүктесі арқылы жүргізілген жанама осы нүктеде графикті қияды да, оның екі жағындағы орналасуы әр түрлі болады, яғни ол жағында графиктің үстінде (астында) жатса, онда сол жағында астында (үстінде) жатады (9.8-сурет). График дөңестігінің бағыты ирең нүктесі арқылы өткенде өзгереді.



9.8-сурет

Егер дифференциалданатын функцияның күдікті нүктесі төңіректік экстремум нүктесі болмаса, онда ол ирең нүкте болады.

9.7-мысал. $y = x(x-2)^3$ функциясының дөңестік интервалдарын және ирең нүктелерін табыңыз.

Шешуі. Функцияның бірінші туындысын (9.4-мысалды қараңыз), сол арқылы екінші туындысын тауып, оның таңбасын интервал әдісімен зерттейміз:

$$y' = 4(x-2)^2 \left(x - \frac{1}{2}\right), \quad y'' = 8(x-2) \left(x - \frac{1}{2}\right) + 4(x-2)^2 = 12(x-1)(x-2).$$



Сонымен $x \in (-\infty; 1) \cup (2; \infty)$ болғанда $y'' > 0$, ал $x \in (1, 2)$ болғанда $y'' < 0$. Олай болса дөңестіктің жеткілікті шарты бойынша $x \in (-\infty; 1) \cup (2; \infty)$ облысында функция графигінің дөңестігі төмен, ал $(1, 2)$ интервалында жоғары бағытталған және $x=1$ және $x=2$ нүктелері функцияның ирең нүктелері болады.

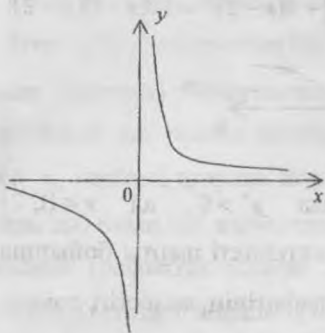
9.7. Функция графигінің асимптоталары

$y = f(x)$ функциясы графигі $x \rightarrow \infty$ және $x \rightarrow -\infty$ болғанда кей жағдайда бір түзуге мейлінше жақындайды. Мұндай түзулер берілген функцияның асимптоталары деп аталады.

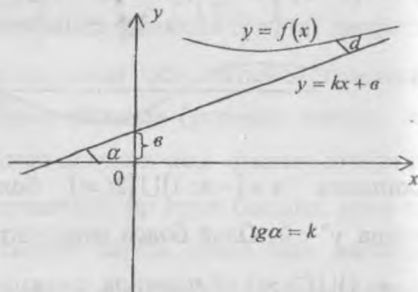
Анықтама. Егер $y = f(x)$ функциясы графигінің бойында жатқан $(x, f(x))$ нүктесі графиктің бойымен координаталар жүйесінің бас нүктесінен ақырсыз қашықтағанда осы нүктеден бір түзуге дейінгі қашықтық нөлге ұмтылатын болса, онда осы түзу $y = f(x)$ функциясы графигінің асимптотасы деп аталады.

Асимптоталар вертикаль, горизонталь және көлбеу болып үш түрге бөлінеді.

Анықтама. Егер $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ және $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ шектерінің еш біреуі $+\infty$ -ке немесе $-\infty$ -ке тең болса, онда $x = x_0$ түзуі



9.9-сурет



9.10-сурет

$y = f(x)$ функциясы графигінің вертикаль асимптотасы деп аталады.

Мысалы, $y = \frac{1}{x}$ функциясы үшін $x = 0$ түзуі вертикаль асимптота болады (9.9-сурет).

Анықтама. Егер $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ немесе $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ болса, онда $y = A$ түзуі $y = f(x)$ функциясының горизонталь асимптотасы деп аталады.

Мысалы, $y = \frac{1}{x}$ функциясы үшін $y = 0$ түзуі горизонталь асимптота болады (9.10-сурет).

Анықтама. Егер $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{f(x)}{x} = k$, $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} (f(x) - kx) = b$ теңдіктері орындалатындай k және b сандары табылатын болса, онда

$y = kx + b$ түзуі $y = f(x)$ функциясының көлбеу асимптотасы деп аталады.

9.10-суретте көлбеу асимптота көрсетілген.

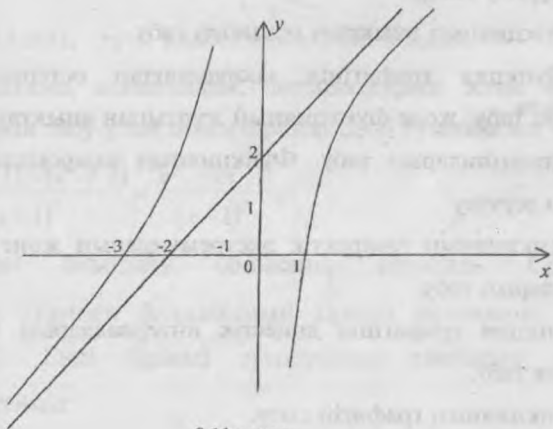
9.8-мысал. $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x}$ функциясы графигінің асимптоталарын

табыңыз.

Шешуі. $x = 0$ түзуі функция графигінің вертикаль асимптотасы

болады, өйткені $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x + 2 - \frac{3}{x} \right) = +\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + 2 - \frac{3}{x} \right) = -\infty.$$



9.11-сурет

Функция графигінің горизонталь асимптотасы жоқ, өйткені

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \left(\frac{x^2 + 2x - 3}{x} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \left(x + 2 - \frac{3}{x} \right) = +\infty \quad (-\infty)$$

Сол көлбеу асимптоталарды іздейміз.

$$k = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{y}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} \right) = 1, \quad b = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} (y - kx) =$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \left(\frac{x^2 + 2x - 3}{x} - x \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{2x - 3}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \left(2 - \frac{3}{x} \right) = 2$$

Сонымен $y = x + 2$ түзуі көлбеу асимптота болады (9.11-сурет).

9.8. Функцияны зерттеудің жалпы сұлбасы (схемасы) және оның графигін салу

Функцияны зерттеуді және оның графигін салуды төменгі ретпен жүргізу тиімді:

1. Функцияның анықталу облысын табу.
2. Функция графигінің координаттар остерімен қиылыс нүктелерін табу және функцияның жұптығын анықтау.
3. Асимптоталарын табу. Функцияның ақырсыздықтағы жағдайын зерттеу.
4. Функцияның төңіректік экстремумдарын және монотонды интервалдарын табу.
5. Функция графигінің дөңестік интервалдарын және ирең нүктелерін табу.
6. Функцияның графигін сызу.

9.9-мысал. $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ функциясын зерттеңіз және оның графигін сызыңыз.

Шешуі. 1. Функцияның анықталу облысы $-(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

2. $x^2 + 3 = 0$ теңдеуінің шешімі жоқ болғандықтан, график ox осімен қиылыспайды, бірақ oy осімен $(0, -1)$ нүктесінде қиылысады. Функция жұп та емес, тақ та емес.

3. $\lim_{x \rightarrow 1+0} y = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 1-0} y = -\infty$ болғандықтан $x=1$ түзуі вертикаль асимптота болады. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$ болғандықтан горизонталь асимптота жоқ және функция $x \rightarrow \pm\infty$ болғанда ақырсыз үлкен болады. Енді көлбеу асимптотасын іздейміз:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = 1,$$

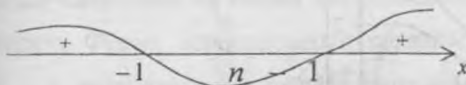
$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = 1.$$

Сондықтан $0 < a \neq 1$, түзуі көлбеу асимптота болады.

4. Функцияның монотондық интервалдарын және төңіректік экстремумдарын табу үшін оның бірінші ретті туындысын табамыз:

$$y' = \frac{2x(x-1) - (x^2 + 3)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}.$$

$x=1$ нүктесі анықталу облысына кірмейді. Сондықтан $x^2 - 2x - 3 = 0$ түзуінен функцияның күдікті нүктелерін табамыз: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. Енді бірінші туындының таңбасын интервал аралымен зерттейміз:



Сонымен $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$ облысында $y' > 0 \Rightarrow$ функция өспелі болады, ал $(-1, 1) \cup (1, 3)$ облысында $y' < 0 \Rightarrow$ функция кемімелі функция болады. Сондай-ақ

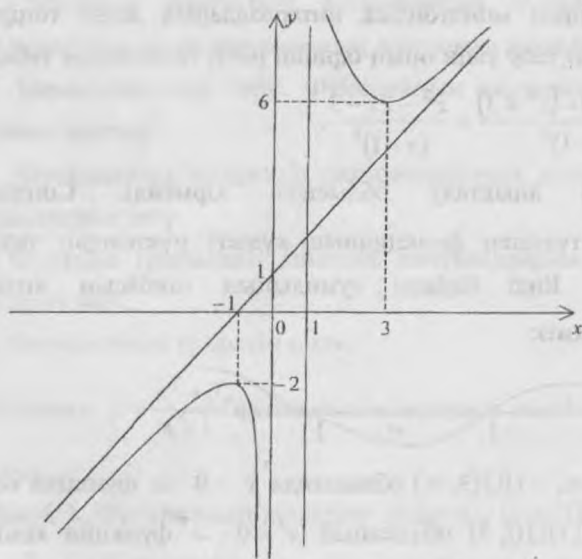
$$y_{\text{тоң. max}} = y(-1) = \frac{4}{-2} = -2, \quad y_{\text{тоң. min}} = y(3) = \frac{12}{2} = 6.$$

5. Функция графигінің дөңестігін және ирең нүктесін анықтайтын үшінші ретті туындыны есептейміз:

$$y''' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x-3)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{2(x^2-2x+1-x^2+2x+3)}{(x-1)^3} = \frac{8}{(x-1)^3}$$

Сонымен екінші ретті туынды анықталу облысында нөлге тең емес, демек функцияның иілу нүктесі жоқ. $(-\infty, 1)$ интервалында $y'' < 0$ болғандықтан функция графигінің дөңестігі осы аралықта жоғары бағытталған, сондай-ақ $(1, \infty)$ аралығында төмен бағытталған. Ішкі функция графигін сызуға болады.



9.9. Туындының экономикада қолданылуы

Туындының экономикада қолданылуының кейбір мысалдарын келтірейік. Өндіру және тұтыну, сұраныс және ұсыныс теорияларының негізгі заңдары осы бөлімде келтірілген теоремаларға негізделеді.

Алаймен Ферма теоремасының экономикалық қолдануына келетін болсақ. Өндіру теориясының негізгі заңдарының бірі былай айтылады: *Өндірушіге тиімді тауар көлемі шектік шығын мен шектік табыстың теңдігімен анықталады.*

Өнім көлемі x -ке тәуелді табыс функциясы — $D(x)$, пайда функциясы — $C(x)$, ал шығын функциясы — $S(x)$ болсын. Сонда $\pi(x) = D(x) - S(x)$. Әрине, пайда $C(x)$ максималды мән алатын өнім көлемі $x = x_0$ өндірістің тиімді деңгейі болады. Сондықтан Ферма теоремасы бойынша бұл нүктеде $C'(x_0) = 0$, $C'(x) = D'(x) - S'(x)$ болатындықтан $D'(x_0) = S'(x_0)$. Сонымен жоғарыда айтылған экономикалық заңдылыққа келдік.

Өндіріс теориясының басқа бір маңызды ұғымы — орта шығындары ең аз (минималды) болатын тиімді өндіріс деңгейі. Төменде экономикалық заң былай айтылады: *орта және шектік шығындардың теңдігімен ең тиімді өндіріс деңгейі анықталады.*

Бұл шартта Ферма теоремасының салдары ретінде айтылады. Егер $S(x)$ — x өнім көлеміне тәуелді шығын мөлшері болса, онда $S'(x)$, яғни тауарды шығарудағы шығын көлемінің тауар санына қатынасы орта шығынды береді. Бұл шаманың минимумы оның күлдікті нүктесінде болады. Сондықтан

$$\left(\frac{S(x)}{x}\right)' = \frac{S'(x) \cdot x - S(x)}{x^2} = 0 \Rightarrow S'(x) \cdot x - S(x) = 0 \Rightarrow S'(x) = \frac{S(x)}{x},$$

яғни минимум (тиімді өндіріс деңгейі) орта және шектік шығындар өзара тең болатын x - тің мәнінде қабылданады.

Функция графигінің дөңестік ұғымының да экономикалық мағынасы бар. Ең көп таралған экономикалық заңдылықтардың бірі — кемімелі табыс заңы былай айтылады: *Өндіріс өскен сайын әрбір жаңа ресурстан (еңбек ресурсын, технологиялық ресурс) алынған қосымша өнім бір уақыттан кейін кему бастайды. Басқа сөзбен айтқанда, егер Δx — ресурс өсімішесі, ал Δy — шығатын өнім өсімішесі болса, онда $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ шамасы x өскен сайын кемиді.*

Сонымен, кемімелі табыс заңы былай айтылады: *Қолданылған ресурсқа тәуелді өнім көлемін беретін $y = f(x)$ функциясы графигінің дөңестігі жоғары бағытталған.*

Экономикалық теорияның басқа бір іргелі ұғымы — ол пайдалылық функциясы $U = U(x)$. Мұнда x —тауар, ал U — пайдалылық. Бұл шама жеке тұтынушы үшін өте субъективті, ал жалпы қоғам үшін жеткілікті объективті болады. Кемімелі пайдалылық заңын былай айтады: *Тауар көлемі өскен сайын бір уақыттан кейін әрбір жаңа тауардан алынатын қосымша пайдалылық кему бастайды.*

Кемімелі пайдалылық заңы сұраныс және ұсыныс теориясының математикалық зерттеулерінің негізі болады.

9.10. Функцияның дифференциалы

$y = f(x)$ функциясы X аралығында анықталған және X аралығында жатқан $(x \in X)$ x нүктесінің бір маңайында

дифференциалданатын болсын. Онда осы нүктеде функцияның ақырлы туындысы бар: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$.

Сондықтан 7.1-теоремасы бойынша

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x.$$

Мұнда $\alpha(\Delta x) - \Delta x \rightarrow 0$ болғанда ақырсыз кіші шама. Сонымен функцияның өсімшесі Δy екі қосындыдан тұрады: бірінші қосынды Δx -ке қарағанда сызықты, ал екінші қосынды $\Delta x \rightarrow 0$ болғанда $\alpha(\Delta x)$ -қа қарағанда үлкен дәрежелі ақырсыз кіші шама.

Анықтама. Функция өсімшесінің функция туындысы мен көбейтіндісіне тең, Δx -қа қарағанда сызықты бас бөлігі $-f'(x)\Delta x$ функцияның дифференциалы деп аталады.

Дифференциал dy немесе df таңбасымен белгіленеді. Сонымен анықтама бойынша

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x \quad (9.6)$$

9.10-мысал. $y = 3x^3 - 2x$ функциясының $x = 8$ және $\Delta x = 0,1$ болғандағы өсімшесін және дифференциалын табыңыз.

Шешуі.

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = [3(x + \Delta x)^3 - 2(x + \Delta x)] - 3x^3 + 2x = \\ &= 3x^3 + 9x^2 \cdot \Delta x + 9x(\Delta x)^2 + 3(\Delta x)^3 - 2x - 2\Delta x - 3x^3 + 2x = \\ &= \Delta x(9x^2 + 9x \cdot \Delta x + 3(\Delta x)^2 - 2) = (9x^2 - 2) \cdot \Delta x + (9x \cdot \Delta x + 3(\Delta x)^2) \cdot \Delta x; \\ dy &= f'(x) \cdot \Delta x = (9x^2 - 2) \cdot \Delta x \end{aligned}$$

Сонымен $x = 8$ және $\Delta x = 0,1$ болғанда

$$\Delta y = 574 \cdot 0,1 + (72 \cdot 0,1 + 3(0,1)^2) \cdot 0,1 = 57,4 + 0,723 = 58,123; \quad dy = 57,1.$$

9.11-мысал. $y = x$ функциясының дифференциалын табыңыз.

Шешуі. $dy = y' \cdot \Delta x \Rightarrow dy = \Delta x$. Сонымен, тәуелсіз шаманың дифференциалы оның өсімшесіне тең. Сондықтан (9.6) формуласы былай жазылады

$$dy = f'(x) \cdot dx \quad (9.7)$$

Олай болса $f'(x) = \frac{dy}{dx}$.

Дифференциалдың қасиеттері.

Дифференциалдың қасиеттері негізінен туындының қасиеттері сияқты. Оларды дәлелдеусіз келтіреміз:

$$1. dc = 0$$

$$4. d(uv) = u dv + v du$$

$$2. d(cu) = cd(u)$$

$$5. d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$$

$$3. d(u \pm v) = du \pm dv$$

Енді туындыда жоқ, бірақ дифференциалда бар бір маңызды қасиетке тоқталамыз.

Дифференциал тұлғасының инварианттылығы. Егер тәуелсіз $y = f(x)$ шамасы x тәуелсіз шамасының функциясы болса, онда $dy = f'(x)dx$. Енді аргумент $u = \varphi(x)$ шамасы x -ке тәуелді функция болатын $y = f(u)$ күрделі функциясын қарастыралық. Егер $u = \varphi(x)$ және $y = f(u)$ функциялары өз аргументтері бойынша дифференциалданатын функциялар болса, онда (8.10) формуласы бойынша $y' = f'(u) \cdot u'$. Олай болса $dy = f'(x)dx = f'(u) \cdot u' dx = f'(u)du$, өйткені (9.6) формуласы бойынша $u' dx = du$. Сонымен

$$dy = f'(u) \cdot du \quad (9.8)$$

Бұл теңдіктен тәуелсіз айнымалы x -тің функциясы $f(x)$ -тің орнына x -ке тәуелді u айнымалысының функциясы $f(u) = f(\varphi(x))$ алсақ та, дифференциал тұлғасы өзгермейтінін көреміз. Дифференциалдың бұл қасиеті оның инварианттылығы деп

италады. Бірақ (9.7) мен (9.8) формулаларының мағыналарының арасында айырмашылық бар. Ол мынандай: (9.7) формуласында $dx = \Delta x$, ал (9.8) формуласында $du \approx \Delta u$.

9.11. Дифференциалдың жуық есептеулерде қолданылуы

Өткен пунктте $\Delta y = dy + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ теңдігін көрсеттік. Сондықтан жеткілікті кіші Δx үшін $\Delta y \approx dy$ немесе $f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)dx$. Олай болса

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x \quad (9.9)$$

Δx мәні аз болған сайын (9.9) формуласының дәлдігі арта түседі. Осы формула бойынша кейбір есептеулерді жуықтап шығаруға болады.

9.12-мысал. Жуықтап есептеңіз: а) $\sqrt[3]{27,81}$; ә) $\operatorname{ctg} 44^\circ$.

Шешуі. а) Алдымен $f(x) = \sqrt[3]{x}$ функциясы мәндерін жуықтап

есептеу формуласын табамыз. $f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{\sqrt[3]{x}}{nx}$. (9.9) формуласы

бойынша $\sqrt[3]{x + \Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \frac{\sqrt[3]{x} \cdot \Delta x}{nx}$ немесе $\sqrt[3]{x + \Delta x} \approx \sqrt[3]{x} \left(1 + \frac{\Delta x}{nx} \right)$.

Берілген мысал үшін $\sqrt[3]{x + \Delta x} = \sqrt[3]{x} \left(1 + \frac{\Delta x}{3x} \right)$. x ретінде 27,28 санына

мейлінше жақын, бірақ $\sqrt[3]{x}$ түбірі алынатын және Δx жеткілікті кіші болатын санды аламыз: $x = 27$; $\Delta x = 0,81$; $\sqrt[3]{27,81} \approx$

$$= 3 \left(1 + \frac{0,81}{3 \cdot 27} \right) \approx 3 \cdot 1,01 = 3,03;$$

ә) $f(x) = \operatorname{ctg} x$ болса, онда $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$. Сондықтан (9.9)

формуласы бойынша $\operatorname{ctg}(x + \Delta x) \approx \operatorname{ctg} x - \frac{\Delta x}{\sin^2 x}$. $x = 45^\circ$, $\Delta x = -1^\circ$

$= -\frac{\pi}{180}$ болсын. Сонда

$$\operatorname{ctg} 44^\circ = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{180}\right) \approx \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\pi}{180} = 1 + \frac{2\pi}{180} \approx 1 + \frac{2 \cdot 3,14}{180} \approx$$

$$\approx 1 + 0,0349 \approx 1,035.$$

(9.5) формуласын қолдану арқылы жуықтап есептеуге 1-ден көп кіші α саны үшін

$$(1 \pm \alpha)^n \approx 1 \pm n\alpha, \quad \sqrt[n]{1 \pm \alpha} \approx 1 \pm \frac{\alpha}{n}, \quad \frac{1}{1 \pm \alpha} \approx 1 \mp \alpha,$$

$$e^\alpha \approx 1 + \alpha, \quad \ln(1 \pm \alpha) \approx \pm \alpha, \quad \sin \alpha \approx \alpha, \quad \cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$$

және т.б. формулаларды пайдалануға болады. Дифференциалды көмегімен берілген аргументтің қателігі бойынша функцияның абсолюттік және салыстырмалы қателіктерін табуға болады.

Аргументтің жуық мәні x және абсолюттік қателігі $|\Delta x| = |x - x_1|$ белгілі болғанда $y = f(x)$ функциясының x_1 -дегі мәнін табу керек болсын. Егер ақиқат шама $f(x_1)$ -тің орнына $f(x)$ шамасын алсақ, онда біз $|f(x) - f(x_1)| = |\Delta y| \approx dy = f'(x)\Delta x$ қателігін жібереміз.

Мұндай жағдайда функцияның салыстырмалы қателігі $\delta_y = \left| \frac{\Delta y}{y} \right|$

жеткілікті кіші Δx үшін

$$\delta_y = \left| \frac{\Delta y}{y} \right| \approx \left| \frac{dy}{y} \right| = \left| \frac{f'(x) \cdot \Delta x}{f(x)} \right| = \left| \frac{xf'(x)}{f(x)} \right| \left| \frac{\Delta x}{x} \right| \quad \text{немесе}$$

$$\delta_y = |E_x(y)| \delta_x \quad (9.10)$$

формуласымен есептелуі мүмкін. Мұндағы $|E_x(y)|$ - функцияның икемділігі (8.6 пункт), $\delta_x = \left| \frac{\Delta x}{x} \right| - x$ аргументінің салыстырмалы қателігі.

9.13-мысал. Автомобильдің 100 километрге жұмсайтын бензинінің жұмсалуды $y = 18 - 0,3x + 0,001x^2$ формуласымен анықталады. Мұнда x - автомобильдің жылдамдығы (км/сағ), ал y - бензиннің жұмсалуды (л). 5%-ке дейінгі дәлдікпен $x = 90$ км/сағ болғандағы бензиннің жұмсалуды есептеудегі салыстырмалы қателікті табыңыз.

Шешуі. Функцияның икемділігін (абсолют шамасы бойынша) табамыз:

$$|E_x(y)| = \left| \frac{xf'(x)}{f(x)} \right| = \left| \frac{x(-0,3 + 0,002x)}{18 - 0,3x + 0,001x^2} \right|. \quad x = 90 \text{ болса, онда } |E_{90}(y)| = 1,41$$

(9.10) формуласы бойынша $\delta_y = 1,41 \cdot 5 \approx 7,1\%$.

9.12. Жоғары дәрежелі дифференциал

$dy = f'(x)dx$ формуласы бойынша дифференциалданатын $y = f(x)$ функциясының дифференциалы x және dx аргументтеріне тәуелді функция. Тәуелсіз шаманың дифференциалы dx оған тәуелді емес болсын. Мұндай жағдайда dy дифференциалы x -ке тәуелді функция болады. Функцияның дифференциалы оның бірінші ретті дифференциалы деп аталады. Бірінші ретті дифференциалдың дифференциалы функцияның екінші ретті дифференциалы болады:

$$d^2y = d(dy) \quad (9.11)$$

Сондай-ақ $(n-1)$ -ретті дифференциалдың дифференциалы функцияның n -ретті дифференциалы деп аталады:

$$d^n y = d(d^{n-1} y)$$

$d^2 y$ дифференциалын есептейік.

$$d^2 y = d(dy) = d(f'(x)dx) = dx \cdot d(f'(x)) = dx(f'(x))' dx = f''(x)(dx)^2$$

Сондай-ақ

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n \quad (9.12)$$

(9.11) және (9.12) формулалардан

$$f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

формулалары шығады.

ОНЫНШЫ ТАРАУ АНЫҚТАЛМАҒАН ИНТЕГРАЛ

10.1. Алғашқы функция және анықталмаған интеграл

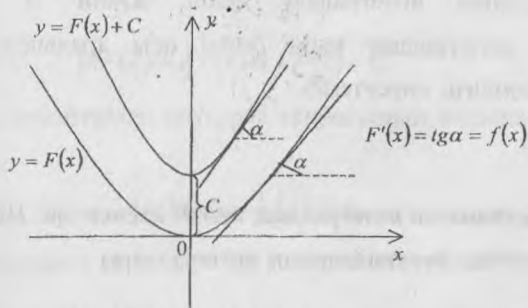
Берілген функцияның туындысын немесе дифференциалын табу дифференциалдық есептеудің негізгі есебі болып табылады.

Интегралдық есептеу айтылған есептің кері есебі, яғни ол туындысы немесе дифференциалы бойынша функцияның өзін табу.

Анықтама. $X = (a, b)$ аралығында дифференциалданатын $F(x)$ функциясының туындысы берілген $f(x)$ функциясына тең болса, яғни $F'(x) = f(x)$ болса, онда $F(x)$ функциясын $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы дейді.

Мысалы, $f(x) = \sin x$ функциясының алғашқы функциясы $F(x) = -\cos x$, өйткені $F'(x) = (-\cos x)' = \sin x = f(x)$.

Туындының геометриялық мағынасы бойынша $y = F(x)$ қисығына абсциссасы x болатын нүктеде жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициенті $F'(x)$ мәніне тең. Сондықтан $f(x)$ функциясының алғашқы функциясын табу дегеніміз, ол x нүктесінде бұрыштық коэффициенті $f(x)$ мәніне тең болатын $y = F(x)$ қисығын табу болады.



10.1-сурет

C — кез келген тұрақты шама (константа), яғни кез келген сан болсын. Егер $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы $F(x)$ болса, онда $F(x) + C$ функциясы да оның алғашқы функциясы болады, себебі $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$. $F(x) + C$ функциясы $f(x)$ функциясының барлық алғашқы функцияларын анықтайды.

Анықтама. Егер $F'(x) = f(x)$ болса, онда $F(x) + C$ функциясын $f(x)$ функциясының анықталмаған интегралы дейді және ол $\int f(x) dx$ символоймен белгіленеді. Сонымен,

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad (10.1)$$

мұндағы $F(x) - f(x)$ функциясының алғашқы функциясы, C — кез келген сан.

Мысал. $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$, өйткені $\frac{x^4}{4} - x^3$ функциясы үшін алғашқы функция.

(10.1) формуласында $f(x)$ -ті интеграл ішіндегі функция, ал $f(x)dx$ өрнегін интеграл ішіндегі өрнек дейді.

Берілген функцияның анықталмаған интегралын табу жолын осы функцияны интегралдау дейді. Кейін X аралығында функцияны интегралдау үшін оның осы аралықта үзіліссіздігі жеткілікті екендігін көрсетеміз.

10.2. Анықталмаған интегралдың негізгі қасиеттері. Негізгі элементар функциялардың интегралдары

Анықталмаған интегралдың негізгі қасиеттері:

1. Анықталмаған интегралдың туындысы интеграл ішіндегі функцияға тең, яғни

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x) \quad (10.1)$$

Шынында да, (10.1) теңдігінің екі жағынан туынды алсақ, онда

$$\left(\int f(x) dx \right)' = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x)$$

2. Анықталмаған интегралдың дифференциалы интеграл ішіндегі өрнекке тең, яғни

$$d\left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx \quad (10.2)$$

Шынында да, дифференциалдың анықтамасы және бірінші қасиет бойынша

$$d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' dx = f(x)dx$$

3. Функция дифференциалының анықталмаған интегралы осы функция мен кез келген санның қосындысына тең, яғни

$$\int dF(x) = F(x) + C, \quad (10.3)$$

мұндағы C — кез келген сан.

Шынында да, егер $F'(x) = f(x)$ болса, онда $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Осы теңдікке (10.2) формуланы қолданамыз: $f(x)dx = dF(x)$.

Сондықтан

$$\int dF(x) = \int f(x)dx = F(x) + C.$$

4. Тұрақты көбейткішті интеграл таңбасының алдына шығаруға болады, яғни

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx, \quad (10.4)$$

мұндағы k — кез келген сан.

Шынында да, $g(x) = \int kf(x)dx - k \int f(x)dx$ функциясынан туынды

$$\text{алсақ } g'(x) = \left(\int kf(x)dx - k \int f(x)dx\right)' = \left(\int kf(x)dx\right)' - k\left(\int f(x)dx\right)',$$

онда бірінші қасиет бойынша $g'(x) = kf(x) - kf(x) = 0$. Сондықтан

$$g(x) = C, \text{ демек } \int kf(x)dx = k \int f(x)dx + C. \text{ Анықталмаған интеграл}$$

тұрақты қосындыға дейінгі дәлдікпен анықталатын болғандықтан,

соңғы теңдіктен C тұрақтысын алып тастауға болады.

5. Екі функцияның қосындысының интегралы олардың интегралдарының қосындысына тең, яғни

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \quad (10.5)$$

Бұл теңдіктің дәлелдеуі (10.4) теңдігінің дәлелдеуіндей болады.

Негізгі элементар функциялардың интегралдарын, анықталмаған интегралдар таблицасын келтіреміз:

1. $\int 0 dx = C$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 1, \quad a \neq 1, \quad \int e^x dx = e^x + C$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$
7. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad -a < x < a, \quad a > 0$
8. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$
9. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad a \neq 0$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C, \quad a \neq 0$
11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
12. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
13. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$
14. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$
15. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$

$$16. \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C$$

$$17. \int sh dx = chx + C$$

$$18. \int chx dx = shx + C$$

Бұл формулалардың дұрыстығын тексеру үшін олардың оң жақтарын дифференциалдау жеткілікті. Мысалы, 2-формуланың

$$\text{дұрыстығын былай тексереміз: } \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C \right)' = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n.$$

Енді 3-формуланы тексерелік: Егер $x > 0$ болса, онда

$$|x| = x, \quad (\ln|x| + C)' = (\ln x + C)' = \frac{1}{x}. \quad \text{Ал егер } x < 0 \text{ болса, онда}$$

$$|x| = -x, \quad (\ln|x| + C)' = (\ln(-x) + C)' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}.$$

Басқа формулалар да осы сияқты жолмен дәлелденеді. Бірнеше мысалдар қарастырайық.

$$\begin{aligned} 10.1\text{-мысал. а) } \int \left(\frac{1}{x^3} + \sqrt[4]{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx &= \int x^{-3} dx + \int x^{\frac{1}{4}} dx + 2 \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \\ &= \frac{x^{-2}}{-2} + \frac{4}{5} x^{\frac{5}{4}} + 4x^{\frac{1}{2}} + C = -\frac{1}{2x^2} + \frac{4x\sqrt[4]{x}}{5} + 4\sqrt{x} + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \int \frac{dx}{4^x} + \int 3^{2x-1} dx + \int \frac{dx}{4x^2-1} + \int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+1}} &= \int \left(\frac{1}{4} \right)^x dx + \frac{1}{3} \int 9^x dx + \\ &+ \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2 - \left(\frac{1}{2} \right)^2} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{9}}} = \frac{1}{\ln \frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^x + \frac{1}{3 \ln 9} \cdot 9^x + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} \cdot \end{aligned}$$

$$\ln \left| \frac{x - \frac{1}{2}}{x + \frac{1}{2}} \right| + \frac{1}{3} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{9}} \right| + C = -\frac{4^{-x}}{\ln 4} + \frac{9^x}{6 \ln 3} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2x-1}{2x+1} \right| +$$

$$+ \frac{1}{3} \ln \left| x + \frac{1}{3} \sqrt{9x^2 + 1} \right| + C;$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \int \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} + 1} dx &= \int \frac{(x+1)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} dx = \int (x+1)(\sqrt{x}-1) dx = \\ &= \int \left(x^{\frac{3}{2}} - x + x^{\frac{1}{2}} - 1 \right) dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - x + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx &= \int \left(\sin^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \right) dx = \\ &= \int (1 - \sin x) dx = \int dx - \int \sin x dx = x + \cos x + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{г) } \int \frac{x^2 dx}{x^2 + 9} &= \int \frac{x^2 + 9 - 9}{x^2 + 9} dx = \int \left(1 - \frac{9}{x^2 + 9} \right) dx = \int dx - 9 \int \frac{dx}{x^2 + 9} = \\ &= x - 9 \cdot \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C = x - 3 \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C. \end{aligned}$$

10.3. Келтіру тәсілімен интегралдау

Берілген интеграл таблицалық интеграл болмаған жағдайда кейде интеграл ішіндегі өрнекті түрлендіру арқылы оны таблицалық интегралға келтіруге болады.

10.2-мысал.

$$\text{а) } \int \frac{(\arcsin x)^4}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int (\arcsin x)^4 d \arcsin x = \frac{\arcsin^5 x}{5} + C;$$

$$a) \int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}} = \frac{1}{5} \int (5x-2)^{-\frac{1}{2}} d(5x-2) = \frac{2}{5} \sqrt{5x-2} + C ;$$

$$б) \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{\sqrt{1+(x^2)^2}} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + \sqrt{1+x^4}) + C ;$$

$$в) \int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int e^{x^3} dx^3 = \frac{1}{3} e^{x^3} + C.$$

Берілген мысалдарды қорыта келе мынандай формула аламыз:

$$\int (p(x))^\alpha dp(x) = \frac{(p(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

Сондай-ақ, егер $\int f(x)dx = F(x) + C$ болса, онда

$$\int f(g(x))dg(x) = F(g(x)) + C$$

Мысалы, $\int \frac{dp(x)}{\sin^2 p(x)} = -ctg p(x) + C,$

$$\int \frac{dp(x)}{\alpha^2 + (p(x))^2} = \frac{1}{\alpha} \arctg \frac{p(x)}{\alpha} + C,$$

$$\int \frac{d \sin x}{\sqrt{a^2 - \sin^2 x}} = \arcsin \left(\frac{\sin x}{a} \right) + C, \text{ т.б.}$$

Көрсетілген интегралдарды келесі интегралдау әдісі арқылы таблицалық интегралдарға келтіруге болады.

10.4. Айнымалыны алмастыру тәсілімен интегралдау

Интегралдаудың негізгі тәсілдерінің бірі — айнымалыны алмастыру тәсілі. Ол мына формулаға негізделген

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt \quad (10.6)$$

Мұндағы $x = \varphi(t)$ — берілген аралықта дифференциалданатын функция. (10.6) — формуланы дәлелдейік. Ол үшін осы теңдіктің екі жағынан t бойынша туынды алайық.

$$\left(\int f(x) dx \right)'_t = \left(\int f(x) dx \right)'_x \cdot x'_t = f(x) \cdot \varphi'(t),$$

$$\left(\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \right)'_t = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(x) \cdot \varphi'(t)$$

Осы теңдіктерде анықталмаған интегралдардың бірінші қасиетін және күрделі функцияны дифференциалдау ережесін қолдандық. Сондықтан (10.6) — теңдігінің сол жағы мен оң жағының айырымы тұрақты шамаға тең. Сондықтан анықталмаған интеграл тұрақты шамаға дейінгі дәлдікпен анықталатын болғандықтан (10.6) — теңдік әрқашанда орындалады.

Тиімді табылған айнымалыны алмастыру формуласы берілген интегралды жеңіл интегралдайтын интегралға, ал кейбір жағдайларда таблицалық интегралға жеткізеді. Мысалдар.

10.3-мысал. а) $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$ интегралын есептеп шығару керек.

Шешуі. $x = atgt$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ болсын. Онда $tgt = \frac{x}{a}$, $dx =$

$$= \frac{adt}{\cos^2 t}, \quad x^2 + a^2 = a^2 tg^2 t + a^2 = \frac{a^2}{\cos^2 t}, \quad t = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}. \quad \text{Сондықтан}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \int \frac{adt}{a^3 \cos^2 t} = \frac{1}{a^3} \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2a^3} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2a^3} \cdot$$

$$\left(\int dt + \int \cos 2t dt \right) = \frac{1}{2a^3} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C = \frac{1}{2a^3} (t + \sin t \cdot \cos t) + C.$$

Енді алынған өрнекте қайтадан ескі айнымалы x -ке көшуіміз керек:

$$\sin t = \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}} = \frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \quad \cos t = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}} = \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}};$$

Сондықтан
$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^3} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{ax}{x^2 + a^2} \right) + C;$$

$$b) \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left. \begin{aligned} x &= a \sin t, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \quad \sin t = \frac{x}{a}, \quad t = \arcsin \frac{x}{a} \\ dx &= a \cos t dt, \quad \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = a \cos t \end{aligned} \right\} =$$

$$= a^2 \int \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{a^2}{2} (t + \sin t \cdot \cos t) + C =$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(\arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) + C = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Интегралдың берілу түріне байланысты әр түрлі алмастыру қолданылады. 2-мысалда $x = a \sin t$ алмастыруы арқылы радикалдан (түбірден) құтылды. Сол сияқты, егер де интеграл ішінде $\sqrt{x^2 - a^2}$ функциясы тұрса, онда $x = a \sec t$ алмастыруын қолдану кейде тиімді болады. Өйткені $\sqrt{x^2 - a^2} = a \operatorname{tg} t$. Егер интеграл ішінде $\sqrt{x^2 + a^2}$ функциясы тұрса, онда $x = a \operatorname{tg} t$ алмастыруын жасап, $\sqrt{x^2 + a^2} = a \sec t$ функциясын алуға болады. Кей жағдайда интеграл ішіндегі функцияның түріне байланысты функцияның өзін белгілеу қолайлы болады.

10.4-мысал.

$$\int \frac{(3x^2 - 4)dx}{x^3 - 4x + 5} = \left| \frac{x^3 - 4x + 5 = t,}{dt = (3x^2 - 4)dx} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x^3 - 4x + 5| + C$$

Осындай интегралдар үшін жалпы формула

$$\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$$

10.5-мысал.

$$\begin{aligned} \text{а) } \int x\sqrt{x-1}dx &= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x-1}, \quad t^2 = x-1 \\ x = t^2 + 1, \quad dx = 2tdt \end{array} \right| = \int (t^2 + 1)t \cdot 2tdt = 2 \int (t^4 + t^2)dt = \\ &= \frac{2}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + C = \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C; \end{aligned}$$

$$\text{ә) } \int x^2 e^{x^3} dx = \left| \begin{array}{l} u = x^3, \quad du = 3x^2 dx \\ x^2 dx = \frac{1}{3} du \end{array} \right| = \frac{1}{3} \int e^u du = \frac{1}{3} e^u + C = \frac{1}{3} e^{x^3} + C;$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}} &= \left| \begin{array}{l} x^2 = u, \\ du = 2xdx \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{1}{2} \ln|u + \sqrt{1+u^2}| + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2 + \sqrt{x^4+1}| + C. \end{aligned}$$

Кейде интеграл ішіндегі функцияның түріне байланысты гиперболалық алмастыруларды қолдану тиімді:

10.6-мысал.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + a^2} dx &= \left| \begin{array}{l} x = asht, \quad sht = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \quad ch^2 t - sh^2 t = 1, \\ ch t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2 sh^2 t} = a ch t, \\ dx = a ch t dt \end{array} \right| = \\ &= \int a^2 ch^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int (ch 2t + 1) dt = \frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{2} sh 2t + t \right) + C = \frac{a^2}{2} (sht \cdot ch t + t) + \end{aligned}$$

$$+ C = \left| \begin{aligned} sht &= \frac{x}{2}, \quad cht = \sqrt{1 + sh^2 t} = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a} \\ e' &= cht + sht = \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} \end{aligned} \right| = \frac{a^2}{2} \left(\frac{x\sqrt{x^2 + a^2}}{a^2} + \right.$$

$$\left. + \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} \right| \right) + C = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C_1,$$

$$C_1 = C - \frac{a^2}{2} \ln |a|.$$

10.5. Бөліктеп интегралдау әдісі

Айталық, $u = u(x)$, $v = v(x)$ — дифференциалданатын функциялар болсын. Онда $d(u \cdot v) = u dv + v du$ теңдігі орындалады. Немесе $u dv = d(u \cdot v) - v du$. Осы теңдіктің екі жағынан интеграл алайық

$$\int u dv = \int d(u \cdot v) - \int v du$$

Осыдан (10.3) формуласын қолдану арқылы

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du \quad (10.7)$$

формуласын аламыз. (10.7) формуласын бөліктеп интегралдау формуласы дейді. Кейбір жағдайда бөліктеп интегралдау формуласын қолдану арқылы берілген интегралды алғашқыға қарағанда анағұрлым жеңіл алынатын интегралға келтіруге болады.

10.7-мысал.

$$a) \int \underbrace{\arctg x}_u \underbrace{dx}_{dv} = \left| \begin{aligned} u &= \arctg x, \quad du = d(\arctg x) = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv &= dx. \quad \int dv = \int dx \Rightarrow v = x \end{aligned} \right| = x \arctg x -$$

$$- \int x \cdot \frac{dx}{1+x^2} = x \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{1+x^2} = ((10.4)\text{-мысалды қараңыз}) = \\ = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C;$$

$$\Theta) \int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \int \frac{x^2 + a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Бірінші интеграл таблицалық интеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C. \quad \text{Екінші интегралды бөліктеп}$$

интегралдау әдісімен интегралдаймыз.

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int x \underbrace{\frac{xdx}{\sqrt{x^2 + a^2}}}_{dv} = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx, \\ dv = \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \quad v = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sqrt{x^2 + a^2} \end{array} \right| = \\ = x \cdot \sqrt{x^2 + a^2} - \int \sqrt{x^2 + a^2} dx. \quad \text{Сонымен} \quad \int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \\ = a^2 \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C + x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \sqrt{x^2 + a^2} dx. \quad \text{Осыдан} \\ \int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + C;$$

$$\text{б) } \int \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x}, \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right| = x \ln|x| - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \ln|x| - x + C;$$

$$\text{в) } \int x^3 \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{1}{x} dx, \\ x^3 dx = dv, \quad v = \frac{x^4}{4} \end{array} \right| = \frac{x^4}{4} \ln|x| - \frac{1}{4} \int x^4 \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^4}{4} \ln|x| -$$

$$- \frac{x^4}{16} + C = \frac{x^4}{16} (4 \ln|x| - 1) + C;$$

$$\begin{aligned}
 \text{r) } \int x \operatorname{arctg} x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x, \quad du = \frac{dx}{1+x^2}, \\ x dx = dv, \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \\
 &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = \\
 &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \operatorname{arctg} x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{r) } \int x^2 \sin x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x^2, \quad du = 2x dx, \\ \sin x dx = dv, \quad v = -\cos x \end{array} \right| = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx = \\
 &= \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx, \\ dv = \cos x dx, \quad v = \sin x \end{array} \right| = -x^2 \cos x + 2 \left(x \sin x - \int \sin x dx \right) = \\
 &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{д) } \int (x+2)e^{2x} dx &= \left| \begin{array}{l} u = x+2, \quad du = dx, \\ dv = e^{2x} dx, \quad v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right| = \frac{x+2}{2}e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \\
 &= \frac{x+2}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C.
 \end{aligned}$$

Қарастырылған мысалдарды талдай отырып, бөліктеп интегралдау тәсілін қолдануға болатын интегралдардың түрлерін келтіруге болады. 1. $\int x^n e^{ax} dx$, $\int x^n \sin mx dx$, $\int x^n \cos mx dx$. 2. $\int x^k \ln^n x dx$, $\int x^k \arcsin x dx$, $\int x^k \arccos x dx$, $\int x^k \operatorname{arctg} x dx$, $\int x^k \operatorname{arccotg} x dx$. Мұндағы a, m, k — нақты сандар $k \neq -1$, n — оң бүтін сан. Бірінші топтың интегралдарында u ретінде x^n функциясын алған жөн. Бұл жағдайда бөліктеп интегралдау әдісін n рет қолданады. Екінші топтың интегралдарында dv ретінде $x^k dx$ өрнегін алған жөн.

10.6. Рационал функцияларды интегралдау

$a_0, a_1, \dots, a_n$ — нақты сандар және $a_n \neq 0, n \geq 0$ — бүтін сан болсын.

$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ түріндегі өрнек n -жәрежелі көпмүше деп аталады. Мысалы, $3 + 4x$ — бірінші дәрежелі көпмүше, $-x^3 + 2x - 3$ — үшінші дәрежелі көпмүше болады. Алымы мен бөлімі көпмүшелер болып келетін бөлшек рационал функция болады, яғни екі көпмүшенің қатынасын рационал функция дейді. Рационал функцияға мысал: $\frac{2x+3}{x^2+2}, \frac{2+x^2+x^3}{2x+3}$ т.б. Рационал функцияның

жалпы түрін қарастырайық: $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, мұндағы $P_n(x)$ — n -дәрежелі көпмүше, ал $Q_m(x)$ — m -дәрежелі көпмүше. Егер $n < m$ болса, $R(x)$ — дұрыс бөлшек деп, ал $n \geq m$ болса бұрыс бөлшек деп аталады. Бұрыс бөлшекті интегралдау үшін алдымен алымын бөліміне бөлу арқылы оны көпмүше мен дұрыс бөлшектің қосындысына жіктейміз. Мысалы, $\frac{x^3 - 4x + 5}{x + 3} = x^2 - 3x + 5 - \frac{10}{x + 3}$, өйткені

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 4x + 5 \quad | \quad x + 3 \\
 \underline{x^3 + 3x^2} \quad x^2 - 3x + 5 \\
 -3x^2 - 4x + 5 \\
 \underline{-3x^2 - 9x} \quad 5x + 5 \\
 \underline{5x + 15} \quad -10
 \end{array}$$

Көпмүшені таблицалық интегралдар мен интегралдың

интегралдау жолын көрсетелік. Сонымен $n < m$ болсын. Әрбір $Q_m(x)$ көпмүшені бірінші және екінші дәрежелі көпмүшелердің көбейтіндісіне жіктеп жазуға болады:

$$Q_m(x) = (x-a)^k (x-\sigma)^l \dots (x^2 + 2px + q)^t (x^2 + 2ix + v)^s,$$

мұндағы $k, l, t, s, \dots$ — бүтін сандар. Осыны пайдаланып, жоғары алгебра курсына дұрыс бөлшектің элементар бөлшектерге жіктелетіні дәлелденеді:

$$\begin{aligned} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} &= \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{B_1}{(x-\sigma)} + \\ &+ \frac{B_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{B_l}{(x-\sigma)^l} + \dots + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + 2px + q} + \\ &+ \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + 2px + q)^2} + \dots + \frac{M_tx + N_t}{(x^2 + 2px + q)^t} + \dots \end{aligned} \quad (10.8)$$

Мұндағы $A_1, A_2, \dots, A_k, B_1, B_2, \dots, B_l, \dots, M_1, N_1, M_2, N_2, \dots, M_t, N_t, \dots$ — нақты сандар. Осы сандарды табу үшін (10.8) теңдігінің екі жағын $Q_m(x)$ функциясына көбейтеді. Сонда теңдіктің екі жағында да көпмүше болады. Осы теңдіктен бірдей дәрежелі x -тың алдындағы коэффициенттерді теңестіре отырып, алгебралық теңдеулер жүйесін құрамыз. Алынған теңдеулер жүйесінен $A_1, A_2, \dots$ коэффициенттерінің мәндерін тауып, оларды (10.8) теңдігіне апарып қоямыз. Осылай рационал бөлшектің жіктеуін табамыз. Осы әдісті анықталмаған коэффициенттер тәсілі дейді.

Мысалы, $\frac{2x-3}{x^2-3x+2}$ рационал функциясын элементар

бөлшектерге жіктейік.

Шешуі. $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ болғандықтан (10.8) формула былай жазылады:

$$\frac{2x-3}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}.$$

Осы теңдіктің екі жағын x^2-3x+2 -ге көбейтсек, онда $2x-3 = A(x-2) + B(x-1)$. Сондықтан $(A+B)x - 2A - B = 2x - 3$. Бірдей дәрежелі x -тердің алдындағы коэффициенттерді теңестіреміз:

$$\begin{array}{l|l} x & A+B=2 \\ x^0 & 2A+B=3 \end{array}$$

Осыдан $A=1, B=1$. Сонымен

$$\frac{2x-3}{x^2-3x+2} =$$

$$= \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}. \quad (10.8) \text{ формуладан дұрыс бөлшекті интегралдау үшін}$$

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{B}{(x-a)^k}, \quad \frac{Ax+B}{x^2+2px+q}, \quad \frac{Ax+B}{(x^2+2px+q)^n} \quad \text{жәй бөлшектерін}$$

интегралдай білу керектігін көреміз. (10.8) формуладағы

$x^2+2px+q$ үшмүшесінің нақты түбірлері жоқ, яғни $p^2-q < 0$.

Бұлай болмаған жағдайда біз оны сызықтық көбейткіштерге әрі қарай жіктер едік. Енді көрсетілген жәй бөлшектердің интегралдау жолдарын қарастыралық.

$$1) \int \frac{A dx}{x-a} = A \ln|x-a| + C;$$

$$2) \int \frac{B dx}{(x-a)^k} = -\frac{B}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C, \quad (k > 1);$$

$$3) \int \frac{(Ax+B) dx}{x^2+2px+q}. \quad x^2+2px+q \text{ үшмүшесінің нақты түбірлері}$$

жоқ, яғни $p^2-q < 0$ болсын. Осы үшмүшеден толық квадратты бөліп

шығарамыз: $x^2+2px+q = (x+p)^2 + q - p^2$. Осы теңдіктен $x+p=t$

алмастыруын қолдану тиімді екенін көреміз. Сонда $x=t-p$, $dx=dt$.

Егер $q-p^2$ санын h деп белгілесек, яғни $q-p^2=h > 0$, онда

$$\begin{aligned} \int \frac{(Ax+B)dx}{x^2+2px+q} &= |x=t-p| = \int \frac{At+B-Ap}{t^2+h} dt = \frac{A}{2} \int \frac{2tdt}{t^2+h} + (B-Ap) \cdot \\ &\cdot \int \frac{dt}{t^2+h} = \frac{A}{2} \ln(t^2+h) + \frac{B-Ap}{\sqrt{h}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{h}} + C = \frac{1}{2} \ln(x^2+2px+q) + \\ &+ \frac{B-Ap}{\sqrt{q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}} + C \end{aligned}$$

Енді төртінші интегралды интегралдауға көшейік:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+2px+q)^n} dx, \quad q-p^2 > 0, \quad n > 1$$

Осы интегралды алу үшін жаңа айнымалыға көшеміз: $z = \frac{x+p}{\sqrt{q-p^2}}$.

$$\text{Сонда } x = z\sqrt{q-p^2} - p, \quad dx = \sqrt{q-p^2} dz, \quad z^2+1 = \frac{(x+p)^2}{q-p^2} + 1 =$$

$$= \frac{x^2+2px+q}{q-p^2}. \quad \text{Сондықтан}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{(x^2+2px+q)^n} dx &= \int \frac{A(z\sqrt{q-p^2}-p)+B}{(z^2+1)^n (q-p^2)^n} \sqrt{q-p^2} dz = \\ &= \int \frac{Mz+N}{(z^2+1)^n} dz = M \int \frac{zdz}{(z^2+1)^n} + N \int \frac{dz}{(z^2+1)^n}. \end{aligned}$$

Мұндағы M және N —нақты сандар. Бұлардың мәндерін соңғы теңдіктен айқын тауып алуға болады. Олай болса

$$\int \frac{zdz}{(z^2+1)^n} = \left| \begin{array}{l} z^2+1=t \\ 2zdz=dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^n} = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln|t| + C, & n=1, \\ -\frac{1}{2(n-1)t^{n-1}} + C, & n \neq 1. \end{cases}$$

Сонымен
$$\int \frac{zdz}{(z^2+1)^n} = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln|z^2+1| + C, & n=1, \\ -\frac{1}{2(n-1)(z^2+1)^{n-1}} + C, & n \neq 1. \end{cases}$$

Енді $n > 1$ болсын. Сонда

$$J_n = \int \frac{dz}{(z^2+1)^n} = \int \frac{z^2+1-z^2}{(z^2+1)^n} dz = J_{n-1} - \int \frac{z^2 dz}{(z^2+1)^n}.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{z^2 dz}{(z^2+1)^n} &= \left| \begin{array}{l} u = z, du = dz, \\ dv = \frac{zdz}{(z^2+1)^n}, \quad v = -\frac{1}{(2n-2)(z^2+1)^{n-1}} \end{array} \right| = \\ &= -\frac{z}{(2n-2)(z^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2} J_{n-1}. \end{aligned}$$

Осыдан $J_n = J_{n-1} + \frac{z}{(2n-2)(z^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2n-2} J_{n-1}$, яғни $J_n =$

$$= \frac{z}{(2n-2)(z^2+1)^{n-1}} - \frac{2n-3}{2n-2} J_{n-1}.$$

Осы формуланы рекурренттік формула деп атайды. Реккуренттік формула арқылы J_2 -ні $J_1 = \operatorname{arctg} x + C$ арқылы, ал J_3 -ті J_2 -арқылы таба отырып, ең соңында J_n -ді J_{n-1} арқылы табамыз.

10.7. Иррационал функциялардың кейбір түрлерін интегралдау

Иррационал функцияларды интегралдауда айнымалыны алмастыру арқылы рационал функцияның интегралына келуге болатын кейбір жағдайларды қарастырамыз. $R(u, v)$ арқылы тек төрт

ығатын u мен v -ға тәуелді функцияны белгілейік. Мысалы,

$$R(u, v) = \frac{2u - v}{3 - u^3} \text{ және т.с.с. } \int R(x, \sqrt[3]{x}) dx \text{ түріндегі интегралдар } t = \sqrt[3]{x}$$

алмастыруы арқылы рационал функцияның интегралына келеді.

Мысалы $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}$ интегралын қарастыралық. Интегралдың

ішіндегі функция $\sqrt[3]{x}$ пен $\sqrt{x}$ -ке тәуелді. 2 мен 3 сандарының ең

кіші ортақ еселігі 6 саны болғандықтан, берілген интеграл

$$\int R(x, \sqrt[3]{x}) dx \text{ түріндегі интеграл болады. Сондықтан } t = \sqrt[3]{x}$$

алмастыруын қолданамыз. Сонда $x = t^6$, $dx = 6t^5 dt$, $\sqrt{x} = t^3$, $\sqrt[3]{x} = t^2$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})} = \int \frac{6t^5 dt}{t^2(t^3 + t^2)} = 6 \int \frac{t dt}{t+1} = 6 \int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = 6(t - \ln|t+1|) +$$

$$C = 6(\sqrt[3]{x} - \ln|\sqrt[3]{x} + 1|) + C.$$

Қарастырылған интеграл $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ түріндегі интегралдың

дербес түрі болады. Мұнда $ad \neq cb$. Осы интегралды $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

алмастыруы арқылы рационал функцияның интегралына келтіруге болады.

Мысалы, $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \frac{dx}{1-x}$ интегралын қарайық. $t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

алмастыруын қолданамыз. Сонда $x = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$, $dx = \frac{4tdt}{(t^2 + 1)^2}$,

$$1-x = \frac{2}{1+t^2}, \quad \frac{1}{1-x} = \frac{1+t^2}{2}, \quad \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \frac{dx}{1-x} = \int \frac{t(1+t^2)}{2} \cdot \frac{4tdt}{(t^2+1)^3}$$

$$= 2 \int \frac{t^2 dt}{t^2+1} = 2 \int \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right) dt = 2(t - \arctg t) + C = 2\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \right.$$

$$\left. - \arctg \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) + C.$$

Енді $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ түріндегі интегралдарды қарастыралық.

Мұндай интегралдарға тиімді алмастыру $ax^2 + bx + c$ үшмүшесінен толық квадрат бөліп шығарғаннан кейін көрінеді. Мысалы,

$J = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 10}}$ интегралын интегралдау үшін үшмүшенің толық

квадратын бөліп шығарамыз: $x^2 + 6x + 10 = (x + 3)^2 + 1$. Сондықтан $t = x + 3$ алмастыруын қолданамыз. Сонда

$$J = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} = \ln|t + \sqrt{t^2 + 1}| + C = \ln|x + 3 + \sqrt{x^2 + 6x + 10}| + C.$$

Қарастырылған интегралдан күрделі жағдайларда Эйлер алмастыруларын қолданады.

10.8. Тригонометриялық функцияларды интегралдау

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad -\pi < x < \pi \quad \text{алмастыруы} \quad \text{арқылы} \quad \int R(\sin x, \cos x) dx$$

түріндегі интегралдарды рационал функциялардың интегралдарына келтіруге болады. Өйткені

$$\sin x = \frac{2tg \frac{x}{2}}{1+tg^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-tg^2 \frac{x}{2}}{1+tg^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x = 2arctgt,$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}. \quad \text{Сондықтан} \quad \int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t) dt.$$

$$\begin{aligned} 10.8\text{-мысал.} \quad \int \frac{dx}{\cos x} &= \left| \begin{array}{l} t = tg \frac{x}{2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ x = 2arctgt, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| = 2 \int \frac{dt}{1-t^2} = \\ &= 2 \int \frac{dt}{1-t^2} = \int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt = \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = \ln \left| \frac{1+tg \frac{x}{2}}{1-tg \frac{x}{2}} \right| + C. \end{aligned}$$

Егер $R(u, v)$ функциясы u немесе v бойынша жұп немесе так болса, онда мұндай функцияны интегралдау үшін басқа да алмастырулар қолданылуы мүмкін. Дәлірек айтқанда, мысалы $R(-u, v) = -R(u, v)$ болса, $t = \cos x$ алмастыруы, ал $R(u, -v) = -R(u, v)$ болса, $t = \sin x$ алмастыруы берілген интегралды рационал функцияның интегралдарына келтіреді.

Мысалы, $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx$ интегралын қарастыралық. Бұл жағдайда

$$R(u, v) = \frac{u^3}{v^4}, \quad \text{сондықтан} \quad R(-u, v) = -R(u, v). \quad \text{Демек} \quad \cos x = t,$$

$dt = -\sin x dx$. Осыдан $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2$ болғандықтан

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx &= - \int \frac{(1-t^2)^2 dt}{t^4} = - \int \frac{1-2t^2+t^4}{t^4} dt = - \int \left(\frac{1}{t^4} - \frac{2}{t^2} + 1 \right) dt = \\ &= \frac{1}{3t^3} - \frac{2}{t} + t + C = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{2}{\cos x} - \cos x + C. \end{aligned}$$

Сондай-ақ $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$ интегралында m тақ сан болса, онда $\cos x = t$ алмастыруын, ал n тақ сан болса $\sin x = t$ алмастыруын жасау керек.

$$\begin{aligned} \text{Мысалы, } \int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx &= \left| \begin{array}{l} \cos x = t, \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right| = - \int (1-t^2)t^2 dt = \\ &= \int -(t^4 - t^2) dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + C = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C. \end{aligned}$$

$\int \sin \alpha x \cos \beta x dx$, $\int \sin \alpha x \sin \beta x dx$, $\int \cos \alpha x \cos \beta x dx$ түріндегі интегралдарда тригонометрияның белгілі түрлендірулері арқылы функциялардың көбейтінділерін қосындыларға келтіреміз. Сонда таблицалық интегралдар шығады. Мысалы,

$$\int \sin 9x \sin x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 8x - \cos 10x) dx = \frac{1}{16} \sin 8x - \frac{1}{20} \sin 10x + C.$$

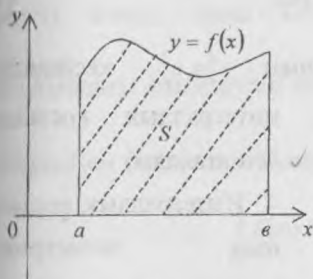
10.9. Элементар функциялар арқылы алынбайтын интегралдар

Дифференциалдаудың негізгі ережелерінен элементар функцияның туындысы элементар функция болатындығы шығады. Функцияның алғашқы функциясын табу (анықталмаған интегралды табу) үшін мұндай қасиет орындалмайды. Алғашқы функциясы элементар функция болмайтын функциялар бар. Элементар функция болмайтын анықталмаған интегралдарды элементар функциялар арқылы алынбайтын интегралдар деп атайды. Мысалы, $\int e^{-x^2} dx$, $\int \sin x^2 dx$, $\int \cos x^2 dx$, $\int \frac{\sin x}{x} dx$, $\int \frac{\cos x dx}{x}$, $\int \frac{dx}{\ln x}$ — алынбайтын интегралдар. Бірақ бұл интегралдарды табуға болмайды деп айта алмаймыз. Оларды табудың жолдарын кейін қарастырамыз.

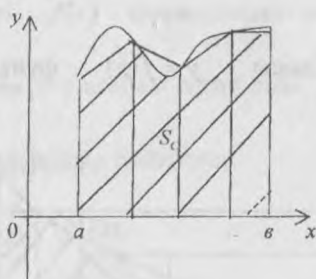
ОН БІРІНШІ ТАРАУ АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛ

11.1. Анықталған интеграл ұғымы, оның геометриялық және экономикалық мағынасы

Қисық сызықты трапецияның ауданы туралы есепті таластыралық. $[a, b]$ сегментінде теріс емес (яғни $f(x) \geq 0$) $y = f(x)$ функциясы берілсін. Жоғарыдан $y = f(x)$ функциясы графигімен, төменнен абсцисса осінің $[a, b]$ кесіндісімен, ал бүйір жақтарынан $x = a$ және $x = b$ түзулерімен қоршалған жазық фигураны қисық сызықты трапеция деп атайды (11.1-суретті қара). Осы қисық сызықты трапецияның ауданы S -ті табу керек. Қисық сызықты



11.1-сурет



11.2-сурет

трапецияның ауданы S -ті табудың жолын қысқаша түсіндірелік. $y = f(x)$ қисығына жеткілікті түрде жақын орналасқан сынық сызықты таңдап аламыз (11.2-сурет). Жоғары шекарасы сынық сызық болатын фигураның ауданы S_c трапециялар аудандарының қосындысынан тұрады. Сынық сызықты $y = f(x)$ қисығына

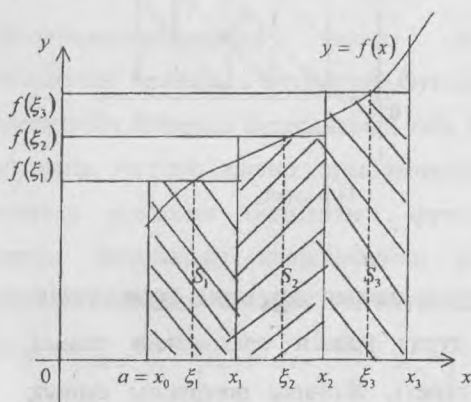
кез келген дәлдікпен жақын алуға болатындықтан, S пен S_C үшін жуық теңдік орындалады $S \approx S_C$. Сынық сызықты $y = f(x)$ қисығына жақынырақ орналастырған сайын осы теңдік дәлірек болады. Сондықтан S ретінде S_C ауданының сынық сызықты $y = f(x)$ қисығына шексіз ұмтылғандағы шегін алуға болады. Енді осы айтылғанды математикалық түрде негіздейміз. Ол үшін интегралдық қосынды ұғымын енгіземіз. $[a, \theta]$ кесіндісінде $y = f(x)$ функциясы берілсін. $y = f(x)$ кесіндісін $x_0, x_1, \dots, x_n$ ($a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = \theta$) нүктелері арқылы n элементар кесінділерге (бөліктерге) бөлеміз: $[a, \theta] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_{n-1}, x_n]$. Ұзындығы $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ болатын әрбір $[x_{i-1}, x_i]$ элементар кесіндінің ішінде жатқан бір ξ_i нүктесін аламыз. Әрине $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$. Сонда

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad (11.1)$$

қосындысы $y = f(x)$ функциясының $[a, \theta]$ кесіндісіндегі

интегралдық қосындысы деп аталады.

Интегралдық қосындының геометриялық мағынасына тоқталалық. $y = f(x)$ функциясы $[a, \theta]$ сегментінде теріс емес болсын. Бұл жағдайда (11.1) интегралдық қосындының әрбір мүшесі $f(\xi_i) \Delta x_i$ қырлары $f(\xi_i)$ және Δx_i -ге тең тік



11.3-сурет

төртбұрыштың ауданына тең. Осы ауданды S_i -мен белгілейік (11.3-суретті қара). Сондықтан (11.1) интегралдық қосынды жоғары шекарасы $y = f(\xi_i)$, ($i = \overline{1, n}$) түзулерінің кесінділерінен құралған сынық сызық, ал төменгі шекарасы $[a, b]$ кесіндісі болатын, бұйыр жақтан $x = a$, $x = b$ түзулерімен шектелген фигураның ауданына тең:

$$S_C = S_1 + S_2 + \dots + S_n$$

Анықталған интегралдың анықтамасын беру үшін (11.1)-интегралдық қосындыны қарастырамыз. $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$ болсын.

Әрине, λ - $[a, b]$ сегменті бөліктерінің ең үлкен ұзындығы.

Анықтама. Егер λ саны нөлге ұмтылғанда (11.1)-интегралдық қосынды үшін ақырлы шек бар болып, ол $[a, b]$ кесіндісін дербес бөліктерге бөлу жолына және ξ_i нүктелерін тандап алу тәсіліне тәуелсіз болса, онда ол шекті $f(x)$ функциясының $[a, b]$ аралығындағы анықталған интегралы деп атайды және оны $\int_a^b f(x) dx$

символымен белгілейді. Сонымен анықтама бойынша

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

Мұндағы a санын интегралдың төменгі шегі, ал b санын — жоғары шегі дейді. $f(x)$ — интеграл ішіндегі функция, $f(x) dx$ — интеграл ішіндегі өрнек деп аталады. Әрине $\lambda \rightarrow 0$ болғанда $n \rightarrow \infty$. Егер

$\int_a^b f(x) dx$ саны бар болса, онда $f(x)$ функциясы $[a, b]$ сегментінде

интегралданатын функция деп аталады. x айнымалысын интегралдың параметрі дейді. Анықталған интеграл нақты сан

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(t)dt$$

Анықтама бойынша $a < b$. Егер $a > b$ болса, онда

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \quad (11.2)$$

теңдігі арқылы анықталған интегралды анықтаймыз. Сонда теңдіктің оң жағындағы интеграл интегралдық қосындының шегі болады. Сонымен, интегралдың қандай шегі үлкен екендігі бізге бәрібір.

Егер (11.2) теңдікте $b = a$ деп алсақ, онда $\int_a^a f(x)dx = -\int_a^a f(x)dx$.

Сондықтан

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \quad (11.3)$$

Енді анықталған интегралдың геометриялық мағынасына тоқталалық. $y = f(x)$ функциясы $[a, b]$ аралығында теріс емес болсын. $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$ санын қарайық. λ саны нөлге ұмтылғанда жоғарыда айтылған сынық сызық $y = f(x)$ қисығына шексіз жуықтайды. Сондықтан сынық сызықпен жоғарыдан қоршалған аудан қисық сызықты трапециямен қоршалған ауданға шексіз ұмтылады. Бұдан біз қисық сызықты трапеция ауданының $[a, b]$ аралығында $f(x)$ функциясының анықталған интегралына тең екендігін көреміз:

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Анықталған интегралдың экономикалық мағынасы.

$z = f(t)$ функциясы бір өндіріс өнімділігінің уақытқа байланысты өнеруін сипаттасын. $[0, T]$ уақыт аралығында өндірілген өнім мөлшерін анықтайық. Осы өнім мөлшерін U мен белгілейміз. Егер өндірістің өнімділігі $[t, t + \Delta t]$ уақыт аралығында өзгермесе ($f(t) = C$), онда осы уақыт аралығында өндірілген өнім $\Delta u = f(t) \cdot \Delta t$ формуласымен анықталады. Жалпы жағдайда $\Delta u \approx f(\xi) \cdot \Delta t$ жуық формуласы орындалады. Мұнда $\xi \in [t, t + \Delta t]$. Δt мәні кішірек болған сайын бұл теңдіктің дәлдігі өсе береді. Жалпы жағдайды қарастыралық. Ол үшін $[0, T]$ уақыт аралығын $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$ нүктелерімен n бөлікке бөлеміз: $[0, T] = [t_0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \dots \cup [t_{n-1}, t_n]$. $[t_{i-1}, t_i]$ уақыт аралығында өндірілген Δu_i өнімі үшін $\Delta u_i \approx f(\xi_i) \cdot \Delta t_i$ жуық теңдігі орындалады. Мұнда $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Сонда

$$u \approx \sum_{i=1}^n \Delta u_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta t_i.$$

$\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta t_i\}$ саны нөлге ұмтылған сайын бұл жуық теңдіктің дәлдігі өсе береді. Сондықтан

$$u = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta t_i$$

Анықталған интегралдың анықтамасын ескере отырып, осы теңдікті былай жазамыз

$$u = \int_0^T f(t) dt$$

Сонымен, егер $f(t)$ — t уақыттағы еңбек өнімділігі болса, онда

$\int_0^T f(t)dt$ интегралы $[0, T]$ уақыт аралығындағы өндірілген өнімнің

көлемін көрсетеді.

Интегралдың анықтамасына тағы да тоқталалық. Әрине, кез келген функция үшін (11.1) қосындысының шегі болмауы мүмкін. Қандай функцияның анықталған интегралы болады? Осы сұраққа әзірше былай жауап береміз:

Теорема. (анықталған интегралдың бар болуының жеткілікті шарты). $[a, b]$ сегментінде үзіліссіз кезкелген $y = f(x)$ функциясының осы аралықта анықталған интегралы бар.

11.2. Анықталған интегралдың қасиеттері

Бұл бөлімде интегралданатын функцияларды қарастырамыз. Анықталмаған интеграл мен анықталған интегралдардың кейбір қасиеттері бірдей. Алдымен осыларға тоқталалық.

1. Тұрақты көбейткішті интегралдың сыртына шығаруға болады, яғни

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx, \quad (11.4)$$

мұнда α — нақты сан.

Дәлелдеуі. Мына теңдікті пайдаланамыз:

$$\sum_{i=1}^n \alpha f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \alpha \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

Осы теңдікте λ нөлге ұмтылғанда шекке көшсек анықталған интегралдың анықтамасы бойынша (11.4) теңдік шығады.

2. Екі функцияның қосындысының (айырымының) анықталған интегралы олардың анықталған интегралдарының қосындысына (айырымына) тең, яғни

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx \quad (11.5)$$

Бұл қасиет бірінші қасиет сияқты анықтама арқылы дәлелденеді.

Енді анықталған интегралдың тек өзіне тән қасиеттерін қарастыралық.

3. Егер $a < c < b$ болса, онда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (11.6)$$

Бұл қасиет те анықталған интегралдың анықтамасы арқылы дәлелденіледі. $[a, b]$ сегменті үшін интегралдық қосынды $[a, c]$ және $[c, b]$ сегменттері үшін интегралдық қосылғыштардың қосындысына тең. Осы теңдікте λ саны нөлге ұмтылғанда шекке көшу жеткілікті. (11.6) — теңдік кез келген a, b және c сандары үшін орындалатынын дәлелдейік. $a < c < b$ болсын. Онда

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_b^c f(x) dx.$$

Осыдан $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$. Сондықтан (11.2) теңдік бойынша (11.6) теңдік орындалады.

4. Егер $[a, b]$ кесіндісінде $f(x) \leq g(x)$ болса, онда

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \quad (11.7)$$

Дәлелдеуі. $f(x) \leq g(x)$ болғандықтан $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \cdot \Delta x_i$.

Осы теңсіздікте λ саны нөлге ұмтылғанда шекке көшсек (11.7) теңсіздігі шығады.

Салдар. Егер $[a, b]$ кесіндісінде $m \leq f(x) \leq M$ (m, M — нақты сандар) болса, онда

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \quad (11.8)$$

Дәлелдеуі. Төртінші қасиет бойынша $\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$, ал

$$\text{бірінші қасиет бойынша } \int_a^b m dx = m \int_a^b dx = m(b-a), \quad \int_a^b M dx =$$

$$= M \int_a^b dx = M(b-a). \text{ Сондықтан (11.8) теңсіздіктер орындалады.}$$

$\int_a^b dx = (b-a)$ теңдігі анықталған интегралдың геометриялық мағынасынан шығады.

5. Орта мән туралы теорема. Егер $y = f(x)$ функциясы $[a, b]$ сегментінде үзіліссіз болса, онда $[a, b]$ сегментінен

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a) \quad (11.9)$$

теңдігі орындалатындай ξ саны табылады.

Дәлелдеуі. $m = \min_{x \in [a, b]} f(x), \quad M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$ болсын. $[a, b]$

сегментінде үзіліссіз функцияның қасиеті бойынша $m \leq f(x) \leq M$.

Онда (11.8) теңсіздіктері бойынша

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

$y = f(x)$ функциясы үзіліссіз болғандықтан m мен M -нің арасында барлық санды қабылдайды. Сондықтан $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(\xi)$ теңдігі орындалатындай $[a, b]$ сегментінен ξ саны табылады.

11.3. Ньютон-Лейбниц формуласы

Егер $y = f(x)$ функциясы $[a, b]$ сегментінде интегралданатын болса, онда ол $[a, b]$ сегментінің ішінде жатқан кез келген $[a, x]$ сегментінде де интегралданады. Мұнда $x \in [a, b]$.

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (11.10)$$

функциясын қарастыралық. $\Phi(x)$ -ті айнымалы жоғары шегі бар интеграл деп атайды. $\Phi(x)$ функциясының қасиеттерін қарайық.

1-теорема. Егер $f(x)$ функциясы $[a, b]$ сегментінде үзіліссіз болса, онда $\Phi(x)$ функциясы да $[a, b]$ сегментінде үзіліссіз болады.

Дәлелдеуі. $[a, b]$ сегментінде жатқан кез келген x санын қарастырамыз. $x + \Delta x \in [a, b]$ болатындай Δx берілсін. (11.1) және (11.2) теңдіктері бойынша

$$\Phi(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = \Phi(x) + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt$$

Орта мән туралы теорема бойынша $\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = f(\xi) \Delta x$ теңдігі орындалатындай $\xi \in [x, x + \Delta x]$ саны табылады. Сондықтан

$$\Phi(x + \Delta x) = \Phi(x) + f(\xi) \Delta x \quad (11.11)$$

Осы теңдіктен $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta \Phi = 0$ теңдігі шығады, яғни $\Phi(x)$ функциясы x нүктесінде үзіліссіз.

2-теорема. $f(x)$ функциясы $[a, b]$ сегментінде үзіліссіз болсын. Онда

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x) \quad (11.12)$$

Дәлелдеуі. (11.11) формуласын пайдаланамыз. Сонда

$$\frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = f(\xi) \quad (11.13)$$

Мұнда $\xi \in [x, x + \Delta x]$, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = f(x)$ болғандықтан, (11.13)

теңдікте Δx нөлге ұмтылғанда шекке көшсек (11.12) теңдігі шығады.

Салдар. $[a, b]$ сегментінде үзіліссіз кезкелген $f(x)$ функциясының осы сегментте алғашқы функциясы бар, ол $\int_a^x f(t) dt$ функциясына тең.

Енді интегралды есептеулердің негізгі формуласы Ньютон-Лейбниц формуласына көшелік.

Негізгі теорема. $y = f(x)$ функциясы $[a, b]$ сегментінде үзіліссіз және $F(x)$ —оның осы сегменттегі кез келген алғашқы функциясы болсын. Онда

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (11.14)$$

Дәлелдеуі. $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы болсын. Онда (11.10) формуласы мен берілген $\Phi(x)$ функциясы да $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы

болғандықтан $F(x) = \Phi(x) + C$ теңдігі орындалады. Мұндағы C — тұрақты шама. Олай болса

$$F(b) - F(a) = (\Phi(b) + C) - (\Phi(a) + C) = \Phi(b) - \Phi(a) =$$

$$= \int_a^b f(x) dx - \int_a^a f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

(11.14) формуласы Ньютон-Лейбниц формуласы деп аталады. Ньютон-Лейбниц формуласы анықталған интегралды есептеу үшін өте қолайлы құрал. Оны қолдану үшін интеграл ішінде жатқан функцияның бір алғашқы функциясын білу жеткілікті.

$$11.1\text{-мысал. а) } \int_0^2 x^3 dx = \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} = 4,$$

$$\text{ә) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = -\left. \frac{\cos 2x}{2} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\cos \frac{\pi}{2}}{2} + \frac{\cos 0}{2} = \frac{1}{2}.$$

11.4. Айнымалыны ауыстыру және бөліктеп интегралдау жолдары арқылы анықталған интегралды есептеу

Анықталмаған интегралды есептеудегі сияқты анықталған интегралды есептеуде кейбір жағдайларда айнымалыны ауыстыру мен бөліктеп интегралдау тәсілдерін қолдану тиімді болады. Сондықтан осы тәсілдерді қарастырамыз.

1-теорема. $x = \varphi(t)$ функциясының $[\alpha, \beta]$ сегментінде үзіліссіз туындысы бар және $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ болсын, ал $y = f(x)$ функциясы $x = \varphi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ түрінде берілген әрбір x нүктесінде үзіліссіз болсын. Сонда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \quad (11.15)$$

теңдігі әрқашанда орындалады.

(11.15) формуласы анықталған интеграл үшін айнымалыны алмастыру формуласы деп аталады.

Дәлелдеуі. $F(x)$ және $\Phi(t)$ функциялары $f(x)$ және $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ функцияларының алғашқы функциялары болсын. Онда $F(\varphi(t))$ функциясы да $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ функциясының алғашқы функциясы болады (алдыңғы тарауды кара). Олай болса $\Phi(t) = F(\varphi(t)) + C$ болады. Мұндағы C — тұрақты шама, $t \in [\alpha, \beta]$. Сондықтан

$$\Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = (F(\varphi(\beta)) + C) - (F(\varphi(\alpha)) + C) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$$

Осы теңдіктен Ньютон-Лейбниц формуласы бойынша (11.15) формула шығады.

$$11.2\text{-мысал.} \int_0^4 \sqrt{16 - x^2} dx = \left. \begin{array}{ll} x = 4 \sin t, & x = 4 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ dx = 4 \cos t dt, & x = 0 \Rightarrow t = 0 \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{16 - 16 \sin^2 t} \cdot 4 \cos t dt = 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt =$$

$$= 8 \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 8 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2} - 0 - 0 \right) = 4\pi.$$

2-теорема. $u = u(x)$ және $v = v(x)$ функцияларының $[a, b]$ сегментінде үзіліссіз туындылары бар болсын. Онда

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du \quad (11.16)$$

теңдігі орындалады. Мұндағы $u \cdot v \Big|_a^b = u(b) \cdot v(b) - u(a) \cdot v(a)$. (10.16)-

формула анықталған интегралды бөліктеп интегралдау формуласы деп аталады.

Дәлелдеуі. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ тендігінен $u \cdot v$ функциясының $u' \cdot v + u \cdot v'$ функциясы үшін алғашқы функция болатындығы шығады. Сондықтан Ньютон-Лейбниц формуласы бойынша

$$u \cdot v \Big|_a^b = \int_a^b (u' \cdot v + u \cdot v') dx = \int_a^b u' \cdot v dx + \int_a^b u \cdot v' dx,$$

$$du = u'(x) dx, \quad dv = v'(x) dx$$

болғандықтан соңғы тендіктен (11.16) -формула шығады.

$$\begin{aligned} \text{11.3-мысал.} \quad \int_1^e x^2 \ln x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x}, \\ dv = x^2 dx, \quad v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right| = \frac{x^3}{3} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 dx = \\ &= \frac{e^3}{3} \ln e - \frac{1}{3} \ln 1 - \frac{1}{9} x^3 \Big|_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{9} e^3 + \frac{1}{9} = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

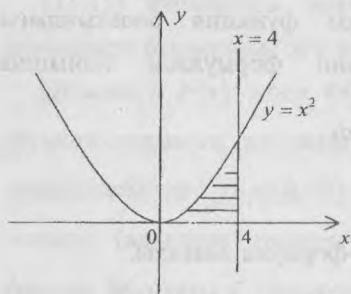
11.5. Анықталған интегралдың геометриялық қолданулары

1. *Жазық фигураның ауданын табу.* $y = f(x)$ функциясы $[a, b]$ сегментінде теріс емес және үзіліссіз болсын. Онда анықталған интегралдың геометриялық мағынасы бойынша жоғарыдан $y = f(x)$ функциясының графигімен қоршалған қисық сызықты

трапецияның ауданы $S = \int_a^b f(x) dx$ интегралына тең болады, яғни

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

11.4-мысал. $y = x^2$, $x = 4$ және абсцисса осімен қоршалған фигураның ауданын табу керек.



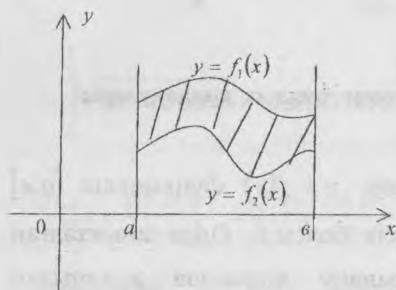
Шешуі. Фигураны жазықтықтағы декарт координаталар жүйесінде бейнелейміз. Формула бойынша

$$S = \int_0^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^4 = \frac{64}{3} = 21\frac{1}{3}$$

Жазық фигура жоғарыдан $y = f_1(x)$ функциясының, ал төменнен $y = f_2(x)$ функциясының

графиктерімен және $x = a$, $x = b$ түзулерімен қоршалсын. Сонда $0 \leq f_2(x) \leq f_1(x)$, $a \leq x \leq b$ жағдайында фигураның ауданын

$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx \quad (11.17)$$



11.4-сурет

формуласымен табуға болады.

Бұл формула берілген аудан жоғарыдан $f_1(x)$ функциясы және $f_2(x)$ функциясы графиктерімен қоршалған екі ауданның айырмасы болғандықтан шығып отыр (11.4-сурет).

(11.17) формуласы $f_1(x)$ пен

$f_2(x)$ функциялары оң болмаған жағдайда да орындалады.

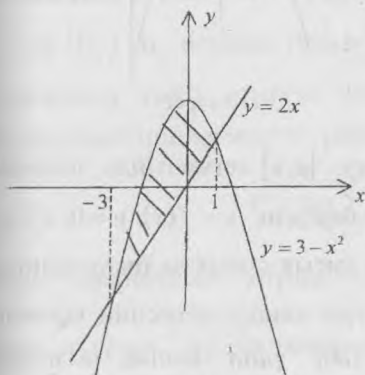
11.5-мысал. $y = 2x$ және $y = 3 - x^2$ функцияларының графиктерімен қоршалған фигураның ауданын табу керек.

Шешуі. Осы екі қисықтың қиылысу нүктелерінің абсциссаларын табамыз:

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 3 - x^2 \end{cases} \Rightarrow 2x = 3 - x^2 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 3.$$

Енді осы функциялардың графиктерін сызамыз (11.5-сурет). Сонымен (11.17) - формула бойынша

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^1 (3 - x^2 - 2x) dx = \left(3x - \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_{-3}^1 = 3 - \frac{1}{3} - 1 - (-9 + 9 - 9) = \\ &= 2 - \frac{1}{3} + 9 = 11 - \frac{1}{3} = 10\frac{2}{3}. \end{aligned}$$



11.5-сурет

Енді (11.17) формуланың дербес түрін қарастыралық. $y = f(x)$ функциясы $[a, b]$ сегментінде оң емес және үзіліссіз болсын. Онда $y = -f(x)$ функциясының графигі $y = f(x)$ функциясының графигіне абсцисса осі бойынша симметриялы болады. Сондықтан анықталған интегралдың геометриялық мағынасы бойынша төменнен $y = f(x)$

функцияның графигімен қоршалған трапецияның ауданы

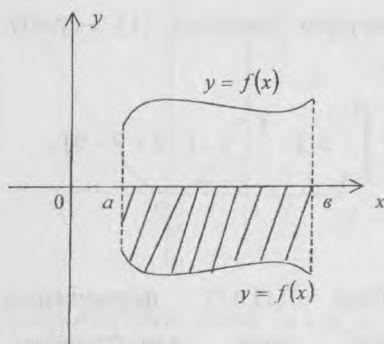
$$S = - \int_a^b f(x) dx \quad (11.18)$$

формуласымен есептелінеді ((11.6-суретті қара).

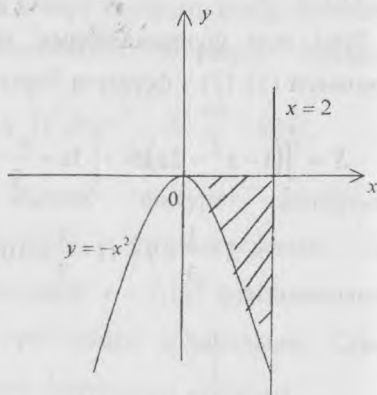
11.6-мысал. $y = -x^2$, $x = 2$, $y = 0$ сызықтарымен қоршалған фигураның ауданын табу керек (11.7-сурет).

Шешуі. (11.18) формула бойынша

$$S = - \int_0^2 (-x^2) dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = 2 \frac{2}{3};$$



11.6-сурет

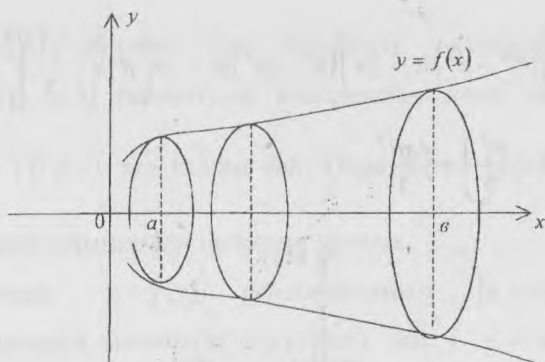


11.7-сурет

2. *Айналу денесінің көлемін есептеу.* $[a, b]$ сегментінде таңбасы тұрақты, үзіліссіз $y = f(x)$ функциясы берілсін. $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ және $x = b$ сызықтарымен қоршалған қисық сызықты трапецияның абсцисса осін айналғанда пайда болатын айналу денесінің көлемін тауып көрелік (11.8-сурет). Оны табу үшін қисық сызықты трапецияның ауданын табу жолын қолданамыз. Ол үшін $[a, b]$ кесіндісін $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ нүктелерімен n бөлікке бөлеміз және әрбір $[x_{i-1}, x_i]$ бөлігінен бір ξ_i нүктесін тандап аламыз. Сонда

$$\sum_{i=1}^n \pi f^2(\xi_i) \cdot \Delta x_i \quad (11.19)$$

қосындысы іздеп отырған көлемнің жуық мәні болады. Өйткені қосындының әрбір i - мүшесі биіктігі $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ болатын, ал



11.8-сурет

табанының радиусы $f(\xi_i)$ болатын цилиндрдің көлемі $V_i = \pi f^2(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ болады. Әрине Δx_i мәні кіші болған сайын (11.19) қосындысы іздеп отырған көлемді дәлірек береді. Сондықтан айналу денесінің көлемі V үшін

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi f^2(\xi_i) \cdot \Delta x_i \quad (11.20)$$

теңдігі орындалады. Мұнда $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$. (11.20) - теңдіктің оң жағы $\varphi(x) = \pi f^2(x)$ функциясының интегралдық қосындысының шегі болғандықтан

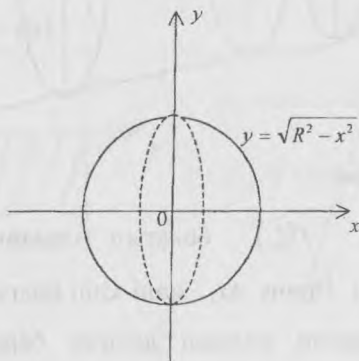
$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx \quad (11.21)$$

формуласы орындалады.

11.7-мысал. $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \leq x \leq R$ қисығының абсцисса осін айналғанда шығатын дененің көлемін табу керек.

Шешуі. Әрине, қарастырып отырған денеміз радиусы R -ге тең шар болатын (11.9-сурет). (11.21)-формула бойынша

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2) dx = 2\pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^R = \\
 &= 2\pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{4\pi R^3}{3}.
 \end{aligned}$$



11.9-сурет

11.6. Меншіксіз интегралдар

Өткен тақырыптардағы интегралдардың төменгі және жоғары шектері — ақырлы сандар және интеграл ішіндегі функция — интегралдау аралығында ақырлы функция болды. Өмірде осындай анықталған интегралдар ұғымын кеңейту қажеттілігі жиі туады. Сондықтан біз енді жоғары немесе төменгі шектері немесе екі шегі де ақырсыз болатын және интегралдау аралығында интегралдың ішіндегі функция ақырсыз болатын интегралдар ұғымын енгіземіз. Мұндай интегралдар меншіксіз интегралдар деп аталады.

1. Ақырсыз шектері бар меншіксіз интегралдар. $y = f(x)$ функциясы $[a, t]$ сегментінде анықталсын және интегралдансын.

Мұндағы t ($t \geq a$) — кез келген сан. Онда $\Phi(t) = \int_a^t f(x) dx$ — кез келген t ($t \geq a$) үшін анықталған функция болады.

Анықтама. $y = f(x)$ функциясының $[a, +\infty)$ жартылай интервалындағы меншіксіз интегралы деп $t \rightarrow +\infty$ -ке ұмтылғанда $\Phi(t)$ функциясының шегін айтамыз, оны $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ символымен

белгілейміз, яғни

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx \quad (11.22)$$

Егер (11.22) теңдігінің оң жағындағы шек ақырлы болса, онда меншіксіз интегралды жинақты дейді, ал ол ақырсыз болса немесе шек болмаса, онда меншіксіз интегралды жинақсыз дейді.

Меншіксіз интегралдармен жұмыс істеу үшін мынандай екі есепті қарастырады:

- а) берілген меншіксіз интегралдың жинақтылығын зерттеу;
- ә) интеграл жинақты болған жағдайда, оның мәнін есептеу.

11.8-мысал. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{dx}{x^3} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left. \frac{x^{-2}}{-2} \right|_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}.$

(11.22) формуласымен берілген меншіксіз интеграл сияқты $(-\infty, a]$ жартылай интервалында берілген меншіксіз интегралды анықтауға болады:

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x) dx \quad (11.23)$$

Бұл интегралдың да жинақтылығы (11.22) интегралы сияқты анықталады. Енді меншіксіз интегралды $(-\infty, \infty)$ интервалында

анықтаймыз. Кез келген бір a саны үшін $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ және $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

меншіксіз интегралдары жинақталатын болсын. Онда $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

меншіксіз интегралын мына теңдік

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx \quad (11.24)$$

бойынша анықтаймыз. Мұндай жағдайда $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ интегралы

жинақталады дейді. Егер де (11.24) теңдіктің оң жағындағы интегралдардың ең болмағанда біреуі жинақсыз болса, онда

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ меншіксіз интегралын жинақсыз дейді.

$$11.9\text{-мысал. а) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^1 \frac{dx}{1+x^2} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^1 \frac{dx}{1+x^2} +$$

$$+ \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \arctg x \Big|_t^1 + \lim_{t \rightarrow +\infty} \arctg x \Big|_1^t = \frac{\pi}{4} - \lim_{t \rightarrow -\infty} \arctg t +$$

$$+ \lim_{t \rightarrow +\infty} \arctg t - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

ә) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{2x} dx$ интегралының жинақталуын зерттеу керек.

$$\text{Шешуі. } \int_{-\infty}^{\infty} e^{2x} dx = \int_{-\infty}^0 e^{2x} dx + \int_0^{\infty} e^{2x} dx \text{ болғандықтан } \int_{-\infty}^0 e^{2x} dx \text{ және}$$

$$\int_0^{\infty} e^{2x} dx \text{ интегралдарының жинақтылығын зерттейміз. } \int_{-\infty}^0 e^{2x} dx =$$

$\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 e^{2x} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^0}{2} - \frac{e^{2t}}{2} \right) = \frac{1}{2}$; Сонымен бірінші интеграл

жинақты. Бірақ, $\int_0^{\infty} e^{2x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{2x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{2t}}{2} - \frac{1}{2} \right) = +\infty$

болғандықтан, екінші интеграл жинақсыз. Сондықтан $\int_{-\infty}^{\infty} e^{2x} dx$

интегралы жинақсыз. Ықтималдылық теориясында $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

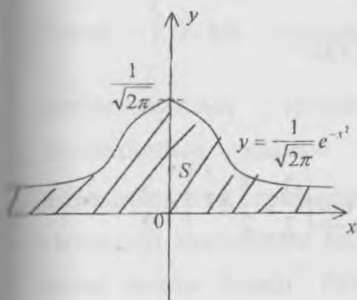
түріндегі Эйлер-Пуассон меншіксіз интегралы кездеседі. Математиканың терең оқылатын курстарында

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi} \quad (11.25)$$

теңдігі дәлелденіледі. Бұдан

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{Гаусс қисығымен}$$

жоғарыдан шектелген қисық сызықты трапецияның ауданы 1-ге тең болатындығы шығады (11.10-сурет).



11.10-сурет

2. Ақырсыз функцияның меншіксіз интегралы.

$y = f(x)$ функциясы $[a, b)$ жартылай интервалында үзіліссіз,

бірақ ақырсыз болсын, яғни $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$ мәні ақырсыз немесе

анықталмаған.

Анықтама. Егер $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_a^{a+\delta} f(x)dx$ шегі бар және ақырлы болса, онда

ол шек $y = f(x)$ функциясының $[a, e)$ аралығындағы меншіксіз интегралы деп аталады және ол $\int_a^e f(x)dx$ символымен белгіленеді.

Сонымен

$$\int_a^e f(x)dx = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_a^{a+\delta} f(x)dx \quad (11.26)$$

Осы жағдайда меншіксіз интеграл жинақты дейді. Егер (11.26)-ы шек ақырсыз болса немесе анықталмаса, меншіксіз интегралды жинақсыз дейді. (11.26) меншіксіз интегралы сияқты $(a, e]$ жартылай интервалында үзіліссіз бірақ $x = a$ нүктесінде ақырсыз $y = f(x)$ функциясының меншіксіз интегралы анықталады:

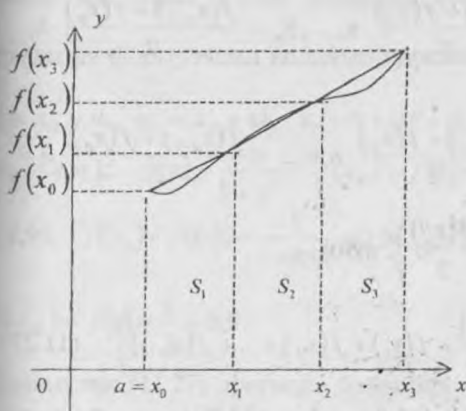
$$\int_a^e f(x)dx = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{a+\delta}^e f(x)dx.$$

11.10-мысал.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{\delta}^1 x^{-\frac{1}{3}} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{2}{3}} \Big|_{\delta}^1 = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \delta^{\frac{2}{3}} \right) = \frac{3}{2}.$$

11.7. Анықталған интегралды жуықтап есептеу

Әрине, анықталған интегралдарды есептеудің ең ыңғайлы және тиімді жолы ол Ньютон-Лейбниц формуласын қолдану. Бірақ интегралдың ішінде жатқан функцияның алғашқы функциясы барлық жағдайда оңай табылмайды. Сондықтан практикада көп жағдайда анықталған интегралды есептеу үшін жуықтап есептеу



11.11-сурет

жолдарын қолданады. Қазіргі есептеу техникаларының дамуына байланысты жуықтап есептеу жолдарының маңызы күшейе түсуде. Анықталған интегралды жуықтап есептеу жолдары көп. Біз осы пунктте жуықтап есептеудің тек бір жолына — трапеция формуласына тоқталамыз. $[a, b]$

кесіндісінде $y = f(x)$ функциясы үзіліссіз және теріс емес болсын.

Онда $\int_a^b f(x) dx$ анықталған интегралы жоғарыдан $y = f(x)$

функциясының графигімен шектелген қисық сызықты трапецияның ауданын береді. Сондықтан жоғарыдан $y = f(x)$ функциясының графигіне жеткілікті жақын орналасқан сынық сызықпен қоршалған фигураның ауданы анықталған интегралдың жуық мәнін береді. Осы сынық сызықты салу үшін $y = f(x)$

кесіндісін ұзындықтары $h = \frac{b-a}{n}$ болатын тең n бөлікке бөлеміз.

Әрбір $[x_{i-1}, x_i]$ кесіндісінде $y = f(x)$ функциясы графигінің доғасын оны керіп тұрған хордамен алмастырамыз (11.11-суретті қара).

Сонда $x_i = x_0 + i \cdot h$; $i = 1, 2, 3, \dots, n$; $\int_a^b f(x) dx \approx S_1 + S_2 + \dots + S_n$

Мұндағы S_k табандары $f(x_{k-1}), f(x_k)$ болатын, биіктігі h -қа тең трапецияның ауданы, яғни

$$S_1 = \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} \cdot h, S_2 = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \cdot h, \dots, S_n = \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} \cdot h,$$

Сондықтан,

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} \cdot h + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \cdot h + \dots + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} \cdot h =$$

$$= h \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + \frac{f(x_n)}{2} \right), \text{ яғни}$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) \right) \quad (11.27)$$

Мұнда $x_0 = a, x_k = x_0 + kh, (k = 1, 2, 3, \dots, n).$ (11.27) формула

трапеция формуласы деп аталады. Бұл формуланы біз $f(x) \geq 0$ деп алып, қорытып шығардық. Бірақ, бұл формула кез келген үзіліссіз функция үшін де орындалады. Енді (11.27) формуланы пайдаланған кездегі жіберілетін қатенің шамасын қарастыралық. (11.27) жуық теңдіктің оң жағындағы өрнекті $S(n)$ символымен белгілейміз.

Сонда

$$\Delta = \left| \int_a^b f(x) dx - S(n) \right|$$

шамасы трапеция формуласын қолданғандағы жіберілетін абсолюттік қатені береді. Егер $M = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$ болса, онда абсолют қате үшін

$$\Delta \leq \frac{(b-a)^3}{12h^2} M \quad (11.28)$$

теңсіздігін дәлелдеуге болады. Мысалы, Ньютон-Лейбниц формуласын қолдансақ,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} \approx \frac{3,14159}{4} \approx 0,78539$$

болар еді. Енді $n=10$ болғанда осы интегралды есептеу үшін

трапеция формуласын қоланып керелік: $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0,1$,

$a = x_0 = 0$, $x_k = x_0 + kh$, $x_1 = 0 + 0,1 = 0,1$, $x_2 = 0 + 0,2 = 0,2, \dots, x_k = 0, k$;

$x_{10} = b = 1$; $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $f(x_0) = f(0) = 1$, $f(x_1) = f(0,1) = \frac{1}{1+0,01} \approx$

$\approx 0,99$, $f(x_2) = f(0,2) = \frac{1}{1+0,04} \approx 0,96, \dots, f(x_9) = f(0,9) = \frac{1}{1+0,81} \approx 0,55$,

$f(x_{10}) = f(1) = \frac{1}{2} = 0,5$.

Сондықтан (11.27) формула бойынша

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{10} \left(\frac{1+0,5}{2} + 0,99 + 0,96 + \dots + 0,55 \right) = 0,782$$

Енді осы формуланы қолданғандағы қатені есептейік. $y = \frac{1}{1+x^2}$

функциясы $[0,1]$ аралығында монотонды кемімелі, сондықтан

$f''(x) = \frac{-2(1-7x^2)}{(1+x^2)^3}$, $f''(0) = -2$ болғандықтан $M_2 = |f''(0)| = +2$. Олай

болса (11.27) формуласы бойынша

$$\Delta \leq \frac{1}{12 \cdot 10^2} \cdot 2 = \frac{2}{1200} = \frac{1}{600} \approx 0,001.$$

11.8. Анықталған интеграл ұғымын экономикада қолдану

11.1-пунктте біз анықталған интегралдың экономикалық мағынасын өнеркәсіптің өнімділігі арқылы оның шығаратын өнімнің көлемін табуда көрсеткенбіз. Енді анықталған интегралдың экономикада қолдануының басқа мысалдарын келтірейік. Өнеркәсіп функциясын, яғни Кобба-Дуглас функциясын

карастыралық. Егер еңбектің шығымы уақытқа сызықты тәуелді, ал капиталдың шығыны тұрақты болса, онда Кобба-Дуглас функциясы ретінде $g(t) = (\alpha + \beta)e^{\mu t}$ функциясын алуға болады. Мұндай жағдайда T уақытындағы өнімнің көлемін

$$Q = \int_0^T (\alpha + \beta)e^{\mu t} dt \quad (11.29)$$

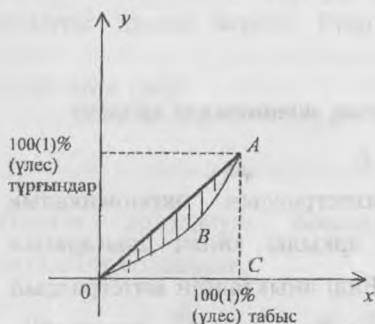
формуласымен есептейді.

11.11-мысал. Кобба-Дуглас функциясы $g(t) = (2+t)e^{2t}$ болған жағдайда 3 жыл ішінде шығарылған өнімнің көлемін табу керек.

Шешуі. (11.29) формуласы бойынша іздеп отырған өнімнің көлемі $Q = \int_0^3 (2+t)e^{2t} dt$ интегралымен анықталады. Сонымен

$$\begin{aligned} Q &= \left| \begin{array}{l} u = 2+t, \quad du = dt, \\ dv = e^{2t} dt, \quad v = \frac{1}{2}e^{2t} \end{array} \right| = \frac{1}{2}(2+t)e^{2t} \Big|_0^3 - \frac{1}{2} \int_0^3 e^{2t} dt = \\ &= \frac{5}{2}e^6 - 1 - \frac{1}{4}e^{2t} \Big|_0^3 = \frac{5}{2}e^6 - 1 - \frac{1}{4}e^6 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}e^6 - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}(3e^6 - 1); \end{aligned}$$

2. Ел табысы пайызының осы табысты табатын тұрғындар пайызына қатынасын Лоренц қисығы арқылы зерттейді. Лоренц қисығы арқылы ел табысының біркелкі үлестіруін (табыс бөлу



11.12-сурет

теңсіздігінің дәрежесін) анықтайды. 11.12-суретте OBA – Лоренц қисығы. Ел табысы біркелкі үлескенде (таралғанда) Лоренц қисығы OA биссектрисасына айналады. Сондықтан OA биссектрисасымен және OBA қисығымен қоршалған фигура ауданының ΔOAC

үшбұрыш ауданына қатынасы табыс бөлу теңсіздігінің дәрежесін сипаттайды. Осы қатынасты Жини коэффициенті дейді.

11.12-мысал. Ел табысының тұрғындар арасында бөліну нәтижелерін зерттегенде Лоренц қисығының $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ функциясы графигі болатындығы көрсетілген. Мұндағы x — тұрғындардың, ал y — тұрғындар табыстарының үлесі. Жини коэффициентін табу керек.

Шешуі. Жини коэффициентін K әрпімен белгілейік. Сонда

$$K = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}} = \frac{S_{\Delta OAC} - S_{OBAC}}{S_{\Delta OAC}} = 1 - \frac{S_{OBAC}}{S_{\Delta OAC}} = 1 - 2S_{OBAC},$$

$$\text{өйткені } S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}.$$

Енді жоғарыдан Лоренц қисығымен қоршалған қисық сызықты үшбұрыштың ауданын табамыз:

$$\begin{aligned} S_{OBAC} &= \int_0^1 (1 - \sqrt{1 - x^2}) dx = x \Big|_0^1 - \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = \sin t, \\ dx = \cos t dt \end{array} \right| = 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \\ &= 1 - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = 1 - \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\pi}{4}. \quad \text{Олай болса} \end{aligned}$$

$$k = 1 - 2 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0,57. \quad \text{Есептелген } K \text{ -нің үлкен мәні Ұлттық}$$

табыстың тұрғындар арасында өте кең бөлінбеуін көрсетеді.

3. Жылдық пайызы (пайыздық қойылымы) p болғанда t уақыт өткеннен кейін бастапқы қаржыны оның соңғы шамасы бойынша табуды дисконттау дейді. Мұндай есеп күрделі қаржы енгізудің экономикалық тиімділігін анықтауда кездеседі. t жыл ішінде алынған қаржы K_t болсын, ал алғашқы (дисконтталатын) қаржы K болсын. Финанстық талдауда бұл қаржыны қазіргі қаржы деп

айтады. Егер пайыз жәй болса, онда $K_t = K(1 + it)$ болады, мұнда

$i = \frac{P}{100}$ — үлестік пайыздық қойылым. Сондықтан $K = \frac{1 + it}{K_t}$. Егер

пайыз күрделі болса, онда $K_t = K(1 + it)^t$. Сондықтан $K = \frac{K_t}{(1 + it)^t}$.

Жыл сайын түсіп отыратын табыс уақытқа байланысты өзгеріп отырған жағдайда, яғни $f(t)$ функциясымен өрнектелетін және үлестік пайыздық қойылым i -ге тең болған жағдайда пайыз үзіліссіз қосылып отырсын. Мұндай жағдайда дисконтталған табыс K T уақыт аралығында

$$K = \int_0^T f(t) e^{-it} dt \quad (11.30)$$

формуласымен есептеледі.

11.13-мысал. Егер күрделі қаржының енгізілуі 10 млрд.теңге болып, жыл сайын ол 1 млрд.теңгеге өсетін болса, онда пайыздық қойылым 8% болғанда 3 жыл ішіндегі дисконтталған қаржыны табу керек.

Шешуі. Әрине, күрделі қаржының енгізілуі $f(t) = 10 + 1 \cdot t = 10 + t$ функциясымен анықталады. (11.30) формуласы бойынша

$$\begin{aligned} K &= \int_0^3 (10 + t) e^{-0,08t} dt = \left| \begin{array}{l} u = 10 + t, \quad du = dt, \\ dv = e^{-0,08t} dt, \quad v = \frac{-e^{-0,08t}}{0,08} \end{array} \right| = \frac{-(10 + t)}{0,08} e^{-0,08t} \Big|_0^3 + \\ &+ \frac{1}{0,08} \int_0^3 e^{-0,08t} dt = \frac{10}{0,08} - \frac{13}{0,08} e^{-0,24} - \frac{1}{(0,08)^2} e^{-0,08t} \Big|_0^3 = \frac{1000}{8} - \\ &- \frac{1300}{8} e^{-0,24} + \frac{1}{0,0064} (1 - e^{0,24}) \approx 30,5 \text{ млрд.теңге.} \end{aligned}$$

4. x -партиядағы бұйымның реттік нөмірі болсын, ал $t = t(x)$ — функциясы өндірістің жетілуіне қарай t -ға байланысты шығынның

өзгеру заңдылығын көрсетсін. Сонда x_1 -ден x_2 -ге дейінгі бұйымдарды жасау кезіндегі бір бұйымға жұмсалатын орташа уақыт t_{op} анықталған интегралдың орта мән формуласы арқылы табылады:

$$t_{op} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} t(x) dx \quad (11.31)$$

$t = t(x)$ функциясы көп жағдайда

$$t = ax^{-a} \quad (11.32)$$

түрінде беріледі. Мұнда a —бірінші өнімге жұмсалатын уақыт, a —өнеркәсіп процессінің көрсеткіші.

11.14-мысал. $x_1 = 100$ -ден $x_2 = 121$ -і өнімге дейінгі уақыттағы бір өнімге жұмсалатын орташа уақытты (11.32) формулада $a = 600$ (минут), $\alpha = 0,5$ болғанда табу керек.

Шешуі. (11.31) формула бойынша

$$t_{op} = \frac{1}{121 - 100} \int_{100}^{121} 600x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{600}{21} 2\sqrt{x} \Big|_{100}^{121} = \frac{400}{7} = 57 \frac{1}{7}.$$

ОН ЕКІНШІ ТАРАУ

ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

12.1. Негізгі ұғымдар

Бір немесе бірнеше айнымалылардың ізделінетін функциясын, осы айнымалыларды және функцияның әр түрлі дәрежелі туындыларын байланыстырып тұрған теңдеуді дифференциалдық теңдеу дейді.

Егер ізделінетін функция тек бір айнымалыға тәуелді болса, онда дифференциалды тендеу қарапайым деп, ал егер ол бірнеше айнымалыға тәуелді болса, онда дифференциалды тендеу дербес туындылы дифференциалдық тендеу деп аталады.

Біз бұл тарауда тек қарапайым дифференциалдық тендеулерді қарастырамыз. Сондықтан ендігәрі қарапайым деген сөзді қолданбаймыз.

Дифференциалдық тендеудің ең жәй түрі — берілген $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы $F(x)$ -ты табу есебін береді, өйткені $F'(x) = f(x)$.

Дифференциалдық тендеулерді жалпы түрде былай жазуға болады:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (12.1)$$

Мұнда F — $n+2$ айнымалыға тәуелді функция, $n \geq 1$. n натурал саны (12.1)- тендеудің дәрежесі деп аталады. Мысалы, функцияның алғашқы функциясын табу есебі бірінші дәрежелі тендеуді береді, $x(y'')^4 - x^2(y')^3 + 7y' + 8 = 0$ — екінші дәрежелі тендеу.

Егер n дәрежелі тендеуді

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

түрінде жазуға болса, онда оны жоғары дәрежелі туындысы бойынша шешілген тендеу деп атайды. Мұнда f — $n+1$ айнымалыға тәуелді функция.

Егер $y = y(x)$ функциясын (12.1) тендеуіне апарып қойғанда тепе-теңдік шығатын болса, онда оны (12.1) тендеуінің шешімі деп атайды.

Мысалы, $y = \cos 2x$ функциясы $y'' + 4y = 0$ тендеуінің шешімі болады, өйткені кез келген x үшін

$$(\cos 2x)'' + 4 \cos 2x = 0 \Rightarrow -4 \cos 2x + 4 \cos 2x = 0$$

Дифференциалдық теңдеудің шешімін табуды оны интегралдау деп атайды.

Дифференциалдық теңдеу шешімінің графигі дифференциалдық теңдеудің интегралдық қисығы деп аталады.

12.1-мысал. $y'' = 4x$ теңдеуінің шешімін табу керек.

Шешуі. $y'' = \frac{dy'}{dx}$ болғандықтан берілген теңдеуге $dy' = 4x dx$ дифференциалдар теңдігі эквивалентті. Соңғы теңдікті интегралдаймыз: $y' = 2x^2 + C_1$. Мұндағы C_1 —кез келген тұрақты сан.

Осы теңдіктен $dy = (2x^2 + C_1) dx$. Олай болса $y = \frac{2x^3}{3} + C_1 x + C_2$,

мұндағы C_2 —тұрақты шама. C_1 мен C_2 — тұрақты шамалар.

Сондықтан $y'' = 4x$ теңдеуінің жазықтықта интегралдық қисықтар үйірі бар. Осы үйірден бір интегралдық қисық бөліп алу үшін жазықтықта осы қисық өтетін нүкте және нүктеден өтердегі бағытын беруіміз керек. Бұл шарттар бастапқы шарттар деп аталады. Мысалы, қарастырылған теңдеуде $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$ болса,

онда $y = \frac{2x^3}{3} + x + 2$ функциясы теңдеудің берілген шарттарды

қанағаттандыратын шешімі болады.

(12.1) n дәрежелі дифференциалдық теңдеуін қанағаттандыратын, x айнымалысына және $C_1, C_2, \dots, C_n$ — n кез келген өзара тәуелсіз тұрақты шамаларға тәуелді

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad (12.2)$$

функциясын (12.1) теңдеуінің жалпы шешімі дейді.

Тұрақты шамалардың өзара тәуелсіздігі деп олардың арасындағы ешқандай байланыстың жоқтығын айтамыз.

Жалпы шешімнен $C_1, C_2, \dots, C_n$ тұрақты шамаларына нақты мәндер бергенде шығатын функцияны (12.1) теңдеуінің дербес шешімі дейді.

Мысалы, соңғы мысалды $y = \frac{2x^3}{3} + C_1x + C_2$ — жалпы шешім, ал

$$y = \frac{2x^3}{3} + x + 2 \text{ — дербес шешім.}$$

(12.2) қисықтар үйірін қанағаттандыратын дифференциалдық теңдеуді табу үшін оны n рет дифференциалдау керек.

12.2-мысал. $y = (C_1 + C_2x)e^{2x}$ қисықтар үйірінің дифференциалдық теңдеуін табу керек.

Шешуі. Берілген функцияны дифференциалдаймыз:

$$y' = (C_2 + 2C_1 + 2C_2x)e^{2x}, \quad y'' = (2C_2 + 2C_2 + 4C_1 + 4C_2x)e^{2x} \text{ немесе}$$

$$y' = C_2e^{2x} + 2y, \quad y'' = 4C_2e^{2x} + 4y. \quad \text{Осы екі теңдіктен } C_2\text{-ні жоямыз: } y'' - 4y' - 4y = 0.$$

Дифференциалдық теңдеулер экономика, физика, биология, экология сияқты ғылымдардың және тағы басқа салалардың көптеген есептерінен шығады. Бір мысал келтірейік.

12.3-мысал. Статистикалық мағлұматтардан белгілі бір регионда жаңа туған нәрестелермен өлген адамдардың саны бір уақыт бірлігінде барлық тұрғындардың санына пропорционал болатындығы және пропорционалдық коэффициенттердің k_1 мен k_2 санына теңдігі белгілі болсын. Уақыттың өтуіне байланысты тұрғындар санының өзгеру заңдылығын табу керек.

Шешуі. $y = y(t)$ — t уақытындағы тұрғындардың саны болсын. Δy мәні Δt уақытындағы тұрғындардың өсімі болса, онда $\Delta y = k_1 y \Delta t - k_2 y \Delta t$, яғни ол Δt уақыт ішіндегі туғандар саны мен

өлгендер санының айырымына тең. Осыдан $\frac{\Delta y}{\Delta t} = ky$, $k = k_1 - k_2$.

Осы теңдікте $\Delta t \rightarrow 0$ болғанда шекке көшеміз:

$$y' = ky \quad (12.3)$$

(12.3) теңдеуін шешейік. (12.3) теңдеуінен $\frac{dy}{y} = kdt$ теңдеуі шығады.

Олай болса $\ln y = kt + C_1$, яғни

$$y = Ce^{kt}, \quad (12.4)$$

мұндағы C —алғашқы шарттар бойынша анықталатын тұрақты шама. Алғашқы шарттар ретінде тұрғындардың бастапқы санын алуға болады.

12.2. Бірінші дәрежелі дифференциалдық теңдеулер.

Шешімнің бар болуы және жалғыздығы туралы теорема.

Бірінші дәрежелі дифференциалдық теңдеу y' бойынша шешілген болсын:

$$y' = f(x, y) \quad (12.5)$$

Мұндағы $f(x, y)$ — екі айнымалыға тәуелді функция.

oxy жазықтығындағы $f(x, y)$ функциясының анықталу облысын

D әріпімен белгілейміз. D жиыны ашық жиын, яғни оның әрбір нүктесінің осы жиынға жататын аймағы бар болсын. (12.5)

теңдеуінің геометриялық мағынасын қарастыралық. y функ-

циясының туындысы $y' = y(x)$ қисығына абсциссасы x -ке тең

нүкте арқылы жүргізілген жанаманың бұраштық коэффициентін

береді. Сондықтан (12.5) теңдеуі oxy жазықтығының әрбір (x, y)

нүктесіне осы нүкте арқылы жүргізілген $y = y(x)$ интегралдық

қисығы жанамасының ($tg \alpha = f(x, y)$) бағытын сәйкес қояды. Демек, (12.5) теңдеуі D облысында бағыттар өрісін құрайды.

(12.5) теңдеуін шешу — берілген бағыттар өрісіне жауап беретін қисықтар үйірін табу деген сөз. Енді дәлелдеусіз шешімнің бар болуы және жалғыздығы туралы маңызды теореманы келтіреміз.

Теорема. (12.5) дифференциалдық теңдеуіндегі $f(x, y)$ функциясы және оның дербес туындысы $\frac{\partial f}{\partial y}$ D ашық облысында үзіліссіз болсын. Сонда:

1) D облысының кез келген (x_0, y_0) нүктесі үшін $y_0 = y(x_0)$ шартын қанағаттандыратын (12.5) теңдеуінің $y = y(x)$ шешімі табылады;

2) егер (12.5) теңдеуінің екі шешімі $y = y_1(x)$ және $y = y_2(x)$ ең болмағанда бір $x = x_0$ мәнінде өзара тең болса, яғни $y_1(x_0) = y_2(x_0)$, онда осы шешімдер өздері анықталған x айнымалысының барлық мәндерінде өзара тең болады.

Бұл теореманың геометриялық мағынасы: D облысының кез келген (x_0, y_0) нүктесі арқылы (12.5) теңдеуінің бір ғана интегралдық қисығы өтеді.

12.3. Бірінші дәрежелі толық емес дифференциалдық теңдеулер. Айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеулер

Егер (12.5) теңдеуде f функциясы не тек x -ке, не тек y -ке тәуелді болса, онда ол толық емес дифференциалды теңдеу деп аталады. Осындай теңдеулердің шешімін қарастырамыз.

1. Егер $y' = f(x)$ немесе $\frac{dy}{dx} = f(x)$ болса, онда $dy = f(x)dx$.

Сондықтан $y = \int f(x)dx$.

2.

$$y' = f(y) \quad (12.6)$$

теңдеуінің шешімін $x = x(y)$ түрінде іздеу ыңғайлы. $\frac{dy}{dx} = f(y)$

болғандықтан $\frac{dy}{f(y)} = dx$. Сондықтан $x = \int \frac{dy}{f(y)}$.

Мысалы, $y' = 2y$ болсын. Онда $\frac{dy}{2} = 2dx$. Сондықтан $2x = \int \frac{dy}{y}$.

Олай болса $|y| = e^{-C_1} e^{2x}$, $y = \pm e^{-C_1} e^{2x}$, яғни $y = Ce^{2x}$, мұндағы $C = \pm e^{-C_1}$;

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \quad (12.7)$$

немесе

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0 \quad (12.8)$$

түріндегі теңдеу айнымалылары ажыратылатын бірінші дәрежелі дифференциалдық теңдеу деп аталады. Бұлардағы $f(x)$, $M(x)$, $P(x)$ — x -ке тәуелді функциялар, ал $g(y)$, $N(y)$, $Q(y)$ y -ке тәуелді функциялар. Осы теңдеулерді шешу үшін оларды теңдіктің бір жағында тек x -ке тәуелді функциялар, ал екінші жағында тек y -ке тәуелді функциялар болатындай етіп өзгерту керек. Сонан соң теңдіктің екі жағын интегралдау керек. Мысалы, (12.7) теңдеуден $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$

теңдігі шығады. Сондықтан $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$. Осы интегралдарды

алу арқылы (12.7) теңдеудің шешімін табамыз.

12.3-мысал. $\sqrt{y^2 + 1}dx = 2\sqrt{x} \cdot ydy$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі. Теңдіктің екі жағын $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y^2 + 1}$ өрнегіне бөлеміз:

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{2ydy}{\sqrt{y^2 + 1}}. \quad \text{Енді теңдіктің екі жағын интегралдаймыз:}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \int \frac{ydy}{\sqrt{y^2 + 1}}. \quad \text{Сондықтан} \quad 2\sqrt{x} = 2\sqrt{y^2 + 1} + C_1 \quad \text{немесе,}$$

$$x = \left(C + \sqrt{y^2 + 1}\right)^2, \quad C = \frac{C_1}{2}.$$

$$y' = f(ax + by) \quad (12.9)$$

түріндегі теңдеуді $z = ax + by$ алмастыруы арқылы айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеуге келтіруге болады.

12.4-мысал. $(2x + y) \cdot y' = 1$ теңдеуін шешіңіз.

Шешуі. $z = 2x + y$ түрлендіруін қолданамыз. Сонда $z' = 2 + y'$ немесе $y' = z' - 2$. Сондықтан берілген теңдеуден $z(z' - 2) = 1$ теңдеуі шығады. Соңғы теңдеуді z' арқылы шешеміз: $z' = \frac{1}{z} + 2$. Олай болса

$$\frac{zdz}{2z + 1} = dx. \quad \text{Енді теңдіктің екі жағын интегралдаймыз} \quad \int dx = \int \frac{zdz}{2z + 1}.$$

Сондықтан $x = \frac{z}{2} - \frac{1}{4} \ln|2z + 1| + C_1$. Осы өрнекте алғашқы айнымалы-

ларға көшеміз: $x = x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4} \ln|4x + 2y + 1| + C_1$. Олай болса

$$y = \ln|4x + 2y + 1| + C, \quad C = -2C_1.$$

12.4. Бірінші дәрежелі біртекті дифференциалдық теңдеулер

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right) \quad (12.10)$$

түріндегі теңдеу бірінші дәрежелі біртекті дифференциалдық теңдеу деп аталады.

Мысалы, $y' = \frac{x}{y} \sin \frac{y}{x}$ — біртекті теңдеу.

Біртекті дифференциалдық теңдеулер ұғымы біртекті функциялар ұғымымен байланысты.

Егер кез келген α саны үшін

$$f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^k f(x, y) \quad (12.11)$$

тепе-теңдігі орындалса, онда $f(x, y)$ функциясын k дәрежелі біртекті функция деп атайды.

Мысалы, $f(x, y) = 2x^2 - 3xy$ — екі дәрежелі біртекті функция, өйткені $f(\alpha x, \alpha y) = 2(\alpha x)^2 - 3(\alpha x)(\alpha y) = \alpha^2 f(x, y)$.

Егер $f(x, y)$ — нөл дәрежелі біртекті функция болса, онда

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (12.12)$$

теңдеуін біртекті теңдеуге келтіруге болады. Ол үшін $\alpha = \frac{1}{x}$ деп

аламыз. Сонда $k = 0$, (12.11) теңдігі бойынша

$f(x, y) = f\left(\frac{1}{x} \cdot x, \frac{1}{x} \cdot y\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$. $g\left(\frac{y}{x}\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ деп белгілесек, онда

(12.12) теңдеуінен (12.10) теңдеуі шығады.

Осы айтылған тұжырымнан, егер $M(x, y)$ пен $N(x, y)$ бір дәрежелі біртекті функциялар болса, онда

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (12.13)$$

тендеуін біртекті тендеуге, яғни (12.10) тендеуі түріне келтіруге болатындығы шығады. Өйткені, (12.13) тендеуден $\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$ тендеуін аламыз, ал осы тендеудің оң жағындағы функция нөл дәрежелі біртекті функция болады.

(12.10) тендеуін $z = \frac{y}{x}$ алмастыруы арқылы айнымалылар бөлінетін дифференциалдық тендеуге келтіруге болады. Өйткені $y = zx$, $y' = z'x + z$ болғандықтан (12.10) тендеуден $z' \cdot x + z = g(z)$ тендеуі шығады. Соңғы теңдіктен $\frac{dz}{g(z) - z} = \frac{dx}{x}$ теңдігін аламыз.

12.5-мысал. $y' = \frac{x-2y}{x}$ тендеуі берілсін. Осы тендеудің шешімін табайық. $\frac{x-2y}{x} = 1 - 2\frac{y}{x}$ болғандықтан, бұл тендеу біртекті тендеу. $z = \frac{y}{x}$ болсын. Сонда $z'x + z = 1 - 2z$, сондықтан $xz' = 1 - 3z$, яғни $\frac{dz}{1-3z} = \frac{dx}{x}$. Осы теңдіктің екі жағын интегралдаймыз: $-\frac{1}{3} \ln(1-3z) = \ln Cx$, немесе $1-3z = \frac{C^3}{x^3}$. Демек $z = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{C_1^3}{x^3} \right)$. Алғашқы айнымалыларға көшеміз: $y = \frac{1}{3} \left(x - \frac{C}{x^2} \right)$, $C = C_1^3$.

12.5. Бірінші дәрежелі, сызықты дифференциалдық тендеулер

$$y' + p(x) \cdot y = q(x) \quad (12.14)$$

түріндегі тендеу бірінші дәрежелі сызықты тендеу деп аталады. Мұндағы $p(x)$ пен $q(x)$ x -ке тәуелді берілген функциялар. Егер $q(x) \equiv 0$ болса, онда (12.14) біртекті деп, ал егер $q(x) \neq 0$ болса

біртекті теңдеу деп аталады. (12.14) теңдеуінің жалпы шешімін табу үшін алдымен біртекті $y' + p(x)y = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін табамыз. Сонда $\frac{dy}{dx} = -p(x)y$ немесе $\frac{dy}{y} = -p(x)dx$. Олай

болса $\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx$. Сондықтан $\ln y = -\int p(x)dx + \ln C$, яғни

$y = Ce^{-\int p(x)dx}$. Осы табылған функция біртекті теңдеудің жалпы шешімі. Біртекті теңдеудің жалпы шешімін табу үшін тұрақтыны вариациялау әдісі бойынша біртекті теңдеудің жалпы шешімінде

$C = C(x)$ деп аламыз: $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$. Мұндағы $C(x)$ әзірше белгісіз функция. Оны y функциясы (12.14) теңдеуін қанағаттандыратын-дай етіп аламыз. Ол үшін $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$ функциясын (12.14)

теңдеуге апарып қоямыз. Сонда $y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x) \cdot C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}$, $C'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x) \cdot C(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$,

яғни $C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}$. Осыдан $C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C$. Сонымен

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left(C + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx \right) \quad (12.15)$$

функциясы (12.14) теңдеуінің жалпы шешімі болады.

12.6-мысал. $y' + \operatorname{tg} x \cdot y = \cos x$ теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

Шешуі. Мұнда $p(x) = \operatorname{tg} x$, $q(x) = \cos x$. Сондықтан

$$\int p(x)dx = \int \operatorname{tg} x dx = -\int \frac{d \cos x}{\cos x} = -\ln \cos x,$$

$$\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx = \int \cos x \cdot e^{-\ln \cos x} dx = \int \frac{\cos x}{\cos x} dx = x.$$

(12.15) теңдік бойынша $y = \cos x \cdot (C + x)$. Сонымен $y = C \cos x + x \cos x$ — іздеп отырған шешім болады.

12.6. Дәрежесі төменделінетін екінші ретгі дифференциалдық теңдеулер

Кейбір жағдайларда дифференциалдық теңдеулердің дәрежелерін төмендету арқылы шешімдерін табуға болады. Мысалы,

$$y'' = f(x)$$

теңдеуін былай шешеміз: $y'' = \frac{dy'}{dx}$ болғандықтан $dy' = f(x)dx$.

Осыдан $y' = \int f(x)dx + C_1$. Сондықтан $dy = (\int f(x)dx + C_1)dx$ немесе

$y = \int (\int f(x)dx + C_1)dx$, яғни $y = \int (\int f(x)dx)dx + C_1x + C_2$. Егер дифференциалдық теңдеудің құрамында y жоқ болса, яғни

$$F(x, y', y'') = 0$$

теңдеуі берілсе, онда мұндай теңдеуді $z = y'$ жаңа белгісіз функциясын енгізу арқылы шығарамыз.

12.7-мысал. $xy'' + y' + x = 0$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі. $z = y'$ деп аламыз. Сонда $z' = y''$. Енді берілген теңдеуде y' пен y'' -терді алмастырамыз: $xz' + z + x = 0$. Сонымен $z' + \frac{1}{x}z = -1$. Бұл сызықтық теңдеу. Сондықтан (12.15) формуласын

қолданамыз. $\int p(x)dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x$, $\int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx = -\int x dx = -\frac{x^2}{2}$.

Сондықтан $z = \frac{1}{x} \left(C_1 - \frac{x^2}{2} \right)$, яғни $z = \frac{C_1}{x} - \frac{x}{2}$. Енді $z = y'$

болғандықтан $y' = \frac{C_1}{x} - \frac{x}{2}$. Осыдан $y = \int \frac{C_1}{x} dx - \int \frac{x}{2} dx + C_2$, яғни

$$y = C_1 \ln x - \frac{x^2}{4} + C_2 \text{ — іздеп отырған шешім.}$$

Егер дифференциалдық теңдеудің құрамында x айнымалысы жоқ болса, яғни $F(y, y', y'') = 0$ теңдеуі берілсе, онда тәуелсіз айнымалы ретінде y -ті, ал белгісіз функция ретінде $z = z(y) = y'$ -ті алып, берілген теңдеудің дәрежесін төмендетуге болады. Мысалы, $y \cdot y'' - y'^2 = y^4$ теңдеуіні» $y(0) = 1$ және $y'(0) = 0$ теңдіктерін қанағаттандыратын дербес шешімін табалық. Ол үшін $z = z(y) = y'$ деп аламыз. Сонда $y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z' \cdot z$. Сондықтан берілген

теңдеуден $yzz' - z^2 = y^4$ бірінші дәрежелі теңдеуі шығады. Енді осы

теңдеуді интегралдаймыз. $zz' - \frac{1}{y} \cdot z^2 = y^3 \quad \left(z' - \frac{1}{y} z = \frac{y^3}{z} \right)$. Мұндай

теңдеу Бернулли теңдеуі деп аталады. Ол $p = z^2$ түрлендіруі арқылы

сызықтық теңдеуге келеді: $p' = 2zz'$, $p' - \frac{2}{y}p = 2y^3$. Сондықтан

$$(12.15) \text{ формуласы бойынша } p = e^{2 \int \frac{dy}{y}} \left(C_1 + 2 \int y^3 \cdot e^{-2 \int \frac{dy}{y}} dy \right) =$$

$$= e^{2 \ln y} \left(C_1 + 2 \int y^3 \cdot e^{-2 \ln y} dy \right) = y^2 \left(C_1 + 2 \int y dy \right) = y^2 (C_1 + y^2). \text{ Енді } z \text{ - ке}$$

$$\text{кошеміз } z^2 = y^2 (C_1 + y^2). \text{ Осыдан } z = \pm y \sqrt{C_1 + y^2}. \quad z = y'$$

болғандықтан $y' = \pm y \sqrt{C_1 + y^2}$. $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ теңдіктерін қолда-

$$\text{намыз: } 0 = \pm \sqrt{C_1 + 1}. \text{ Сонда } C_1 = 1, y' = \pm y \sqrt{y^2 - 1} \Rightarrow \int \frac{dy}{y \sqrt{y^2 - 1}} =$$

$= \pm \int dx$, немесе $\arccos \frac{1}{y} \pm x = C$. Осыдан $y(0) = 1$ болғандықтан

$C = 0$ шығады. Сондықтан $y = \frac{1}{\cos x}$ дербес шешім болады.

12.7. Тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық тендеулер

$$y'' + py' + qy = r(x) \quad (12.16)$$

түріндегі тендеу p мен q тұрақты шамалар болғанда тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық тендеу деп аталады. Мұндағы $r(x)$ — x -ке тәуелді функция.

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (12.17)$$

тендеуі біртекті, ал (12.16) $r(x) \neq 0$ болғанда біртектісіз тендеу деп аталады.

(12.16) тендеуінің $y(x_0) = z_0$, $y'(x_0) = z_1$ теңдіктерін қанағаттандыратын тек бір ғана шешімі бар.

Егер $y_1(x)$ пен $y_2(x)$ функцияларының сызықтық өрнегі $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ (мұндағы C_1 мен C_2 тұрақты шамалар) нөлге тең болу үшін $C_1 = C_2 = 0$ теңдіктері орындалса, онда осы функциялар өзара сызықтық тәуелсіз функциялар деп аталады, ал егер сызықтық өрнек $C_1 = C_2 = 0$ теңдіктері орындалмаған жағдайда да нөлге тең болса, онда $y_1(x)$ пен $y_2(x)$ өзара сызықтық тәуелді функциялар деп аталады.

12.8-мысал. Төмендегі функциялардың өзара сызықтық тәуелсіз екендігін көрсету керек:

- 1) $e^{\lambda_1 x}$ және $e^{\lambda_2 x}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$; 2) $e^{\lambda x}$ және $x e^{\lambda x}$; 3) $e^{\alpha x} \cos \beta x$ және

$$e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad \beta \neq 0.$$

Шешуі. 1) Егер $C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} = 0$ болса, онда $C_1 = -C_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x}$.

Олай болса $\lambda_1 \neq \lambda_2$ болғандықтан $C_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x}$ тұрақты шама болу үшін $C_2 = 0$ болу керек. Осыдан $C_1 = 0$ екендігі шығады;

2) $C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} \equiv 0$ болу үшін $C_1 + C_2 x = 0$ болу керек. Соңғы теңдіктен $x = 0$ болғанда $C_1 = 0$ теңдігі шығады. Олай болса $C_2 = 0$;

3) $C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x \equiv 0$ болсын. Онда $C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x \equiv 0$ болады. Осы теңдіктен $x = 0$ болғанда $C_1 = 0$ шығады. Сондықтан $C_2 = 0$.

Егер y_1 мен y_2 функциялары (12.17) теңдеуінің шешімдері болса, онда олардың сызықтық өрнегі

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \quad (12.18)$$

функциясы да (12.17) теңдеуінің шешімі болады.

Бұл тұжырымды (12.18) функциясын (12.17)-ге қою арқылы дәлелдейміз:

$$\begin{aligned} y'' + py' + qy &= C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + p(C_1 y_1' + C_2 y_2') + q(C_1 y_1 + C_2 y_2) = \\ &= C_1 (y_1'' + p y_1' + q y_1) + C_2 (y_2'' + p y_2' + q y_2) = 0 \cdot C_1 + 0 \cdot C_2 = 0 \end{aligned}$$

Осы тұжырымды пайдаланып төмендегі теорема дәлелденеді.

Теорема. Егер $y_1(x)$ пен $y_2(x)$ өзара сызықты тәуелсіз (12.17) теңдеуінің шешімдері болатын болса, онда (12.17) теңдеудің жалпы шешімі (12.18) формуласы бойынша табылады.

Сонымен (12.17) теңдеуінің жалпы шешімін табу үшін оның өзара сызықтық тәуелсіз екі шешімін білу керек.

(12.17) теңдеуінің шешімін

$$y = e^{\lambda x} \quad (12.19)$$

түрінде іздейміз. Мұндағы λ — нақты сан.

$(e^{\lambda x})'' + p(e^{\lambda x})' + qe^{\lambda x} = (\lambda^2 + p\lambda + q)e^{\lambda x}$ болғандықтан (12.19) функциясы (12.17) теңдеудің шешімі болу үшін λ саны

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \quad (12.20)$$

керек.

теңдеуінің түбірі болу (12.20) теңдеуі (12.17) теңдеуінің сипаттаушы теңдеуі деп аталады. (12.17) теңдеудің шешімдерінің бар болуы сипаттаушы теңдеудің түбірлерінің бар болуына байланысты. (12.17) теңдеуінің шешімдері үшін төмендегі тұжырымдардың растығын дәлелдеуге болады.

Теорема. а) Егер сипаттаушы теңдеудің екі нақты λ_1 және λ_2 түбірлері бар болса, онда (12.17) теңдеудің жалпы шешімі

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \quad (12.21)$$

түрінде беріледі. Мұндағы C_1 мен C_2 кез келген тұрақты шамалар;

ә) егер сипаттаушы теңдеудің бір еселі λ түбірі бар болса, онда (12.17) теңдеудің жалпы шешімі

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda x} \quad (12.22)$$

түрінде беріледі. Мұндағы C_1 мен C_2 кез келген тұрақты шамалар;

б) егер сипаттаушы теңдеудің нақты түбірлері болмаса, онда (12.17) теңдеудің жалпы шешімі

$$y = (C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x) e^{\alpha x} \quad (12.23)$$

түрінде беріледі. Мұндағы C_1 мен C_2 кез келген тұрақты шамалар,

$$\alpha = -\frac{p}{2}, \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

12.9-мысал. $y'' - 2y' - 8y = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін табу

керек.

Шешуі. Сипаттаушы теңдеуді жазамыз: $\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$. Мұның түбірлері $\lambda_1 = 4$ және $\lambda_2 = -2$. Сондықтан (12.21) теңдеу бойынша $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x}$ функциясы іздеп отырған жалпы шешім болады.

12.10-мысал. $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ алғашқы шарттарын қанағаттандыратын $y'' - 6y' + 9y = 0$ теңдеуінің шешімін табу керек.

Шешуі. Алдымен берілген теңдеудің жалпы шешімін табамыз. Ол үшін сипаттаушы теңдеуді құрамыз: $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$. Мұның еселік түбірі бар: $\lambda = 3$. Сондықтан (12.22) формуласы бойынша $y = (C_1 x + C_2) e^{3x}$ функциясы берілген теңдеудің жалпы шешімі болады. Енді осы жалпы шешімнен алғашқы шарттарды қанағаттандыратын дербес шешімді бөліп аламыз: $y' = (C_1 + 3C_1 x + 3C_2) e^{3x}$ болғандықтан $y'(0) = C_1 + 3C_2 = 1$, $y(0) = C_2 = 0$. Сонымен $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. Олай болса $y = x e^{3x}$ функциясы іздеп отырған шешім болады.

12.11-мысал. $y'' - 6y + 13y = 0$ теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. Сипаттаушы теңдеуді құрамыз: $\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$. Бұл теңдеудің нақты түбірлері жоқ. Сондықтан (12.23) формуласы бойынша $\alpha = -\frac{-6}{2} = 3$, $\beta = \sqrt{13 - 9} = 2$ болғандықтан

$y = (C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x) e^{3x}$ функциясы берілген теңдеудің жалпы шешуі болады.

Енді (12.16) теңдеуінің жалпы шешімін табуға көшейік. Оны тұрақтыны вариациялау әдісімен табуға болады. Ол үшін алдымен біртекті (12.17) теңдеуінің жалпы шешімін табады: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$. Содан соң (12.16) теңдеудің жалпы шешімі $y = C_1(x) \cdot y_1 + C_2(x) \cdot y_2$

түрінде ізделінеді. Мұндағы $C_1(x)$ пен $C_2(x)$ әзірше белгісіз функциялар. Оларды $y = C_1(x) \cdot y_1 + C_2(x) \cdot y_2$ функциясы (12.16) теңдеуді қанағаттандыратындай етіп тандап алады. Сондықтан олар

$$\begin{cases} C_1' \cdot y_1 + C_2' \cdot y_2 = 0, \\ C_1' \cdot y_1' + C_2' \cdot y_2' = r(x) \end{cases} \quad (12.24)$$

теңдеулер жүйесінің шешімдері ретінде табылады. Мұны біз мысалмен көрсетелік.

12.12-мысал. $2y'' - y' - y = 4xe^{2x}$ теңдеуінің жалпы шешімін табу керек.

Шешуі. Теңдеуді (12.16) түріне келтіреміз: $y'' - \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}y = 2xe^{2x}$.

Сипаттаушы теңдеуді құрамыз: $2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$. Мұның шешімдері

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$. Сондықтан $y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}}$ — біртекті теңдеудің

жалпы шешімі. Енді біртектісіз теңдеудің жалпы шешімін

$y = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-\frac{x}{2}}$ түрінде іздейміз. Ол үшін (12.24) жүйесін

$$\begin{cases} C_1' e^x + C_2' e^{-\frac{x}{2}} = 0, \\ C_1' e^x - \frac{1}{2} C_2' e^{-\frac{x}{2}} = 2xe^{2x} \end{cases} \quad \text{Осыдан} \quad \frac{3}{2} C_2' e^{-\frac{x}{2}} = -2xe^{2x}$$

немесе $C_2' = -\frac{4x}{3} e^{\frac{5x}{2}}$. Олай болса $C_1' = \frac{4x}{3} e^x$. Сондықтан

$$C_1(x) = \frac{4}{3} \int x e^x dx = \frac{4}{3} (x-1)e^x + C_1,$$

$$C_2(x) = -\frac{4}{3} \int x e^{\frac{5x}{2}} dx = -\frac{4}{3} \left(\frac{2}{5} x - \frac{4}{25} \right) e^{\frac{5x}{2}} + C_2.$$

Сонымен $y = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}} + \frac{4}{5} \left(x - \frac{7}{5} \right) e^{2x}$ функциясы ізделіп отырған

жалпы шешім болады. Табылған шешімнің құрамына назар аударатын болсақ, онда алғашқы екі мүшенің қосындысы

$C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}}$ — біртекті теңдеудің жалпы шешімі, ал $\frac{4}{5} \left(x - \frac{7}{5} \right) e^{2x}$ —

біртектісиз теңдеудің дербес шешімі екенін көреміз.

Осындай құбылыс кез келген сызықтық біртекті емес теңдеу үшін байқалады, яғни мынандай тұжырым дұрыс болады:

Теорема. Біртектісиз сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі осы теңдеудің бір дербес шешімі мен сәйкес біртекті сызықты дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімдерінің қосындысынан тұрады.

ОН ҮШІНШІ ТАРАУ ҚАТАРЛАР

13.1. Сандық қатарлар. Негізгі ұғымдар

Көптеген математикалық есептеулерде, оның ішінде математиканың экономикалық қолдануларында санаусыз көп санды мүшелердің қосындыларын қарастыруға тура келеді. Ақырсыз көп сандардың қосындысы туралы есептер қатарлар теориясында қарастырылады.

Анықтама.

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (13.1)$$

түріндегі ақырсыз көп $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ сандар тізбегінің қосындысы

сандар қатары деп аталады. (13.1)-ді кейде $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ таңбасымен

белгілейді. $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ сандары қатардың мүшелері, ал u_n - жалпы мүшесі немесе n - мүшесі деп аталады. Егер (13.1) өрнегінің жалпы мүшесі $u_n = f(n)$ белгілі болса, онда қатарды берілді деп

есептейді. Мысалы жалпы мүшесі $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^3(n+1)}$ болғанда n

индексіне натурал сандардан мән бере отырып, қатарды былай

$$\frac{1}{1^3 \cdot 2} - \frac{1}{2^3 \cdot 3} + \frac{1}{3^3 \cdot 4} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^3(n+1)} + \dots$$

жазуға болады.

Қатардың ақырлы сандардан тұратын мүшелерінің қосындысын қарастыралық:

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \dots, \quad S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

Қатардың алғашқы n мүшелерінің қосындысы S_n -ді оның n - дербес қосындысы деп атайды.

Анықтама. Егер $n \rightarrow \infty$ болғанда n -дербес қосынды S_n -нің ақырлы шегі бар болса, яғни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, \quad |S| < \infty$$

шегі бар болса, онда (13.1) қатарды жинақталатын қатар дейді, немесе қатар жинақты дейді.

S саны қатардың қосындысы деп аталады. Егер S саны (13.1) қатардың қосындысы болса, онда былай жазамыз:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S.$$

Егер ақырлы $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ шегі болмаса, онда (13.1) қатар жинақсыз қатар деп аталады, немесе қатар жинақталмайды дейді.

13.1-мысал.

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \quad (13.2)$$

геометриялық қатардың, яғни геометриялық прогрессияның мүшелерінен құрылған қатардың жинақталатындығын зерттеңіз.

Шешуі. q санының қандай мәнінде (13.2) қатар жинақталады, ал қандай мәнінде жинақталмайды. Осыны зерттеуіміз керек. Геометриялық прогрессияның алғашқы мүшесінің қосындысының формуласын келтірейік:

$$S_n = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Үш жағдайды қарастырамыз.

1) егер $|q| < 1$ болса, онда $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, сондықтан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a \cdot q^n}{q - 1} - \frac{a}{q - 1} \right) = \frac{a}{1 - q}, \text{ яғни (13.2)- қатар жинақты және}$$

$$S = \frac{a}{1 - q};$$

2) $|q| > 1$, яғни $q > 1$ немесе $q < -1$ болсын. Мұндай жағдайда егер $q > 1$ болса, онда $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$, ал егер $q < -1$ болса $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$ анықталмаған. Сондықтан (13.2) қатар жинақсыз.

3) а) $q = 1$ болсын, онда $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \lim_{n \rightarrow \infty} na = \infty$ қатар жинақсыз.

ә) $q = -1$ болсын. Онда (13.2) қатар былай $a - a + a - a + \dots + (-1)^{n-1} a_n +$ жазылады. Сондықтан егер n -жүп сан болса, онда $S_n = 0$, ал тақ сан болса $S_n = a$. Демек $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ шегі жоқ, қатар

жинақсыз. Сонымен, геометриялық қатар $|q| < 1$ болғанда жинақты және оның қосындысы $S = \frac{q}{1-q}$ болады, ал $|q| \geq 1$ болғанда жинақсыз.

13.2-мысал. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$ қатарының қосындысын табыңыз.

Шешуі. Қатардың n - дербес қосындысын қараймыз:

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \text{ болғандықтан}$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Олай болса $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$, яғни $S = 1$.

Жинақты қатарлардың қасиеттері:

1. Егер $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ қатары жинақты болса және оның қосындысы S - ке тең болса, онда $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda u_k$ (λ - тұрақты сан) қатары да жинақты және оның қосындысы $\lambda \cdot S$ санына тең.

2. Егер $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ және $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ қатарлары жинақты болып, олардың қосындылары S_1 және S_2 сандарына тең болса, онда $\sum_{k=1}^{\infty} (u_k + v_k)$ қатары да жинақты және оның қосындысы санына тең.

Бұл екі қасиет қатардың жинақтылығының анықтамасы мен шектің қасиеттерінен шығады.

3. Егер қатар жинақты болса, онда одан санаулы мүшелерді алып тастағаннан шыққан қатар да жинақты болады.

Дәлелдеуі. (13.1) қатар жинақты болсын. Осы қатардан мысалға алғашқы n мүшені алып тастағанда шыққан қатарды қарастыралық:

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+m} + \dots \quad (13.3)$$

Егер $\sigma_m = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+m}$ болса, онда $S_{n+m} = S_n + \sigma_m$ болатындығы айқын. Осы теңдіктен $\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{n+m} - S_n$ теңдігі шығады. Сондықтан $\lim_{m \rightarrow \infty} S_{n+m}$ ақырлы болса, онда $\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m$ шегі де ақырлы болады. Демек (13.3) қатар жинақты.

(13.3) қатар (13.1) қатардың n қалдығы деп аталады. Егер оның қосындысын r_n -мен белгілесек, онда

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+m} + \dots = \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m$$

$$\text{Демек } S = S_n + r_n.$$

Сондықтан жинақты қатарлардың келесі қасиеті былай болады:

4) (13.1) қатардың жинақты қатар болуы үшін $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ болуы қажетті және жеткілікті.

13.2. Жинақтылықтың қажетті шарты. Гармоникалық қатар

Теорема (Қажетті шарт). Егер сандық қатар жинақты болса, онда $n \rightarrow \infty$ болғанда оның жалпы мүшесі нөлге ұмтылады, яғни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

Дәлелдеуі. $u_n = S_n - S_{n-1}$ теңдігі айқын. Қатар жинақталатын болғандықтан $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0$.

Салдар. Егер $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ болса, онда (13.1) қатар жинақсыз.

Дәлелдеуі. Кері әдіспен дәлелдейміз. (13.1)–інші қатар жинақталсын делік. Онда теорема бойынша $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. Бұл салдардың шартына қарама-қарсы. Сондықтан (13.1)–інші қатар жинақсыз.

13.3-мысал. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{7n-3}$ қатарының жинақтылығын зерттеңіз.

Шешуі. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+5}{7n-3} = \frac{2}{7} \neq 0$. Сондықтан қатар жинақсыз.

Ескерту. Қарастырылып отырған теорема тек қажетті шартты береді, ол жеткілікті шартты бермейді. Яғни $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ теңдігінен қатардың жинақтылығы әрқашан шықпайды.

Бұған мысал ретінде мына

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

гармоникалық деп аталатын қатарды қарайық. Бұл қатар үшін қажетті шарт орындалып тұр: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Осыған қарамастан қатардың жинақсыз қатар екендігін көрсетелік.

Ол үшін гармоникалық қатардың алғашқы $2n$ мен n мүшелерінің қосындыларын қарстыралық:

$$S_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n},$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Сонда $S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$. Теңдіктің оң жағындағы

әрбір мүше $\frac{1}{2n}$ санынан үлкен. Сондықтан, оларды $\frac{1}{2n}$ санымен алмастырсақ теңсіздік аламыз:

$$S_{2n} - S_n > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}, \text{ яғни } S_{2n} - S_n > \frac{1}{2}.$$

Егер гармоникалық қатар жинақты болса, онда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S \text{ болар еді, сондықтан}$$

$$\frac{1}{2} < \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} - S_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S - S = 0 \text{ немесе } \frac{1}{2} < 0. \text{ Бұлай}$$

болуы мүмкін емес. Сондықтан гармоникалық қатар жинақсыз.

13.3. Мүшелері оң сандық қатарлар

Қатарлардың жинақтылығын $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ шегін табу арқылы анықтау көп жағдайда оңай емес. Өйткені кейде S_n -ді табу қиын, ал кейде $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ шегі оңай табылмайды. Сондықтан біз енді жинақтылықтың кейбір жеткілікті шарттарын қарастырамыз.

Теорема (Салыстыру белгісі). Мүшелері оң $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (1) және $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$

(2) қатарлары берілсін және кез келген n үшін

$$u_n \leq v_n \quad (13.4)$$

теңсіздігі орындалсын. Онда:

- а) егер (2) қатар жинақты болса, онда (1) қатар да жинақты;
- ә) егер (1) қатар жинақсыз болса, онда (2) қатар да жинақсыз.

Дәлелдеуі. а) (1) - қатардың n - дербес қосындысы S_n , ал (2) - қатардың n - дербес қосындысы σ_n болсын. Теореманың шарты бойынша (2) - қатар жинақты. Сондықтан $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma$ бар және $\sigma_n \leq \sigma$, өйткені қатардың мүшелері оң. $\{S_n$ сандар тізбегі монотонды өспелі және $S_n \leq \sigma_n \leq \sigma$. Сондықтан монотонды өспелі және жоғарыдан шектелген тізбектердің жинақталу белгісі бойынша $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ бар және $S < \infty$. Олай болса (1) - қатар жинақты.

ә) Кері жору әдісімен дәлелдейміз. (2) - қатар жинақты дейік. Онда 1) - тұжырым бойынша (1) - қатар жинақты. Бұл 2) - тұжырымның шартына қарама-қайшы. Олай болса (2) - қатар жинақсыз.

Ескерту. Қатардың ақырлы санды мүшелерін алып тастағаннан оның жинақтылығы өзгермейтін болғандықтан теореманың тұжырымы (13.4) теңсіздік белгілі бір $n = k$ нөмірінен бастап орындалса да дұрыс болады.

13.4-мысал. а) $1 + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5^2} + \dots + \frac{1}{n \cdot 5^{n-1}} + \dots$ қатарының жинақталатындығын көрсетіңіз.

Шешуі. Бұл қатарды жинақталатын $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^{n-1}} + \dots$ геометриялық қатармен салғастырамыз. Оның еселігі $q = \frac{1}{5} < 1$. Берілген қатардың мүшелері үшін $\frac{1}{n5^{n-1}} < \frac{1}{5^{n-1}}$ теңсіздігі орындалатындықтан салыстыру белгісі бойынша жинақты.

ә) $\frac{1}{\sqrt[3]{1 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2 \cdot 3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)}} + \dots$ қатарының жинақтылығын анықтаңыз.

Шешуі. Бұл қатарды $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ гармоникалық қатарымен салыстырамыз. $\frac{1}{\sqrt[3]{1 \cdot 2}} > \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt[3]{2 \cdot 3}} > \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)}} > \frac{1}{n}$

Болғандықтан салыстыру белгісі бойынша берілген қатар жинақсыз. Өйткені гармоникалық қатардан бірінші мүшесін алып тастаған $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ қатар ескерту бойынша жинақсыз.

Салыстыру белгісін қолдану үшін көбінесе төмендегі стандартты қатарларды қолданады:

1) геометриялық қатар $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ — $|q| < 1$ болғанда жинақты, ал $|q| \geq 1$ болғанда жинақсыз;

2) гармоникалық қатар $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ — жинақсыз қатар;

3) жалпыланған гармоникалық қатар

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \dots + \frac{1}{n^{\alpha}} + \dots$$

$\alpha > 1$ болғанда жинақты, ал $\alpha \leq 1$ болғанда жинақсыз. Мұны біз сөл кейінірек дәлелдейміз.

Кей жағдайларда салыстыру белгісі ретінде шектік салыстыру белгісі қолданылады.

Теорема (шектік салыстыру белгісі). $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ және $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$

қатарларының мүшелері оң болсын. Егер ақырлы, нөлге тең емес

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = k \neq 0$ шегі бар болса, онда осы екі қатар не бірдей

жинақты, не бірдей жинақсыз.

Дәлелдеуі. Егер $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = k$ болса, онда шектің анықтамасы

бойынша кез келген $\varepsilon > 0$ саны мен барлық $n > N$ үшін $\left| \frac{u_n}{v_n} - k \right| < \varepsilon$

теңсіздігі орындалатындай N нөмері табылады. Сондықтан $n > N$

болатын n -дер үшін $(k - \varepsilon)v_n < u_n < (k + \varepsilon)v_n$. Егер $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ жинақты

болса, онда жинақты қатарлардың бірінші қасиеті бойынша

$\sum_{n=1}^{\infty} (k + \varepsilon)v_n$ қатары жинақты. Олай болса салыстыру белгісі

бойынша $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ қатары жинақты. Сол сияқты, егер $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ қатары

жинақты болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} (k - \varepsilon)v_n$ қатары, демек $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ қатары

жинақты. Сонымен бір қатардың жинақтылығынан екінші

қатардың жинақтылығы шығады. Қатарлардың бірдей

жинақсыздығы да осылай дәлелденеді.

13.5-мысал. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 4}{n^3}$ қатарының жинақтылығын анықтаңыз.

Шешуі. Бұл қатарды жинақсыз $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ гармоникалық қатармен

салыстырамыз. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 + 4}{n^3} : \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 4}{n^2} = 3$ болған-

дықтан берілген қатар жинақсыз.

Практикада көбінесе Даламбер белгісін қолдану ыңғайлы.

Теорема (Даламбер белгісі). Егер мүшелері оң $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ қатары үшін

ақырлы $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D$ шегі бар болса, онда $D < 1$ болғанда қатар

жинақты, ал $D > 1$ болғанда жинақсыз.

Дәлелдеуі. Тізбек шегінің анықтамасы бойынша кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін N нөмері табылып, барлық $n > N$ натурал сандары үшін

$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - D \right| < \varepsilon$ немесе $D - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < D + \varepsilon$ теңсіздіктері орындалады.

1) $D < 1$ болсын. ε санын $q = D + \varepsilon < 1$ болатындай етіп аламыз.

Сонда $\frac{u_{n+1}}{u_n} < q$ немесе $u_{n+1} < u_n \cdot q$. Бұл теңсіздік барлық $n > N$

үшін орындалады: $u_{N+2} < qu_{N+1}$, $u_{N+3} < qu_{N+2} < q^2 u_{N+1}$, ..., $u_{N+k} <$

$qu_{N+k-1} < \dots < q^{k-1} u_{N+1}$. Сонымен $u_{N+2} + u_{N+3} + \dots + u_{N+k} + \dots$ қатары-

ның мүшелері жинақталатын $qu_{N+1} + q^2 u_{N+1} + \dots + q^{k-1} u_{N+1} + \dots$

геометриялық қатардың сәйкес мүшелерінен кіші болады.

Сондықтан салыстыру белгісі бойынша $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ қатары жинақты,

өйткені жинақталатын $\sum_{n=N+2}^{\infty} u_n$ қатары $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ қатарынан алғашқы

$N+1$ мүшені алып тастағаннан шыққан;

2) $D > 1$ болсын. ε санын $D - \varepsilon > 1$ болатындай етіп таңдап

аламыз. Сонда $D - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n}$ теңсіздігінен $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ теңсіздігі шығады.

Сондықтан $N+1$ нөмерден бастап қатардың мүшелері монотонды

өспелі тізбек құрады, яғни $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$. Демек, қажетті шарт

бойынша қатар жинақсыз.

13.6-мысал. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5n}$ қатары жинақсыз, себебі Даламбер белгісі

$$\text{бойынша } D = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4^{n+1}}{5(n+1)} : \frac{4^n}{5n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{n+1} = 4 > 1.$$

ә) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ қатары жинақты, себебі Даламбер белгісі бойынша

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{2^{n+1}} : \frac{n}{2^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1.$$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot n!}{n^n}$ қатарының жинақтылығын тексерелік.

$$\begin{aligned} D &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{4^n \cdot n!}{n^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4(n+1) \cdot n^n}{(n+1)^{n+1}} = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \\ &= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{-n} = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n(-1)} = \frac{4}{e} > 1. \end{aligned}$$

Даламбер белгісі бойынша қатар жинақсыз.

Ескерту. Егер $D=1$ болса, онда қатардың жинақтылығын Даламбер белгісі анықтамайды. Мұндай жағдайда жинақтылықты тексеру үшін басқа белгілерді қолдану жөн.

Теорема (интегралдық Коши белгісі). $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ қатарының мүшелері

оң және өспейтін, яғни $u_1 \geq u_2 \geq \dots \geq u_n \geq \dots$ болсын. Егер де $x \geq 1$ үшін үзіліссіз, өспейтін және

$$f(1) = u_1, f(2) = u_2, \dots, f(n) = u_n, \dots \quad (13.5)$$

болатын $f(x)$ функциясы табылса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ қатарының

жинақталуы үшін $\int_1^{\infty} f(x) dx$ меншіксіз интегралының жинақталуы

қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеуі.

$$\int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \dots + \int_n^{n+1} f(x)dx + \dots \quad (13.6)$$

қатарын қарайық. Бұл қатардың n - дербес қосындысын табайық.

$$S_n = \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(x)dx = \int_1^{n+1} f(x)dx. \quad \text{Анықтама бойынша} \quad S =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_1^{\infty} f(x)dx. \quad \text{Сондықтан егер } \int_1^{\infty} f(x)dx \text{ жинақты болса, онда}$$

(13.6) қатар жинақты болады. $f(x)$ функциясы монотонды кемімелі болғандықтан $[n, n+1]$ кесіндісінде $f(n) \geq f(x) \geq f(n+1)$.

Сонда (13.5) - теңдіктер бойынша

$$u_{n+1} \leq f(x) \leq u_n.$$

$$\text{Осыдан } \int_n^{n+1} u_{n+1} dx \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq \int_n^{n+1} u_n dx, \text{ яғни}$$

$$u_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq u_n \quad (13.7)$$

Сондықтан егер $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ қатары жинақты болса, онда салыстыру

белгісі бойынша (13.6) - қатар жинақты, яғни $\int_1^{\infty} f(x)dx$ меншіксіз

интегралы жинақты. Керісінше, егер $\int_1^{\infty} f(x)dx$ интегралы жинақты

болса, онда (13.6) қатар жинақты, олай болса (13.7) теңсіздік пен

салыстыру белгісі бойынша $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ қатары жинақты.

13.7-мысал. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ — жалпыланған гармоникалық қатардың

жинақтылығын анықтаңыз.

Шешуі. Ол үшін $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ функциясын қарастырамыз. $f(x)$

функциясы $x > 0$ облысында оң және өспейтін функция. Сондықтан жалпыланған гармоникалық қатардың жинақтылығы

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ интегралының жинақтылығына эквивалентті болады. Енді

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ интегралының жинақтылығын зерттейік. Анықтама бойынша

$$I = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_1^a \frac{dx}{x^{\alpha}}. \quad \text{Сондықтан егер } \alpha = 1 \text{ болса} \quad I = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\ln |x| \Big|_1^a \right)$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \ln |a| = \infty. \quad \text{Егер } \alpha \neq 1 \text{ болса, онда} \quad I = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_1^a \right) =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{a \rightarrow \infty} (e^{1-\alpha} - 1) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \text{егер } \alpha > 1, \\ \infty, & \text{егер } \alpha < 1 \end{cases} \quad \text{Сонымен берілген қатар}$$

$\alpha > 1$ болғанда жинақты, ал $\alpha < 1$ болғанда жинақсыз.

13.4. Мүшелерінің таңбалары әр түрлі сандық қатарлар

а) Ауыспалы таңбалы қатарлар.

Көршілес мүшелерінің таңбалары әр түрлі болып келетін, яғни

$$u_1 - u_2 + u_3 - \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots \quad (u_n > 0) \quad (13.8)$$

қатары ауыспалы таңбалы қатар деп аталады.

Теорема (Лейбниц белгісі). Егер (13.8)-қатардың мүшелері абсолют шамалары бойынша кемитін, яғни $u_1 > u_2 > \dots > u_n > \dots$ және $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ болса, онда (13.8)-қатар жинақты және оның қосындысы u_1 -ден аспайды: $S \leq u_1$.

Дәлелдеуі. (13.8) - қатардың $2m$ - дербес қосындысын былай жазалық: $S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2m-1} - u_{2m})$. Осы қосындының әрбір мүшесі оң болғандықтан $\{S_{2m}\}$ тізбегі өспелі. Енді S_{2m} қосындысын басқалай жазалық

$$S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) + (u_4 - u_5) + \dots + (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}.$$

Осы теңдіктен $S_{2m} < u_1$ ексін көреміз. Сондықтан монотонды сандық тізбектердің жинақталу белгісі бойынша ақырлы $\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = S$ шегі бар және $S \leq u_1$. Енді тақ санды дербес қосындыларды қарайық. $S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$ теңдігі айқын. Қатарлардың қажетті шарты бойынша $\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} + \lim_{m \rightarrow \infty} u_{2m+1} = S + 0 = S$. Сонымен кез келген n үшін $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$, яғни қатар жинақты.

13.8-мысал. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots$ қатарының жинақтылығын анықтаңыз.

Шешуі. Қатардың мүшелерінің абсолют шамалары монотонды кемиді: $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots > \frac{1}{n} > \dots$ және $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Сондықтан Лейбниц белгісі бойынша қатар жинақты.

ә) Мүшелерінің таңбалары әр түрлі қатарлар.

(13.1) қатардың мүшелерінің таңбалары әр түрлі болсын. Оң таңбалы қатарлардың жинақталу белгілерін пайдалану үшін төмендегі теорема қолданылады.

Теорема (мүшелерінің таңбалары әр түрлі қатарлар жинақтылығының жеткілікті шарты). Егер (13.1) қатарының мүшелерінің абсолют шамаларынан құрылған қатар

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots \quad (13.9)$$

жинақты болса, онда (13.1) - қатар да жинақты.

Дәлелдеуі. (13.1)-қатардың n - дербес қосындысының он мүшелерінің қосындысын S_n^+ деп, ал теріс мүшелерінің қосындысын S_n^- деп белгілесек, онда $S_n = S_n^+ + S_n^-$. Егер (13.9) қатардың n - дербес қосындысын S_n' деп белгілесек, онда $S_n' = S_n^+ - S_n^-$ (13.9)- қатар жинақты болғандықтан $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n' = S'$ шегі ақырлы және $S_n^+ < S'$, $S_n^- < S'$. Сондықтан $\{S_n^+\}$, $\{S_n^-\}$ тізбектері монотонды болғандықтан $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^+$ және $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^-$ шектері ақырлы. Олай болса $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^+ + \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^-$ шегі ақырлы, яғни (13.1) қатары жинақты.

Кері тұжырым дұрыс емес, яғни (13.1) қатары жинақты болып, ал (13.9) қатары жинақсыз болуы мүмкін. Мысалы,

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots$ Лейбниц белгісі бойынша жинақты, ал

гармоникалық қатар $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ жинақсыз. Сондықтан төмендегі анықтаманы енгіземіз.

Анықтама. Егер (13.9) - қатар жинақты болса, онда (13.1)-қатар абсолютті жинақты деп аталады, ал егер (13.9) -қатар жинақсыз болып, бірақ (13.1) -қатар жинақты болса, онда (13.1)-қатар шартты жинақты деп аталады.

Мысалы, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt{n}}$ қатар интегралдық белгі бойынша абсолютті

жинақты, ал $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ қатар шартты жинақты.

Абсолютті жинақталатын қатарлардың қасиеттері ақырлы қосындылардікі сияқты болады. Мысалы, олардың мүшелерінің орындарын ауыстырғаннан, бір-біріне көбейткеннен шыққан қатарлар да абсолютті жинақты болады.

13.5. Дәрежелік қатарлар

Осыған дейін біз мүшелері нақты сан болып келетін қатарларды қарастырдық. Енді біз мүшелері функция болып келетін қатарларды қарастырамыз.

$c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ — сандар және x — айнымалы шама болсын. Онда

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots \quad (13.10)$$

түріндегі қатарды дәрежелік қатар деп атайды.

$c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ сандарын қатардың коэффициенттері деп атайды. (13.10) -қатар жинақталатын x -тың мәндер жиынын осы қатардың жинақталу облысы деп атайды.

13.9-мысал. $1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$ дәрежелік қатарының жинақталу облысын табыңыз.

Шешуі. Бұл қатарды еселігі $q = x$ болатын геометриялық қатар ретінде қараймыз. Сондықтан ол $|q| = |x| < 1$ болғанда жинақты. Демек $-1 < x < 1$, яғни $(-1, 1)$ интервалы берілген қатардың жинақталу облысы болады.

Дәрежелік қатардың жинақталу облысы жалпы түрде Абель теоремасы арқылы анықталады.

Абель теоремасы. 1) егер дәрежелік қатар $x = x_0 \neq 0$ мәнінде жинақталса, онда ол $|x| < |x_0|$ теңсіздігін қанағаттандыратын x -тың барлық мәндерінде абсолютті жинақталады;

2) егер дәрежелік қатар $x = x_1$ мәнінде жинақсыз болса, онда ол x -тың $|x| > |x_1|$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық мәндерінде жинақсыз.

Дәлелдеуі. 1) теореманың шарты бойынша (13.10)-қатар $x = x_0 \neq 0$ мәнінде жинақты, сондықтан жинақталудың қажетті шарты бойынша $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n x_0^n = 0$. Осыдан $\{c_n x_0^n\}$ тізбегінің ақырлы екендігі шығады. Олай болса, барлық n үшін

$$|c_n x_0^n| < M \quad (13.11)$$

теңсіздігі орындалатын M саны табылады.

(13.10)-қатардың мүшелерінің абсолют шамаларынан құрылған қатарды былай жазалық:

$$|c_0| + |c_1 x_0| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right| + \dots + |c_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n + \dots$$

(13.11) -теңсіздік бойынша осы қатардың әрбір мүшесі

$$M + M \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right| + \dots + M \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n + \dots \quad (13.12)$$

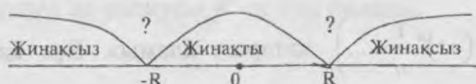
қатарының сәйкес мүшесінен артпайды, ал (13.12)-қатар

$q = \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$ болғанда жинақты геометриялық қатар. Сондықтан

салыстыру белгісі бойынша $|x| < |x_0|$ болғанда (13.10)-қатар абсолютті жинақты.

2) (13.10) - қатар $x = x_1$ мәнінде жинақсыз болсын. Осы қатардың $|x| > |x_1|$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x -тер үшін жинақсыз болатынын көрсетуіміз керек. Кері әдіспен дәлелдейміз. $|x| > |x_1|$ болатын x -тер үшін (13.10) -қатар жинақты болсын. Онда дәлелдеудің бірінші бөлігі бойынша (13.10)-қатар x_1 нүктесінде жинақты, өйткені $|x_1| < |x|$. Сөйтіп қарама-қайшылыққа келдік. Сондықтан барлық $|x| > |x_1|$ болатын x -тер үшін дәрежелік қатар жинақсыз. Теорема дәлелденді.

Абель теоремасы бойынша $|x| < R$ болғанда (13.10)-қатар жинақты, ал $|x| > R$ болғанда жинақсыз болатын бір $R > 0$ саны табылады. Осы R саны қатардың жинақталу радиусы, ал $(-R, R)$ интервалы — жинақталу интервалы деп аталады (13.1-сурет). Жинақталу интервалының шеткі нүктелерінде, яғни $x = -R$ және $x = R$ нүктелерінде қатар жинақты болуы да, жинақсыз болуы да мүмкін.



13.1-сурет

(13.10)- қатардың жинақталу радиусын оның коэффициенттері арқылы тауып көрелік. Ол үшін қатар мүшелерінің абсолют шамаларынан құрылған қатарды қарайық.

$$|c_0| + |c_1x| + |c_2x^2| + \dots + |c_nx^n| + \dots$$

Даламбер белгісі бойынша бұл қатар

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_nx^n} \right| = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$$

саны 1-ден кіші болғанда, яғни $|x| < \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$ болғанда жинақты.

Сондықтан, егер осы шек бар болса, онда ол қатардың жинақталу радиусы болады:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \quad (13.13)$$

13.10-мысал. а) $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$ қатарының жинақталу облысын табыңыз.

Шешуі. (13.13) формула бойынша қатардың жинақталу радиусын табайық.

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} : \frac{1}{n+1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Сонымен қатардың жинақталу интервалы: $(-1, 1)$. Енді қатардың шеткі нүктелердегі жинақтылығын зерттейік.

Егер $x = -1$ болса, онда $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n} + \dots$ қатарын, яғни $-\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n} + \dots\right)$ қатарын аламыз. Бұл қатар Лейбниц белгісі бойынша жинақты. Ал егер $x = 1$ болса, онда гармоникалық қатар шығады. Сондықтан қатардың жинақталу облысы: $[-1, 1)$.

ә) $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$ қатарының жинақталу облысын табыңыз.

Шешуі. (13.13) формула бойынша $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$. Сондықтан $(-\infty, \infty)$ – берілген қатардың жинақталу облысы.

Дәрежелік қатардың қасиеттері.

$f(x)$ функциясы дәрежелік қатардың қосындысы болсын:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n. \quad \text{Математикалық анализ курсына дәрежелік}$$

қатарлардың көпмүшелердің қасиеттеріне ұқсас қасиеттері дәлелденеді:

Қатардың $(-R, R)$ — жинақталу интервалының ішінде толығымен жататын $[a, b]$ кесіндісінде $f(x)$ функциясы үзіліссіз болады, сондықтан дәрежелік қатарды осы кесіндіде мүшелеп интегралдауға болады:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b c_0 dx + \int_a^b c_1 x dx + \dots + \int_a^b c_n x^n dx + \dots$$

Сонымен қатар, жинақталу интервалында дәрежелік қатарды мүшелеп дифференциалдауға болады:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots + nc_n x^{n-1} + \dots$$

Сонда интегралданғаннан немесе дифференциалданғаннан кейін шыққан қатардың да радиусы R -ге тең болады.

13.6. Маклорен қатары

$x = 0$ нүктесінің бір аймағында анықталған және n рет дифференциалданатын $f(x)$ функциясы дәрежелік қатарға жіктелетін болсын:

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots + c_n x^n + \dots \quad (13.14)$$

Қатардың коэффициенттерін $f(x)$ арқылы өрнектейміз. Ол үшін $f(x)$ функциясының n - ретке дейінгі туындыларын табайық:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \dots + nc_nx^{n-1} + \dots,$$

$$f''(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3x + 4 \cdot 3c_4x^2 + \dots + n(n-1)c_nx^{n-2} + \dots,$$

$$f'''(x) = 3 \cdot 2c_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2c_4x + \dots + n(n-1)(n-2)c_nx^{n-3} + \dots,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot c_n + \dots$$

Осы теңдіктерден $x = 0$ болғанда $f(0) = 0$, $f'(0) = c_1$, $f''(0) = 2!c_2$, $f'''(0) = 3!c_3, \dots, f^{(n)}(0) = n!c_n$ теңдіктері шығады. Сондықтан $c_0 = f(0)$,

$$c_1 = f'(0), c_2 = \frac{f''(0)}{2!}, c_3 = \frac{f'''(0)}{3!}, \dots, c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Алынған мәндерді

(13.14) теңдігіне апарып қоямыз. Сонда Маклорен қатары деп аталатын

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots \quad (13.15)$$

қатары шығады.

Сандық қатарлардағы сияқты Маклорен қатарының қосындысы $f(x)$ функциясын былай жазуымызға болады:

$$f(x) = S_n(x) + r_n(x).$$

Мұнда $S_n(x)$ қатардың n - дербес қосындысы, ал $r_n(x)$ — n -қалдығы.

Сондықтан жинақты қатарлардың төртінші қасиеті бойынша төмендегі теорема дәлелденеді.

Теорема. Маклорен қатарының $f(x)$ функциясына жинақталуы үшін қатардың жинақталу интервалында жатқан барлық x -тер үшін

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$$

теңдігі орындалуы қажетті және жеткілікті.

Егер $f(x)$ функциясы Маклорен қатарына жіктелетін болса, онда осы қатар тек біреу ғана болады.

Ескерту. Маклорен қатары $x_0 = 0$ болғандағы

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + R_n(x)$$

түріндегі Тейлор қатарының дербес түрі болады.

Мұндағы $R_n(x)$ — Тейлор қатарының қалдық мүшесі. Ол

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1} (x - x_0)^{n+1}, \quad \xi \in (x_0, x) \quad \text{Лагранж түрінде жазылған}$$

формуламен анықталады.

Кейбір элементар функциялардың Маклорен қатарына жіктелуі.

1. $y = e^x$. $f(x) = f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$ болғандықтан

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1. \quad \text{Сондықтан} \quad (13.15)$$

формуласы бойынша

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (13.16)$$

Мұның жинақталу облысы — $(-\infty, \infty)$.

(13.16) - формула сияқты төмендегі формулалар алынады.

$$2. \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, \quad x \in (-\infty, \infty);$$

$$3. \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad x \in (-\infty, \infty);$$

$$4. (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + \dots, \quad x \in (-1, 1).$$

5. $y = \ln(1+x)$. Бұл функцияның жіктелуін басқа оңайырақ жолмен тауып көрейік. Ол үшін геометриялық қатарды қараймыз:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots \quad (13.17)$$

Бұл қатар еселігі $q = -x$, $|q| = |-x| < 1$, яғни $-1 < x < 1$ болғанда жинақталатын шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысы болады. Олай болса $f(x) = \frac{1}{1+x}$ функциясына жинақталады. Сондықтан (13.17) теңдігін $(0, x)$ ($|x| < 1$) интервалында мүшелеп интегралдайық. Сонда

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \ln|1+x| \Big|_0^x = \ln(1+x)$$

$$\text{болғандықтан} \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \dots, \quad |x| < 1$$

теңдігі орындалады. Қатардың жинақтылығын интервалдың шеткі нүктелерінде зерттей отырып, $(-1, 1]$ жартылай интервалының жинақталу облыс екенін көреміз.

Дәрежелік қатарлардың қолданылуы әр түрлі және өте көп. Олардың көмегімен кез келген дәлдікпен алынбайтын интегралдарды есептеуге, дифференциалдық теңдеулерді шешуге болады.

Мысалы, e санын 0,001 дәлдікпен есептейік. Ол үшін (13.16) формуласын $x=1$ болғанда жазамыз:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots = 2 + 0,5 + 0,1667 + 0,0417 + 0,0083 + 0,0014 + \dots = 2,7181..$$

ОН ТӨРТІНШІ ТАРАУ

КӨП АЙНЫМАЛЫ ШАМАЛАРДЫҢ ФУНКЦИЯЛАРЫ

Алдыңғы тарауларда біз бір айнымалы шамаға тәуелді функцияларды қарастырдық. Бірақ та көптеген құбылыстар, оның ішінде экономикалық байланыстар көп тәуелділіктермен анықталады. Осындай тәуелділіктерді зерттеу үшін бірнеше айнымалы функциялар қолданылады.

14.1. Негізгі ұғымдар

Біз n айнымалы шамаларды қарастырамыз. Осы айнымалы шамалар мәндерінің топтары $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ X жиынын құрсын делік.

Анықтама. Егер X жиынында жатқан әрбір $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ тобына белгілі бір заңдылықпен z айнымалысының мәні сәйкес келетін болса, онда $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — көп айнымалы функциясы берілді дейді.

Мысалы, цилиндр ауданын көрсететін $z = \pi x_1^2 x_2$ формуласы екі айнымалы функцияны береді. Мұнда x_1 — табанының радиусы, ал x_2 — биіктігі.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ айнымалылары тәуелсіз айнымалылар немесе аргументтер деп, ал z — тәуелді айнымалы немесе функция деп аталады. f таңбасы сәйкестік заңын анықтайды. X жиыны функцияның анықталу облысы деп аталады. Әрине ол n өлшемді кеңістіктің жиыны болады.

14.1-мысал. Берілген функциялардың анықталу облыстарын табыңыз.

$$а) z = \sqrt{4 - x_1^2 - x_2^2}; \quad \text{ә) } z = \frac{2}{x_1 x_2}.$$

Шешуі. а) Анықталу облысы $4 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0$ немесе $x_1^2 + x_2^2 \leq 4$ теңсіздігімен беріледі. Сонымен берілген функцияның анықталу облысы радиусы 2-ге тең, центрі координаттар жүйесінің бас нүктесінде орналасқан дөңгелек болады.

ә) $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$ болғандықтан Ox_1 пен Ox_2 өстерінде жатпайтын $Ox_1 x_2$ жазықтығының барлық нүктелер жиыны берілген функцияның анықталу облысы болады.

Көп айнымалы функциялардың кейбір мысалдарын қарастыралық.

1. $a_1, a_2, \dots, a_n, \nu$ – тұрақты сан болғанда $z = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + \nu$ – функциясы сызықты функция деп аталады.

2. $\nu_{ij}, (i = \overline{1, n}), (j = \overline{1, n})$ – тұрақты сандар болғанда $z = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \nu_{ij} x_i x_j$ – функциясы квадраттық функция деп аталады.

3. 6.5- пунктінде экономикалық теорияның іргелі ұғымдарының бірі – пайдалылық функциясы анықталған. Осы функцияның көп өлшемді жалпылама түрі $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – функциясы сатып алынған n тауардың пайдалылығын анықтайды. Осы функция көбінесе

а) $z = \sum_{i=1}^n a_i \ln(x_i - c_i)$ логорифмдік функция, мұндағы $a_i > 0$,

$x_i > c_i \geq 0$ жәнс ә) $z = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1 - \nu_i} (x_i - c_i)^{1 - \nu_i}$ түрінде кездеседі. Мұнда

$a_i > 0, 0 < \nu_i < 1, x_i > c_i \geq 0$. Бұл функция тұрақты икемділік функциясы деп аталады.

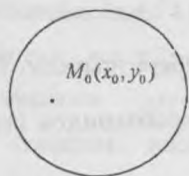
4. n айнымалы шамалар жағдайында өндірістік функция да жалпыланылады (6.5-пункт). Мұндай жағдайда ол $x_1, x_2, \dots, x_n$ факторларының себебімен пайда болған өндірістік істің нәтижесін көрсетеді.

Көбірек кездесетін өндірістік функцияларды келтірейік. Ол үшін қоғамдық өнімнің шамасы — z , еңбек шығыны — x_1 , ал өндіріс қорларының көлемі — x_2 деп алып, $n = 2$ жағдайын қарастырамыз. Сонда:

а) $z = c_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$ — Кобба-Дуглас функциясы;

ә) $z = e_0 (e_1 x_1^{-\beta} + e_2 x_2^{-\beta})^{-\frac{1}{\beta}}$ — тұрақты икемділікті орналастыру функциясы.

Бұл тарауда біз көбінесе екі аргументті ($n = 2$) функцияларды қарастырамыз. $n = 2$ үшін келтірілетін ұғымдар мен тұжырымдар $n > 2$ жағдайына оңай көшіріледі. $n = 2$ жағдайы негізгі ұғымдардың геометриялық мағаналарын пайдалануға мүмкіндік береді. Ендігәрі екі айнымалы функцияны $z = f(x, y)$ таңбасымен белгілейміз. Бұл функцияның анықталу облысы X oxy жазықтығында жатады.



(x_0, y_0) нүктесі X облысында жатсын, яғни $(x_0, y_0) \in X$. (x_0, y_0) нүктесі жататын кез келген дөңгелек осы нүктенің маңайы деп аталады (14.1-сурет).

Бірнеше айнымалылардың функциясын зерттеу үшін көп жағдайда алдыңғы тарауларда бір айнымалы функциялар үшін

14.1-сурет

құрылған математикалық аппарат қолданылады. Ол үшін $z = f(x, y)$ функциясында, мысалға, y айнымалысына $y = y_0$ мәнін беріп, $z = f(x, y_0)$ бір айнымалы функциясына көшеміз.

(x, y, z) үш өлшемді кеңістігінде жатқан z аппликаты x және y айнымалыларымен $z = f(x, y)$ теңдігі арқылы байланысқан нүктелердің жиыны $z = f(x, y)$ функцияның графигі деп аталады.

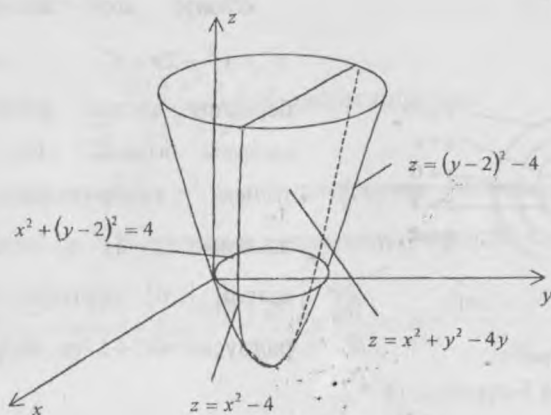
$z = f(x, y)$ функцияның графигі жалпы түрде үш өлшемді кеңістікте бір бет болады.

Көп жағдайда $z = f(x, y)$ функцияның графигін сызу үшін оның $y = y_0$ және $x = x_0$ жазықтықтарымен қималарының теңдеулері болып келетін $z = f(x, y_0)$ және $z = f(x_0, y)$ функцияларын зерттеген тиімді болады.

14.2-мысал. $z = x^2 + y^2 - 4y$ функциясының графигін сызыңыз.

Шешуі. Теңдеудің оң жағынан толық квадратты бөліп аламыз:
 $z = x^2 + (y - 2)^2 - 4$. Осы беттің oyz және oxz координат жазықтықтарына параллель жазықтықтармен қималары параболалар болады (мысалы, $x = 0$ болғанда $z = (y - 2)^2 - 4$, ал $y = 2$ болғанда $z = x^2 - 4$). Егер $z = x^2 + y^2 - 4y$ бетін xoy жазықтығымен қисақ $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ шеңбері шығады. Сондықтан $z = x^2 + y^2 - 4y$ функциясының графигі параболоидты береді (14.2-сурет).

Әрине екі айнымалы функцияның графигін салу бір айнымалы функцияның графигіне қарағанда анағұрлым қиын және оны қолдану да оңай емес. Сондықтан екі айнымалы функцияны зерттеу үшін графигін құрудан басқа да амалдар қолданылады. Солардың негізгілерінің бірі деңгей сызығы ұғымы.



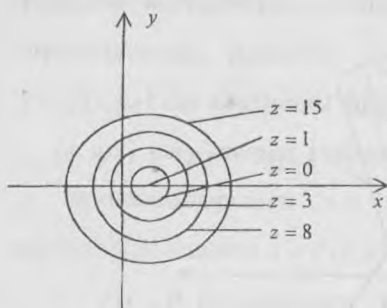
14.2-сурет

Анықтама. Барлық нүктелерінде $z = f(x, y)$ функциясының мәндері тұрақты C шамасына тең болатын жазықтықтағы нүктелердің жиыны $z = f(x, y)$ функциясының деңгей сызығы деп аталады.

C санын бұл жағдайда деңгей дейді.

Көптеген деңгей сызықтары бізге жақсы таныс. Мысалы, глобустағы параллельдер мен медиандар кеңдік және бойлық функцияларының деңгей сызықтары болады. Синоптиктер (ауа райын болжайтын қызметкерлер) температураның деңгей сызықтары болатын изотермаларды бейнелейтін карталарды шығарады.

14.3-мысал. $z = x^2 + y^2 - 2x$ функциясының деңгей сызықтарын тауып, оларды Декарт координаталар жүйесіне салыңыз.



14.3-сурет

дің теңдеуі (14.3-сурет).

(1, 0) нүктесі функцияның ең кіші $z = -1$ мәніне тең айрықша деңгей сызығы. Сонымен центрі (1, 0) нүктесінде жатқан концентрациялық шеңберлер ұясы берілген функцияның деңгей сызықтары болады.

Шешуі. oxy жазықтығында

$$x^2 + y^2 - 2x = C \quad \text{теңдеуімен}$$

берілген қисық $z = C$ деңгей сызығы болады. Осы теңдеуді толық квадраттарды бөліп жазамыз $(x-1)^2 + y^2 = C+1$. Бұл центрі (1, 0) нүктесінде болатын радиусы $\sqrt{C+1}$ -ге тең шеңбер-

14.2 Функцияның шегі және үзіліссіздігі

Бір айнымалы функция үшін анықталған ұғымдардың үлкен бөлігі екі айнымалы функция үшін де қайталанады.

Анықтама. Егер кез келген оң, тіпті мейлінше кіші ε саны үшін

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon$$

теңсіздігі барлық $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын (x, y) нүктелері үшін орындалатындай δ саны табылатын болса, онда A саны $f(x, y)$ функциясының x айнымалысы x_0 мәніне, ал y айнымалысы y_0 мәніне (немесе (x, y) нүктесі (x_0, y_0) нүктесіне) ұмтылғандағы шегі деп аталады.

Бұл шек былай жазылады:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A.$$

14.4-мысал. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ шегін табыңыз.

Шешуі. Егер $\sqrt{x^2+y^2} = \rho$ түрлендіруін енгізсек, онда $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$ шарты $\rho \rightarrow 0$ шартына эквивалентті болады. Сондықтан

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\rho^2)}{\rho} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{(\ln(1+\rho^2))'}{(\rho)'} = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{2\rho}{1+\rho^2} = 0. \end{aligned}$$

Бір айнымалы функцияның шегін табуға қарағанда екі айнымалы функцияның шегін табу анағұрлым қиын. Мұның себебі, түзудің бойында аргумент шектік нүктеге ұмтылатын тек екі бағыт бар (оң жақтан және сол жақтан), ал жазықтықта мұндай бағыттардың саны ақырсыз көп болады және әр түрлі бағыттар бойынша функцияның шектері өзара тең болмауы мүмкін.

14.5-мысал. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}$ шегінің жоқ екенін дәлелдеңіз.

Шешуі. $(0,0)$ нүктесіне $y = kx$ түзуінің бойымен нүктені ұмтылдырамыз. Сонда егер $y = kx$ болса, онда

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x \cdot kx}{x^2+k^2x^2} = \frac{2k}{1+k^2}.$$

Сонымен шектің мәні бұрыштық коэффициентке тәуелді болып шықты. k параметрінің әр түрлі мәндеріне шектің әр түрлі мәндері сәйкес келеді. Шектің мәні ұмтылу тәсіліне (жолына) тәуелсіз және

ол тек біреу болу керек. Сондықтан қарастырылып отырған шек жоқ. Енді функцияның нүктедегі үзіліссіздігі ұғымын береміз.

Анықтама. $z = f(x, y)$ функциясы үшін төмендегі үш шарт орындалсын:

- 1) $f(x, y)$ функциясы (x_0, y_0) нүктесінде анықталған;
- 2) ақырлы $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ шегі бар;
- 3) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ шегі функцияның (x_0, y_0) нүктесіндегі мәніне тең.

яғни

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Онда $z = f(x, y)$ функциясы (x_0, y_0) нүктесінде үзіліссіз дейді.

14.3 Функцияның дербес туындылары

x аргументіне Δx , ал y аргументіне Δy өсімшелерін береміз. Сонда $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ шамасы $f(x, y)$ функциясының толық өсімшесі деп аталады. Егер тек x аргументіне немесе тек y аргументіне ғана өсімше беретін болсақ, онда $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ функцияның x бойынша дербес өсімшесі, ал $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$ функцияның y бойынша дербес өсімшесі деп аталады. Жалпы жағдайда

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z.$$

14.6-мысал. $z = xy + 1$ функциясының дербес және толық өсімшесін табыңыз.

Шешуі. $\Delta_x z = (x + \Delta x)y + 1 - xy - 1 = y \cdot \Delta x$, $\Delta_y z = x(y + \Delta y) + 1 -$

$$-xy - 1 = x\Delta y, \quad \Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) + 1 - xy - 1 = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x \cdot \Delta y.$$

Сонымен $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

Анықтама. Δx нөлге ұмтылғанда $z = f(x, y)$ функциясының x бойынша өсімшесі $\Delta_x z$ -тің Δx -ке қатынасының ақырлы шегі бар болса, онда ол осы функцияның x бойынша дербес туындысы деп аталады.

$z = f(x, y)$ функциясының y бойынша дербес туындысы да осылай анықталады. Функцияның дербес туындыларын z'_x, z'_y немесе $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ немесе $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ таңбаларымен белгіленеді.

Сонымен анықтама бойынша

$$z'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad (14.1)$$

$$z'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \quad (14.2)$$

Дербес туындылардың (14.1) және (14.2) анықтамаларынан мынандай тұжырымдар шығады:

z'_x туындысын табу үшін y айнымалысын тұрақты деп есептеп $z = f(x, y)$ функциясынан x бойынша туынды алу керек; ал z'_y туындысын табу үшін x айнымалысын тұрақты ретінде қарап, $z = f(x, y)$ функциясынан y бойынша туынды алу керек.

Мұндай жағдайда 8-тараудағы дифференциалдау срежелері түгелімен сақталады.

14.7-мысал. Функциялардың дербес туындыларын табыңыз.

а) $z = x^2 \ln y + \frac{y^2}{x}$; ө) $z = x^{2y}$.

Шешуі. а) x бойынша дербес туынды алу үшін y -ті тұрақты деп есептейміз. Сонда $z'_x = 2x \ln y - \frac{y^2}{x^2}$. Сол сияқты $z'_y = \frac{x^2}{y} + \frac{2y}{x}$.

ә) y -ті тұрақты десек дәрежелік функция аламыз. Сондықтан $z'_x = 2yx^{2y-1}$. x айнымалысы тұрақты болса, онда көрсеткіштік функциясы шығады. Сондықтан $z'_y = x^{2y} \ln x(2y)' = 2x^{2y} \ln x$.

14.4. Функцияның дифференциалы

9.10-пункте $z = f(x, y)$ функциясының дифференциалы функция өсімшесінің бас бөлігі $f'(x) \cdot \Delta x$ ретінде анықталды. Осы анықтаманы кеңейте отырып, екі айнымалы функция дифференциалының анықтамасын береміз.

Анықтама. Функцияның дербес туындыларының сәйкес тәуелсіз айнымалыларының өсімшелеріне көбейтінділерінің қосындысы, яғни

$$dz = z'_x \cdot \Delta x + z'_y \cdot \Delta y \quad (14.3)$$

оның дифференциалы деп аталады.

(14.3) формуласы бойынша $f(x, y) = x$, $g(x, y) = y$ функциялары үшін $df = dx = \Delta x$, $dg = dy = \Delta y$ болғандықтан дифференциалдың формуласын

$$dz = z'_x dx + z'_y dy \quad (14.4)$$

немесе

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

түрінде жазуға болады.

Анықтама. dz — функцияның дифференциалы, ал $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y)$, $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y)$ — Δx пен Δy нөлге ұмтылғанда ақырсыз кіші шамалар болсын. Егер $z = f(x, y)$ функциясының толық өсімшесін

$$\Delta z = dz + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y \quad (14.5)$$

түрінде жазуға болатын болса, онда $z = f(x, y)$ функциясы (x, y) нүктесінде дифференциалданады дейді (дифференциалданатын функция дейді).

Дербес туындылардың бар болуы функция дифференциалдануының тек қажетті шарты болады.

Дифференциалданудың жеткілікті шартын келесі теорема береді.

Теорема. Егер (x, y) нүктесінің бір маңайында $z'_x(x, y)$, $z'_y(x, y)$ дербес туындылары бар және олар (x, y) нүктесінде үзіліссіз болса, онда $z = f(x, y)$ функциясы осы нүктеде дифференциалданады.

14.5. Бағыт бойынша туынды. Градиент

$z = f(x, y)$ функциясы $M(x, y)$ нүктесінің бір маңайында анықталған болсын және $\vec{e} = (\cos \alpha, \cos \beta)$ бірлік векторы мен бағыты анықталған $M(x, y)$ нүктесі бойында жататын ℓ бағыты (түзуі) берілсін. Мұнда $\vec{e} = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$, яғни $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ (немесе $\frac{3\pi}{2}$). $\cos \alpha$ мен $\cos \beta$ ℓ түзуінің бағыттаушы косинустары деп аталады. α — ℓ түзуінің абсцисса осінің оң бағыты мен, ал β — ордината осінің оң бағытымен жасайтын бұрыштары.

x айнымалысына Δx өсімшесін, ал y айнымалысына Δy өсімшесін $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ нүктесі ℓ түзуінің бойында жататындай және $M(x, y)$ нүктесінен $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ нүктесіне көшу $\vec{\ell}$ векторының бағыты бойынша жасалатындай етіп алайық. Сонда $\Delta_\ell z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ айырымы $z = f(x, y)$ функциясының ℓ бағыты бойынша өсімшесі деп аталады. Егер $MM_1 = \Delta\ell$ болса, онда $\Delta x = \Delta\ell \cdot \cos \alpha$, $\Delta y = \Delta\ell \cdot \cos \beta$, сондықтан $\Delta_\ell z = f(x + \Delta\ell \cdot \cos \alpha, y + \Delta\ell \cdot \cos \beta) - f(x, y)$ болады.

Анықтама. $z = f(x, y)$ функциясының ℓ бағыты бойынша өсімшесі $\Delta_\ell z$ — ің $\Delta\ell$ көшіру шамасына қатынасының $\Delta\ell$ нөлге ұмтылғандағы шегі (егер ол бар болса), яғни

$$z'_\ell = \lim_{\Delta\ell \rightarrow 0} \frac{\Delta_\ell z}{\Delta\ell}$$

шамасы $z = f(x, y)$ функциясының ℓ бағыты бойынша туындысы деп аталады.

$$z'_\ell = \frac{\partial z}{\partial \ell} \quad \text{туындысы функцияның } \ell \text{ бағыты бойынша өзгеру}$$

жылдамдығын сипаттайды. Әрине, бұрын қарастырылған z'_x және z'_y дербес туындылары функцияның OX және OY осьтеріне параллель бағыттар бойынша туындылары болады.

Анықтамадан

$$z'_\ell = z'_x \cdot \cos \alpha + z'_y \cdot \cos \beta \quad (14.6)$$

теңдігі оңай шығады.

Енді $z = f(x, y)$ функциясының градиент ұғымын береміз.

Анықтама. Координаттары $\{z'_x, z'_y\}$ болатын ∇z векторын $z = f(x, y)$ функциясының градиенті деп атайды.

$$\text{Сонымен } \nabla z = \{z'_x, z'_y\}.$$

Градиентті кейде $\text{grad}z$ таңбасымен белгілейді

$$\text{grad}z = \{z'_x, z'_y\}.$$

∇z векторы мен $\vec{e} = (\cos \alpha, \cos \beta)$ бірлік векторының скалярлық көбейтіндісі

$$(\nabla z, \vec{e}) = z'_x \cdot \cos \alpha + z'_y \cdot \cos \beta \quad (14.7)$$

болады.

(14.6) және (14.7) формулаларынан $\vec{z}_\ell' = (\nabla z, \vec{e})$ теңдігі шығады. Сонымен, $z = f(x, y)$ функциясының ℓ бағыты бойынша туындысы оның градиенті ∇z пен ℓ бағытын беретін бірлік вектор $\vec{e}$ -нің скалярлық көбейтіндісіне тең.

Скалярлық көбейтіндінің ең үлкен мәні векторлар бірдей бағытталғанда болатындығы белгілі. Сондықтан берілген нүктедегі функция градиентінің бағыты осы нүктедегі функция өзгеру жылдамдығының ең үлкен мән қабылдайтын бағыты болады.

Функцияның әрбір нүктедегі градиентін білу арқылы осы нүктеден өтетін функцияның деңгей сызықтарын нүкте маңайында сызуға болады. Егер дифференциалданатын $z = f(x, y)$ функциясының $M(x, y)$ нүктесіндегі градиентінің модулі нөлге тең болмаса, онда ол осы нүкте арқылы өтетін деңгей сызығына перпендикуляр болады.

13.6. Екі айнымалы функцияның экстремумы

Бір айнымалы функциядағы сияқты екі айнымалы функция графигінің де құрылымын анықтайтын түйінді нүктелер болады. Мұндай нүктелерге ең алдымен экстремум нүктелері жатады.

Анықтама. Егер $M(x_0, y_0)$ нүктесінің бір маңайында жатқан барлық (x, y) нүктелері үшін $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ ($f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$) теңсіздігі орындалатын болса, онда $M(x_0, y_0)$ нүктесі $z = f(x, y)$ функциясының төңіректік максимум (минимум) нүктесі деп аталады.

$z = f(x, y)$ функциясының төңіректік максимум және минимум нүктесі оның төңіректік экстремум нүктесі деп аталады.

Теорема (төңіректік экстремумның қажетті шарты). Егер (x_0, y_0) нүктесі дифференциалданатын $z = f(x, y)$ функциясының төңіректік экстремум нүктесі болса, онда осы нүктеде функцияның дербес туындылары нөлге тең болады: $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Дәлелдеуі. $M(x_0, y_0)$ нүктесі функцияның төңіректік максимум нүктесі болсын. $z = f(x, y)$ функциясында $y = y_0$ деп алып, оны x -ке тәуелді бір айнымалы функция ретінде қарастырамыз: $z_1 = f(x, y_0)$. Ферма теоремасы бойынша $z'_1(x_0) = f'_x(x_0, y_0) = 0$. Осы сияқты $f'_y(x_0, y_0) = 0$ теңдігі дәлелденеді.

Функция төңіректік экстремумының қажетті шарты орындалатын нүктелер, яғни оның дербес туындылары нөлге тең нүктелері күдікті нүктелер деп аталады.

Төңіректік экстремумның қажетті шартын былай да айтуға болады: *Төңіректік экстремум нүктелерінде дифференциалданатын функцияның градиенті нөлге тең.*

Дербес туындылардың нөлге тең болуы тек қажетті шарт болады. Жалпы жағдайда дербес туындылардың нүктеде нөлге теңдігінен ол нүктенің төңіректік экстремум болуы шықпайды.

Мысалы $z = xy$ функциясының дербес туындылары $z'_x = y$, $z'_y = x$ $(0,0)$ нүктесінде нөлге тең. Бірақ $(0,0)$ нүктесі осы функция үшін төңіректік экстремум нүктесі болмайды. Өйткені $(0,0)$ нүктесінің кез келген маңайында функцияның оң мәндері де және теріс мәндері де бар.

Енді төңіректік экстремумның жеткілікті шарттарын келтіру үшін екінші ретті дербес туындылар ұғымын кіргіземіз.

Егер $z'_x = f'_x(x, y)$ және $z'_y = f'_y(x, y)$ дербес туындыларының өздері дифференциалданатын функциялар болса, онда олардың дербес туындылары $z = f(x, y)$ функциясының екінші ретті дербес туындылары деп аталады. Олар төмендегідей анықталады және белгіленеді:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x, \quad z''_{xy} = (z'_x)'_y, \quad z''_{yy} = (z'_y)'_y, \quad z''_{yx} = (z'_y)'_x.$$

Егер (x_0, y_0) нүктесінде $z = f(x, y)$ функциясының екінші ретті дербес туындылары үзіліссіз болса, онда $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$ теңдігі орындалады.

Енді функцияның төңіректік экстремум нүктесінің жеткілікті шартын айта аламыз.

Теорема (төңіректік экстремумның жеткілікті шарты). $z = f(x, y)$ функциясы үшін мынандай шарттар орындалсын: а) $f(x, y)$ функциясы (x_0, y_0) нүктесінің бір маңайында анықталған; ә) $f(x, y)$ функциясы үшін (x_0, y_0) нүктесі күдікті нүкте болсын, яғни

$z'_x(x_0, y_0) = z'_y(x_0, y_0) = 0$; в) (x_0, y_0) нүктесінің бір маңайында $f(x, y)$ функциясының үзіліссіз екінші ретті дербес туындылары бар болсын.

Егер $\Delta \equiv f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0$ және $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ болса, онда (x_0, y_0) нүктесі $f(x, y)$ функциясының төңіректік максимум, ал $\Delta > 0$ және $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ болса, төңіректік минимум нүктесі болады. Ал егер $\Delta < 0$ болса, онда (x_0, y_0) нүктесі $z = f(x, y)$ функциясы үшін төңіректік экстремум нүкте болмайды.

14.8-мысал. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y + 1$ функциясының төңіректік экстремум нүктелерін және экстремумдарын табыңыз.

Шешуі. Функцияның бірінші ретті дербес туындыларын нөлге теңестіріп, оның күдікті нүктелерін табамыз:

$$z'_x = 2x + y - 2, \quad z'_y = x + 2y - 3,$$

$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0, \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{3}, y = \frac{4}{3}. \text{ Сонымен } M\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) \text{ нүктесі}$$

күдікті нүкте. Енді екінші ретті дербес туындылар арқылы Δ және

$$z''_{xx} = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) \text{ мәндерін табамыз. } z''_{xx} = 2, z''_{yy} = 2, z''_{xy} = z''_{yx} = 1.$$

$$\Delta = z''_{xx} \cdot z''_{yy} - (z''_{xy})^2 = 4 - 1 = 3 > 0, \quad z''_{xx} = 2 > 0. \text{ Сондықтан } \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

нүктесі берілген функция үшін төңіректік минимум нүктесі болады.

$$\text{Олай болса } z_{\min} = z\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{16}{9} - \frac{2}{3} - \frac{12}{3} + 1 = -\frac{4}{3}.$$

14.7. Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері

Берілген жиында үзіліссіз функция өзінің ең үлкен немесе ең кіші мәндерін не күдікті нүктелерде, не жиынның шекаралық нүктелерінде қабылдайды. Сондықтан функцияның күдікті нүктелеріндегі мәндерін табамыз. Одан соң функция қарастырылып отырған облысты қоршап тұған сызықта (облыстың шекарасында) функцияның ең үлкен немесе ең кіші мәнін тауып, оларды нүктелердегі функцияның мәндерімен салыстыру арқылы ең үлкен және ең кіші мәндерді табамыз.

14.9-мысал. $z = \frac{1}{2+x^2} + \frac{1}{2+y^2}$ функциясының центрі координат

жүйесінің бас нүктесінде жатқан, радиусы 1-ге тең дөңгелектегі ең үлкен және ең кіші мәндерін табыңыз.

Шешуі. Функцияның дербес туындыларын табамыз.

$$z'_x = \frac{-2x}{(2+x^2)^2}, \quad z'_y = \frac{-2y}{(2+y^2)^2}.$$

$z'_x = 0, \quad z'_y = 0$ жүйесінен күдікті нүктелерді табамыз: $x = 0, y = 0$.

Сонымен функцияның бір күдікті нүктесі бар, ол $(0,0)$ нүктесі.

Енді функцияны $x^2 + y^2 = 1$ шеңберінде зерттейміз. Шеңбердің бойында $y^2 = 1 - x^2$ болғандықтан, функцияның құрамындағы y -ті x арқылы осы формула бойынша өрнектейміз. Сонда $[-1,1]$

сегментінде анықталған $z = z(x) = \frac{1}{2+x^2} + \frac{1}{3-x^2}$ немесе

$z = z(x) = \frac{5}{6+x^2-x^4}$ функциясын аламыз. Осы функцияның

шеңбердің бойындағы күдікті нүктелерін табу үшін, оның

$$\text{туындысын табамыз: } z' = \frac{10x(2x^2 - 1)}{(6 + x^2 - x^4)^2}.$$

Осы туындыны нөлге теңестіре отырып, күдікті нүктелерді табамыз: $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Енді берілген функцияның облыс ішіндегі, облыстың шекарасындағы күдікті нүктелеріндегі және $z(x)$ функциясының $[-1, 1]$ сегментінің шеткі нүктелеріндегі мәндерін есептейміз.

$$z(0, 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \quad z(0) = \frac{5}{6}, \quad z\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{4}{5}.$$

Табылған мәндердің үлкенін және кішісін анықтаймыз. Сонда

$$\begin{aligned} z_{\text{үлкен}} &= z(0, 0) = 1, \quad z_{\text{кіші}} = z\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \\ &= z\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

14.8. Шартты экстремум. Лагранж көбейткіштері әдісі

Функцияның экстремум нүктелерін бүкіл облыстан емес, тек белгілі бір шарт орындалатын бөлігінен іздеу көптеген есептерде кездеседі.

Аргументтері $g(x, y) = C$ теңдеуін қанағаттандыратын $z = f(x, y)$ екі айнымалы функциясын қарастырамыз.

$g(x, y) = C$ теңдеуі байланыс теңдеуі деп аталады.

Анықтама. Егер нүктелері $g(x, y) = C$ байланыс теңдеуін және $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ ($f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$) теңсіздігін қанағаттандыра-

тындай (x_0, y_0) нүктесінің бір маңайы табылса, онда (x_0, y_0) нүктесі $z = f(x, y)$ функциясының шартты төңіректік максимум (минимум) нүктесі деп аталады.

Шартты төңіректік максимум және минимум нүктелері функцияның шартты төңіректік экстремум нүктелері деп аталады.

Екі айнымаы функцияның шартты төңіректік экстремум нүктесін табудың ең оңай жолы бұл есепті бір айнымалы функцияның төңіректік экстремумын табуға келтіру.

Егер де $g(x, y) = C$ байланыс теңдеуінен мысалға, y -ті x арқылы $y = \varphi(x)$ формуласымен өрнектей алсақ, онда осы формуланы $z = f(x, y)$ екі айнымалы функциясына қойып бір айнымалы функция аламыз: $z = f(x, \varphi(x))$. Осы функцияның төңіректік экстремумы $z = f(x, y)$ функциясының шартты төңіректік экстремумы болады.

14.10-мысал. $z = x^2 + y^2$ функциясының $y - 2x = 1$ теңдеуін қанағаттандыратын шартты төңіректік экстремумдарын табыңыз.

Шешуі. Байланыс теңдеуінен y -ті тауып, оны функцияға қоямыз. $y = 2x + 1$, $z = x^2 + (2x + 1)^2$ немесе $z = 5x^2 + 4x + 1$. Енді осы функцияның төңіректік экстремумын табамыз. $z' = 10x + 4$, $10x + 4 = 0$, $x_0 = -\frac{2}{5}$. Сондықтан $z = 5x^2 + 4x + 1$ функциясының тек

бір ғана төңіректік экстремумы бар, ол $x_0 = -\frac{2}{5}$. y -ің сәйкес мәнін

байланыс теңдеуі $y = 2x + 1$ теңдігінен табамыз $y_0 = 2 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) + 1 = \frac{1}{5}$.

Сонымен $\left(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$ нүктесі берілген функцияның шартты төңіректік

экстремумы болады. $z_{xx}'' = 10 > 0$ болғандықтан бұл нүкте функцияның шартты төңіректік минимум нүктесі.

Қарастырылған мысалда байланыс теңдеуі сызықтық теңдеу болады, сондықтан одан y айнымалысын x арқылы оңай таптық. Жалпы жағдайда бұлай істей алмаймыз.

Жалпы жағдайда төңіректік шартты экстремумды табу үшін Лагранж көбейткіштері әдісі қолданылады.

$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda[g(x, y) - C]$ функциясы Лагранж функциясы деп аталады. Мұндағы λ параметрін Лагранж көбейткіші дейді. Лагранж көбейткіштері әдісі төмендегі теоремаға негізделген.

Теорема. Егер (x_0, y_0) нүктесі $z = f(x, y)$ функциясының $g(x, y) = C$ шартын орындайтын шартты төңіректік экстремум нүктесі болса, онда (x_0, y_0, λ_0) нүктесі $L(x, y, \lambda)$ функциясының төңіректік экстремумы болатындай λ_0 мәні табылады.

Сондықтан $z = f(x, y)$ функциясының $g(x, y) = C$ шартын қанағаттандыратын төңіректік экстремум нүктелерін табу үшін

$$\begin{cases} L'_x = f'_x(x, y) + \lambda g'_x(x, y) = 0, \\ L'_y = f'_y(x, y) + \lambda g'_y(x, y) = 0, \\ L'_\lambda = g(x, y) - C = 0 \end{cases}$$

жүйесінің шешімдерін табу керек.

Осы жүйенің соңғы теңдеуі байланыс теңдеуін береді. Алдыңғы екі теңдеуді

$$\text{grad} f = -\lambda \cdot \text{grad} g$$

түрінде жазуға болады. Сондықтан шартты төңіректік экстремум нүктелерінде $f(x, y)$ пен $g(x, y)$ функцияларының градиенттері өзара сызықты (коллинеар) векторлар болады. Басқа сөзбен

айтқанда, төңіректік экстремум нүктелерінде $z = f(x, y)$ функциясының деңгейлік сызығы мен $g(x, y) = C$ сызығы жанасады.

14.11-мысал. $z = x^2 + 2y^2$ функциясының $y - x = 1$ теңдеуін қанағаттандыратын шартты төңіректік экстремумдарын Лагранж көбейткіштері әдісімен табыңыз.

Шешуі. $L = x^2 + 2y^2 + \lambda(y - x - 1)$ Лагранж функциясының дербес туындыларын тауып, оларды нөлге теңестіреміз: $2x - \lambda = 0$, $4y + \lambda = 0$, $y - x - 1 = 0$. Бұл жүйенің тек бір ғана шешімі бар, ол $x = -\frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{3}$, $\lambda = -\frac{4}{3}$. Сондықтан $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ нүктесі берілген

функция үшін төңіректік экстремум нүктесі болады. $z''_{xx} = 2 > 0$ болғандықтан ол төңіректік минимум нүктесі болады.

Шартты экстремум табу есептері қорларды тиімді тарату, бағалы қағаздар тобын тиімді таңдау сияқты көптеген экономикалық есептерде қолданылады.

14.9. Эмпирикалық формулалар ұғымы. Ең кіші квадрат әдісі

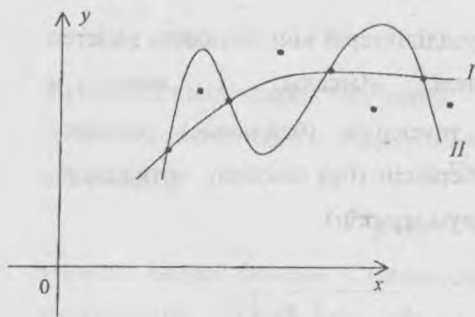
Тәжірибеде эксперименттік тәуелділіктерді көп жағдайда тегістеп (өңдеп) шығаруға тура келеді. Мысалы, x және y айнымалыларының арасындағы тәуелділік (байланыс) тәжірибе жүргізу арқылы таблица түрінде берілсін (бұл бақылау нәтижелері, статистикалық өңдеу және т.б. болуы мүмкін).

x	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_i	...	y_n

x пен y айнымалыларының арасындағы эксперименттік тәуелділікті мүмкіндігінше жақсылап өңдеу керек, яғни осы екі шаманың арасындағы байланысты өлшеулер немесе статистикалық бақылаулар кезінде болатын қателіктерден шығатын кездейсоқ ауытқуларды алып тастау арқылы дәл көрсетуіміз керек. Тәжірибеден алынған деректерді аналитикалық түрде көрсететін формулалар эмпирикалық формулалар деп аталады. Эмпирикалық формулаларды табу екі кезеңнен тұрады. Бірінші кезеңде $y = f(x)$ тәуелділігін, яғни осы тәуелділік сызықтық па, квадраттық па, логорифмдік пе, жоқ әлде басқа бір тәуелділік пе екенін анықтау керек.

Эксперименттік зерттеулердің нәтижелері (x_i, y_i) координаталар жазықтығында нүктелермен белгіленген делік (14.4-сурет). Әрине, осы нүктелер арқылы көп сызықтар өтеді. Осы сызықтардың ішінен эмпирикалық деректерді дәл беретін ең тегіс сызықты таңдап алуымыз керек.

Мысалы, зертеуші 14.4-суретте сызылған екі сызықтың I мен белгіленген сызығын таңдап алады. Таңдау қорытындысының дұрыстығын тексеру үшін қосымша зерттеулер жүргізіледі, яғни x



14.4-сурет

және y шамаларының мәндерін бір мезгілде бір-неше рет өлшейді. Алынған қосымша жазықтықта белгіленеді. Егер осы нүктелер тандалған сызыққа жеткілікті жақын орналасса (14.4-сурет), онда сызық дұрыс тандалды

дейміз. Егер олай болмаса қисыққа түзетулер енгізіп, тағыда қосымша өлшеулер жүргізіледі. Сонымен қатар $y = f(x)$ функциясын таңдап алу үшін қосымша математикалық амалдар қолданылады.

$y = f(x)$ функциясын таңдап алғаннан кейін екінші кезеңге, яғни функцияның белгісіз параметрлерін табуға көшеміз. Мысалы, $y = f(x)$ функциясы ретінде $y = ax + b$ сызықтық функциясы алынды делік. a және b параметрлерін көбінесе ең кіші квадраттар әдісімен табады. Енді осы әдісті қолдану арқылы a мен b -ны қалай табатынын көрсетелік. $y = ax + b$ формуласына x пен y айнымалыларының өлшеніп алынған мәндерін қойсақ

$$y_1 - (ax_1 + b) = \delta_1$$

$$y_2 - (ax_2 + b) = \delta_2$$

.....

$$y_n - (ax_n + b) = \delta_n$$

қателіктері шығады. a мен b параметрлерін $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ қателіктері абсолют шамалары бойынша жеткілікті кіші мәндер болатындай етіп таңдап алуымыз керек. Осы параметрлерді ең кіші квадрат әдісімен таңдап аламыз. Ол үшін қателіктер квадраттарының қосындысын қараймыз:

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2 = \sum_{i=1}^n \delta_i^2.$$

$S(a, b)$ өрнегін a мен b -ға тәуелді функция ретінде қарай отырып, оның экстремумдарын табамыз. $S(a, b)$ функциясының a мен b бойынша дербес туындылары

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)] x_i,$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]$$

өрнектерін нөлге теңестіру арқылы a мен b мәндерін табамыз.

$$\sum_{i=1}^n y_i x_i = a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i,$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = a \sum_{i=1}^n x_i + bn.$$

Осы жүйе ең кіші квадрат әдісінің нормальданған жүйесі деп аталады. Жүйеден табылған a және b мәндерінде $S(a, b)$ функциясының минимумы болатындығы 2-ретті туындылар арқылы оңай дәлелденеді:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b} = 2 \sum_{i=1}^n x_i, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = 2n,$$

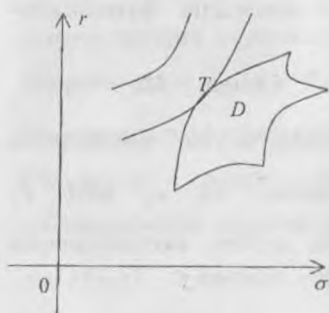
$$\Delta = \frac{\partial^2 S}{\partial a^2} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b} \right)^2 = 4(n-1) \sum_{i=1}^n x_i^2 - 8 \sum_{i \neq j} x_i x_j.$$

Сондықтан үлкен n -дер үшін $\Delta > 0$ және $\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} \geq 0$, яғни нормалдық жүйеден алынған (a, b) мәнінде $S(a, b)$ функциясы ең кіші мәнді қабылдайды.

14.10. Экономикалық зерттеулерде кездесетін кейбір екі айнымалы функциялар

Көптеген экономикалық құбылыстар екі айнымалы функциялардың деңгей сызықтары арқылы сипатталады. Ол сызықтар изокванттар деп аталады. x және y арқылы өндірістің әр түрлі факторлары, ал $z = f(x, y)$ функциясы x пен y -тің мәндері себеп

болатын өндіріс өнімі болсын. Изокванттар арқылы өнім көлемін азайтпай отырып, бір фактордың санын азайту арқылы екінші фактордың санын көбейтуге болады. Осылай істеуге болатын (x, y) факторлар мәндерінің облысы экономикалық облыс деп аталады. Яғни ол бір факторды екінші фактормен ауыстыруға болатын облыс. Изокванттар арқылы қорларды тиімді үлестіру есебін шығаруға болады. Мысалы, $z = g(x, y)$ функциясы x және y қорларын дайындауға кететін шығынды анықтайтын шығын функциясы болсын. Сонда өнім мен шығын функцияларының изокванттарын бірге зерттеу арқылы x және y факторларының тиімді мәнін таңдап алуға болады. Осы екі сызықтардың жанасу нүктелерінің координаттары факторлардың тиімді мәндері болады. Пайдалылық функциясының деңгей сызықтары арқылы бір тауарды екінші тауармен тиімді ауыстыру, яғни тиімді тұтыну есебін шығаруға болады. Талғаусыздық сызықтарының басқа қолданулары инвестиция теориясында пайда болады. Құнды қағаздар қоржыны екі параметрмен сипатталады. Олар күтілген табыс — r және тәуелділік — σ . Әрбір қоржынға (σ, r) координаттар жазығынан нүктені сәйкес қоюға болады, сонда барлық қоржындар жиыны бір D облысын береді (14.5-сурет).



14.5-сурет

Әрине, бірдей табысты қоржындардың ішінен инвестор тәуекелділігі аз қоржынды таңдайды. Талғаусыздық сызығы болатын $U = U(\sigma, r)$ — таңдау функциясы деңгей сызығының дөңестігі төмен бағытталады. D облысымен жанасатын $U = U(\sigma, r)$ функциясы деңгей сызығының

нүктесі — T инвесторға ұнайтын қоржынға сәйкес келеді.

Дербес туындылар ұғымы да экономика ғылымдарында кеңінен қолданылады. 8.6-пункте бір айнымалы функцияның икемділік ұғымы ($E_x(y)$ -функциясы) берілген. Осындай ұғымды көп айнымалы $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясы үшін де енгізуге болады:

$$E_{x_i}(z) = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta_{x_i} z}{z} : \frac{\Delta x_i}{x_i} \right) = \frac{x_i}{z} \cdot z'_{x_i}$$

Сонымен, $E_{x_i}(z) = \frac{x_i}{z} \cdot z'_{x_i}$ функциясының айнымалысы бойынша икемділігі болады.

Мысалы, $z = \epsilon_0 x^{\epsilon_1} \cdot y^{\epsilon_2}$ Кобба-Дуглас функциясында $E_x(z) = \epsilon_1$, $E_y(z) = \epsilon_2$, яғни ϵ_1 мен ϵ_2 көрсеткіштері тек еңбек шығыны x немесе тек өндіріс қоры y шамаларының 1% өзгергенінде өндіріс шығаратын өнімнің шамамен қанша процентке өсетінін көрсетеді.

Пайдалылық функциясының дербес туындылары u'_x, u'_y шектік пайдалылықтар деп аталып, Mu_x және Mu_y таңбаларымен белгіленеді. Егер тауардың санын бағамен есептейтін болса, онда шектік пайдалылықтарды осы тауарға түскен сұраныстың функциясы ретінде қарауға болады.

$U(x, y) = \frac{a_1}{1 - \epsilon_1} x^{1 - \epsilon_1} + \frac{a_2}{1 - \epsilon_2} y^{1 - \epsilon_2}$ тұрақты икемділік функциясының шектік пайдалылығын табайық. Сонда $Mu_x = a_1 x^{-\epsilon_1}$, $Mu_y = a_2 y^{-\epsilon_2}$, яғни әрбір тауар бағасының өсуіне байланысты сұраныс функциясы — кемімелі функция, ал ϵ_1 мен ϵ_2 параметрлері осы тауарларға сұраныстың дербес икемділіктерін көрсетеді.

Егер q сұранысын бірнеше айнымалылардың функциясы ретінде, мысалы, тауар бағасы p мен тұтынушылар табысы r шамаларының функциясы $q = f(p, r)$ ретінде қараса, онда

$E_p(q) = \frac{p}{q} q_p'$ — сұраныстың бағаға байланысты дербес икемділігі,

ал $E_r(q) = \frac{r}{q} q_r'$ — сұраныстың табысқа байланысты дербес икемділігі

болады. Сапасы жоғары тауарлар үшін $E_r(q) > 0$, ал сапасы төмен

тауарлар үшін $E_r(q) < 0$, өйткені табыс өскен сайын сапасы жоғары

тауарларға сұраныс көбейеді де, ал сапасы — төмен тауарларға

азаяды. Егер тауар сұранысын зерттеу кезінде басқа бір қосымша

бағасы p_1 болатын альтернативтік тауардың әсерін ескеру керек

болса, яғни сұранысты $q = f(p, p_1, r)$ болатын үш айнымалыға

тәуелді функция ретінде қараса, онда $E_{p_1}(q) = \frac{p_1}{q} q_{p_1}'$

формуласымен анықталатын сұраныстың салыстырмалы икемділік

коэффициентін қарау керек болады. Ол альтернативтік тауардың

бағасы 1%-ға өзгергенде негізгі тауарға сұраныстың шамамен

қанша пайызға өсетінін көрсетеді. Әрине, бірін-бірі ауыстыратын

тауарлар үшін $E_{p_1}(q) > 0$, өйткені бір тауардың бағасының өсуі,

екінші тауарға сұранысты көбейтеді. Ал бірін-бірі толықтыратын

тауарлар үшін $E_{p_1}(q) < 0$, өйткені бұл жағдайда кез келген тауардың

бағасының өсуі тауар сұранысын азайтуға соқтырады. Енді бірнеше

айнымалы өндіріс функциясын сипаттайтын, экономика

ғылымдарында маңызы зор икемділік коэффициентіне тоқталамыз.

$z = f(x, y)$ — өндіріс функциясы, ал $Mp(x) = f'_x(x, y)$ және

$Mp(y) = f'_y(x, y)$ — x және y қорларына сәйкес шектік өнімдер болсын.

$$\sigma_{xy} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta \ln \frac{x}{y}}{\Delta \ln \frac{Mp(x)}{Mp(y)}} = - \frac{d \ln \frac{x}{y}}{d \ln \frac{Mp(x)}{Mp(y)}}$$

шамасы орналасу икемділігінің коэффициенті деп аталады. Δt өсімшесі жеткілікті аз болғанда $\Delta \ln t = \frac{\Delta t}{t}$ жуық теңдігі орындалатын болғандықтан, айнымалы шама логарифмінің өсімшесін оның салыстырмалы өсімшесі ретінде қарауға болады. Сондықтан, орналасу икемділігі коэффициентінің кері шамасы $\frac{x}{y}$ қорлар қатынасының 1% өзгергенінде $Mp(x)/Mp(y)$ шектік өнімдер қатынасының қанша пайызға өзгертетінін көрсетеді.

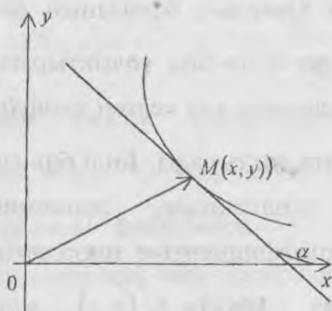
Жалпы жағдайда орналасу икемділігінің коэффициенті екі айнымалы функция болады. Оның изокванта нүктелерімен өрнектелуін қарайық. Изокванта бойында $z = f(x, y)$ функциясы тұрақты болғандықтан, оның толық дифференциалы

$dz = f'_x dx + f'_y dy$ изокванта бойында нөлге тең болады. Осыдан

$-\frac{dy}{dx} = \frac{Mp(x)}{Mp(y)}$ теңдігі шығады. Осы

теңдікті ескерсек, $\frac{1}{\sigma_{xy}} = \frac{d \ln \left(-\frac{dy}{dx} \right)}{d \ln \frac{y}{x}}$

теңдігін аламыз.



14.6-сурет

Мұнда $\frac{dy}{dx} = M(x, y)$ нүктесінде изокванта жүргізілген

жанаманың бұрыштық коэффициенті: $k = \operatorname{tg} \alpha$ (14.6-сурет), $\frac{y}{x} = \overline{OM}$

радиус векторының бұрыштық коэффициенті. Сондықтан $\frac{1}{\sigma_{xy}}$

шамасы изоквантаның қисықтығын көрсетеді. Функция графигінің дөңестігі ұғымы да маңызды экономикалық заңдылықтарды түсіну үшін өте қажет. Ол кемімелі табыс және кемімелі шектік пайдалылық заңдарын математикалық формула түрінде өрнектеуде қолданылады.

ӘДЕБИЕТТЕР

1. **Ә.Тұңғатаров.** Жоғары математика. Экономикалық мамандықтарға арналған курс. 1-бөлім. Оқу құралы. – Алматы: Республикалық баспа кабинеті, 2000. – 104 бет.
2. **М.С.Красс.** – Математика для экономических специальностей. Учебник. – М.: 1998. – 463с.
3. Высшая математика для экономистов. Под ред. проф. Н.Ш.Крамера. – Москва: Банки и биржи, 1998. – 471 с.
4. **Ә.Тұңғатаров, А.Қазешев.** Жоғары математика курсының жұмыс бағдарламасы: Экономика мамандықтары бойынша даярланатын студенттерге арналған. – Алматы: Экономика 2001. – 40 бет.

МАЗМҰНЫ

Кіріспе.....	3
II бөлім. Математикалық анализ және жөй дифференциалдық теңдеулер.....	4
6-тарау. Функциялар	
6.1. Жиындар ұғымы.....	4
6.2. Нақты санның абсолют шамасы және нүктенің маңайы.....	6
6.3. Функция ұғымы. Функцияның негізгі түрлері.....	8
6.4. Функциялардың классификациялары.....	12
6.5. Функциялардың экономикадағы қолданулары.....	15
7-тарау. Шектер және үзіліссіздік	
7.1. Сандық тізбектердің шегі.....	17
7.2. Функцияның шегі.....	19
7.3. Ақырсыз кіші және ақырсыз үлкен шамалар.....	23
7.4. Шектер туралы негізгі теоремалар. Шек бар болуының негізгі белгілері.....	27
7.5. Тамаша шектер. Пайызды үзіліссіз қосу есебі.....	30
7.6. Функцияның үзіліссіздігі.....	34
7.7. Шектермен байланысты кейбір есептердің шығару жолдары.....	41
8-тарау. Дифференциалдық есептеулер	
8.1. Туынды ұғымына келтіретін есептер.....	48
8.2. Туындының анықтамасы. Функцияның үзіліссіздігі мен дифференциалдануының арасындағы байланыс.....	51
8.3. Дифференциалдаудың негізгі ережелері.....	54
8.4. Күрделі және кері функцияларды дифференциалдау.....	56
8.5. Негізгі элементар функциялардың туындылары	
Жоғары ретті туындылар ұғымы.....	58

8.6. Туындының экономикалық мағынасы. Туынды ұғымын экономикада қолдану.....	62
---	----

9-тарау. Туындының қолданылуы және функцияның дифференциалы

9.1. Дифференциалдық есептеудің негізгі теоремалары.....	67
9.2. Лопиталь ережесі.....	70
9.3. Функцияның өсуі және кемуі.....	73
9.4. Функцияның экстремумы.....	73
9.5. Функцияның кесіндідегі ең үлкен және ең кіші мәндері.....	78
9.6. Функцияның дөңестігі. Ирен нүктесі.....	79
9.7. Функция графигінің асимптоталары.....	83
9.8. Функцияны зерттеудің жалпы сұлбасы және оның графигін салу.....	86
9.9. Туындының экономикада қолданылуы.....	89
9.10. Функцияның дифференциалы.....	90
9.11. Дифференциалдың жуық есептеулерде қолданылуы.....	93
9.12. Жоғары дәрежелі дифференциал.....	95

10-тарау. Анықталмаған интеграл

10.1. Алғашқы функция және анықталмаған интеграл.....	96
10.2. Анықталмаған интегралдың негізгі қасиеттері. Негізгі элементар функциялардың интегралдары.....	98
10.3. Келтіру тәсілімен интегралдау.....	102
10.4. Айнымалыны алмастыру тәсілімен интегралдау.....	103
10.5. Бөліктеп интегралдау тәсілі.....	107
10.6. Рационал функцияларды интегралдау.....	110
10.7. Иррационал функциялардың кейбір түрлерін интегралдау.....	114
10.8. Тригонометриялық функцияларды интегралдау.....	116
10.9. Элементар функциялар арқылы алынбайтын	

интегралдар.....	118
------------------	-----

11-тарау. Анықталған интеграл

11.1. Анықталған интеграл ұғымы, оның геометриялық және экономикалық мағынасы.....	119
11.2. Анықталған интегралдың қасиеттері.....	124
11.3. Ньютон-Лейбниц формуласы.....	127
11.4. Айнымалыны ауыстыру және бөліктеп интегралдау жолдары арқылы анықталған интегралды есептеу.....	129
11.5. Анықталған интегралдың геометриялық қолданулары.....	131
11.6. Меншіксіз интегралдар.....	136
11.7. Анықталған интегралды жуықтап есептеу.....	140
11.8. Анықталған интеграл ұғымын экономикада қолдану.....	143

12-тарау. Дифференциалдық теңдеулер

12.1. Негізгі ұғымдар.....	147
12.2. Бірінші дәрежелі дифференциалдық теңдеулер. Шешімнің бар болуы және жалғыздығы туралы теорема.....	151
12.3. Бірінші дәрежелі толық емес дифференциалдық теңдеулер. Айнымалылары ажыратылатын дифференциалдық теңдеулер.....	152
12.4. Бірінші дәрежелі біртекті дифференциалдық теңдеулер.....	155
12.5. Бірінші дәрежелі, сызықты дифференциалдық теңдеулер.....	156
12.6. Дәрежесі төмендетілетін екінші ретті дифференциалдық теңдеулер.....	158
12.7. Тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеулер.....	160

13-тарау. Қатарлар

13.1. Сандық қатарлар. Негізгі ұғымдар.....	165
13.2. Жинақтылықтың қажетті шарты. Гармоникалық қатар.....	169

13.3. Мүшелері оң сандық қатарлар.....	171
13.4. Мүшелерінің таңбалары әр түрлі сандық қатарлар.....	178
13.5. Дәрежелік қатарлар.....	181
13.6. Маклорен қатары.....	185

14-тарау. Көп айнымалы шамалардың функциялары

14.1. Негізгі ұғымдар.....	189
14.2. Функцияның шегі және үзіліссіздігі.....	194
14.3. Функцияның дербес туындылары.....	196
14.4. Функцияның дифференциалы.....	198
14.5. Бағыт бойынша туынды. Градиент.....	199
14.6. Екі айнымалы функцияның экстремумы.....	202
14.7. Функцияның ең үлкен және ең кіші мөндері.....	205
14.8. Шартты экстремум. Лагранж көрсеткіштрі әдісі.....	206
14.9. Эмпирикалық формулалар ұғымы. Ең кіші квадрат әдісі.....	209
14.10. Экономикалық зерттеулерде кездесетін кейбір екі айнымалы функциялар.....	212

Әдебиеттер.....	218
------------------------	------------

ТУНФАТАРОВ Әлиасқар Бекенұлы

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

2-ая часть

Учебное пособие
(на казахском языке)

Редакторы *Н.Р. Жексенбаева*
Компьютерде терген *Г.К. Рамазанова*
Мұқаба суретшісі *Н.А. Мауль*

Басуға 21.11.01 қол қойылды. Пішімі 60x84¹/₁₆. Баспа табағы 13,9.
Есептік баспа табағы 10,2. Шартты баспа табағы 11,9.
Таралымы 500 дана. Тапсырыс №3/82.

Тұрар Рысқұлов атындағы Қазақ экономикалық университетінің
“Экономика” баспасы.

480063, Алматы қаласы, Сайын көшесі, 81-үй.