ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

Е. Ә. ҚАСЫМОВ, Қ. Ә. ҚАСЫМОВ

ЖОҒАРЫ МАТЕМАТИКА КУРСЫ

МАТЕМАТИКАЛЫҚ АНАЛИЗ

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots = \{S_n\}.$$

2 БӨЛІМ

Алматы, 2014

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

Е. Ә. ҚАСЫМОВ, Қ. Ә. ҚАСЫМОВ

ЖОҒАРЫ МАТЕМАТИКА КУРСЫ

МАТЕМАТИКАЛЫҚ АНАЛИЗ

2-бөлім

Оқулық

Алматы, 2014

ӘОЖ 517 (075.8)
КБЖ 22.1 я 73
Қ 43

Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігінің «Оқулық» республикалық ғылыми-практикалық орталығы бекіткен

Пікір жазғандар:

Сақабеков Ә. – физика-математика ғылымдарының докторы, профессор;
Коксалов Қ. К. – физика-математика ғылымдарының докторы, профессор;
Дауылбаев М. Қ – физика-математика ғылымдарының докторы, профессор;
Айдос Е. Ж. – физика-математика ғылымдарының кандидаты, профессор.

Қ 43 **Қасымов Е. Ә., Қасымов Қ. Ә.**
Жоғары математика курсы (Математикалық анализ). Оқулық. 2-бөлім. – Алматы, «Экономика» баспасы. 2014, – 386 б.

ISBN 978-601-225-694-9

Оқулық авторлардың «Жоғары математика курсы» кітаптарының жалғасы, 3-томның 2-бөлімі. Мұнда санды және функциялық тізбектер мен қатарлар, Фурье қатарлары, көп айнымалы функция, екі және үш еселі интегралдар, қисық сызықты және беттік интегралдар, өрістер теориясының тақырыптары толық қамтылған.

Математика курсының негізгі ұғымдары мен теориялары жан-жақты талқыланған, оларды толық меңгеру үшін әрбір тақырып соңында мысалдар қарастырылып, оларды шешу жолдары мен әдістері және осы тақырыпқа тиісті сұрақтар мен тапсырмалар ұсынылған.

Оқулық 5В060200-Ақпараттану мамандықтың типтік бағдарламасына негізделіп, «Математикалық анализ» пәні бойынша жазылды және 5В070300-Ақпараттану жүйелер, 5В070300-Есептеу техникасы және программалық қамтама, 5В070400-Математикалық және компьютерлік модельдеу мамандықтарына пайдалануға болады.

Кітап техникалық және педагогикалық жоғары оқу орындарының типтік бағдарламаларына сәйкестендіріліп жазылған.

ӘОЖ 517 (075.8)
КБЖ 22.1 я 73

ISBN 978-601-225-694-9

МАЗМҰНЫ

АЛҒЫ СӨЗ

Құрметті оқырмандар, сіздердің назарларыңызға ұсынылып отырған бұл кітапта жоғары математика курсының санды қатарлар, функциялық тізбектер мен қатарлар және Фурье қатарлары, көп айнымалы мен айқын емес функциялар, екі және үш еселі интегралдар, қисық сызықты мен беттік интегралдар, өрістер теориясы тақырыптары толық қамтылған.

Техникалық жоғары оқу орындарында жоғары математика курсын оқу ерекшелігі мен пәнге бөлінген сағаттарға байланысты курсты студенттерге мейлінше қарапайым әрі теорияны мысалдармен ұштастырып баяндаған тиімді. Сондықтан әрбір тақырып соңында теорияны меңгеру үшін егжей-тегжейлі талданған мысалдар келтіріліп, мүмкіндігінше теорияның геометриялық мағынасы мен сызбалары, ескертулері, түсіндірмелері толық беріліп, мысалдармен қамтылған.

2004–2006, 2011 жылдары Е. Ә. Қасымовтың техникалық оқу орындарына арналған «Жоғары математика» (1, 2-бөлім) мен «Математиканың арнайы кустары» атты оқулықтары Қ. И. Сәтбаев атындағы Қазақ Ұлттық техникалық университетінің баспасынан жарық көрді.

1994-1997 жылдары «Санат» баспасынан жарық көрген ағайынды Қасымовтардың «Жоғары математика курсы»: Аналитикалық геометрия (1-том) мен Сызықты алгебра (2-том) оқулықтары назарларыңызға ұсынылды. Осы курстың 3-томы «Матаматикалық анализ» пәніне арналған және ол екі бөлімнен тұрады. 1-бөлімі 2006 жылы әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университетінің «Қазақ университеті» баспасынан жарық көрді. Ал 2-бөлім сіздердің назарларыңызға ұсынып отырмыз. Осы оқулықтар оқыту үдерісінде кездесетін көптеген олқылықтардың орнын толтырар деп сенеміз.

Авторлар

VII ТАРАУ. САНДАР ЖӘНЕ ФУНКЦИЯЛЫҚ ҚАТАРЛАР. ФУРЬЕ ҚАТАРЫ

7.1. Сандар қатары және оның жинақтылығы

Біз $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ немесе $\{a_n\}$ сандар тізбегін қарастырайық, мұндағы сандар тізбектің мүшелері – нақты сандар. Осы сандар тізбектің мүшелерінен анықталған

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (7.1)$$

қосынды **сандар қатары** деп аталады, мұндағы a_i – қатардың i-ші мүшесі (i-ші элементі), ал a_n – қатардың **n-ші мүшесі** немесе **жалпы мүшесі** деп аталады. Төмендегі қосындылар:

$$S_1 = a_1,$$
$$S_2 = a_1 + a_2,$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$
$$..............................$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n,$$

(7.1) сандар қатардың **дербес қосындылары** деп аталады. Ал $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ қосынды (7.1) сандар қатардың **дербес қосындысы** немесе сандар қатардың **алғашқы n мүшелерінің қосындысы** деп аталады, ал $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + ...$ сандар қатардың **қалдық қатары** деп аталады. (7.1) қатардың мүшелерінен анықталған $\{S_n\}$ дербес қосынды тізбегін қарастырайық:

$$S_1, S_2, ..., S_n, ... = \{S_n\}. \qquad (7.2)$$

Анықтама. Егер (7.2) тізбектің

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S < \infty \qquad (7.3)$$

шектелген (шенелген) шегі бар болса, онда S санын (7.1) қатардың қосындысы дейміз:

$$S = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Бұл жағдайда (7.1) **қатар жинақты** деп аталады, ал егер (7.3) шек жоқ немесе $\pm\infty$-ке тең болса, онда **қатар жинақсыз** деп аталады.

Демек, қатардың жинақтылығы туралы сөз қозғағанда, бұл сұрақ (7.3) шектің бар болуымен пара-пар, басқаша айтқанда, қатардың жинақтылығымен жинақсыздығы осы қатардың дербес қосындыларынан анықталған $\{S_n\}$ тізбегінің жинақтылығы мен жинақсыздығына тәуелді болады.

Бізге мектеп көлемінен таныс шексіз геометриялық прогрессияның мүшелерінен анықталған қатар санды қатарға мысал бола алады:

$$a + aq + aq^2 + ... + aq^n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} aq^n;\ a \neq 0. \qquad (7.4)$$

Геометриялық прогрессияның алғашқы n мүшелерінің қосындысын табайық:

$$S_n = a + aq + aq^2 + ... + aq^n = a\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}.$$

Егер $|q| < 1$ болса, онда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q} < \infty$. Демек, $|q| < 1$ болғанда геометриялық прогрессия қатары жинақты, бұл жағдайда:

$$\frac{a}{1-q} = a + aq + aq^2 + ... + aq^n + ...$$

Егер $|q| > 1$ болса, онда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, яғни қатар жинақсыз. Егер $q = 1$ және $q = -1$ болса, онда сәйкес:

$$a + a + ... + a + ...; \qquad a - a - ... + (-1)^{n+1} a + ...$$

Бірінші қатар жинақсыз, себебі $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot a = \infty$, ал екінші қатардың шегі жоқ, себебі:

$$S_n = \begin{cases} a, & n - так \\ 0, & n - жуп \end{cases}$$

Сондықтан екінші қатарда жинақсыз. Сонымен, геометриялық прогрессияның еселегі $|q| < 1$ теңсіздігін қанағаттандыратын q үшін геометриялық прогрессия қатар жинақты, ал $|q| \geq 1$ үшін қатар жинақсыз болады.

Мысалдар. **1.** Сандар қатардың анықтамасын пайдаланып, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ қатардың қосындысын табайық.

Шешуі. Ол үшін белгісіз коэффициенттер әдісін пайдаланып, қатардың $a_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ жалпы мүшесін жай бөлшектерге жіктейік:

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{A_1}{n+1}+\frac{A_2}{n+2}=\frac{A_1(n+2)+A_2(n+1)}{(n+1)(n+2)}.$$

Бірінші мен соңғы бөлшектердің алымдарын теңестіріп, A_1 мен A_2 белгісіз коэффициенттерді табайық: $1=A_1(n+2)+A_2(n+1)$, $A_1=1,\ A_2=-1$. Сонда $a_n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$. Осыдан: $a_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\quad a_2=\frac{1}{3}-\frac{1}{4},$ $a_3=\frac{1}{4}-\frac{1}{5},\ldots,\quad a_{n-1}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},\quad a_n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}.$

Осы мүшелерді қосып, берілген қатардың алғашқы n мүшелерінің қосындысын табамыз:

$$S_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}.$$

Анықтама бойынша S_n-нен шекке көшіп, қатардың қосындысын анықтаймыз:

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}<\infty.$$

Демек берілген қатар жинақты.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ қатарын зерттейік.

Шешуі. Бұл қатар **гармоникалық қатар** деп аталады. Гармоникалық қатардың жинақсыз болатынын дәлелдейік. Ол үшін гармоникалық қатардың S_n мен S_{2n}-дербес қосындыларын қарастырайық:

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n},\ S_{2n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

Осыдан:

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\geq n\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Онда $S_{2n}>S_n+\frac{1}{2}$. Енді берілген қатар жинақты болсын деп ұйғарайық, онда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$. Демек, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}=S$ болған болар еді, ал $S_{2n}>S_n+\frac{1}{2}$ теңсіздігінен мына қайшылыққа келеміз: $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}>\lim\limits_{n\to\infty} S_n+\frac{1}{2},\ S>S+\frac{1}{2}$. Осы қайшылық гармоникалық қатардың жинақсыз болатынын дәлелдейді.

Сұрақтар мен есептер

1. Қатардың дербес қосындысы.
2. Жинақты және жинақсыз қатарлар.
3. Қатардың қосындысы.
4. Сандар қатардың қосындысының анықтамасын пайдаланып, қосындысын табыңдар:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)},\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)},\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+3)}.$$

7.2. Сандар қатардың қасиеттері

1-қасиет. Егер $a_1+a_2+...+a_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сандар қатары жинақты және оның қосындысы S -ке тең болса, онда:

$$ca_1+ca_2+...+ca_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}ca_n$$

сандар қатары да жинақты және оның қосындысы $c\cdot S$-ке тең болады, мұндағы

$$c-const\ .$$

Дәлелдеуі. Алдымен $\overline{S_n}=ca_1+ca_2+...+ca_n$ дербес қосындыны қарастырайық: $\overline{S_n}=c\cdot S_n$, мұндағы $S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$. Осыдан:

$$\lim_{n\to\infty}\overline{S_n}=\lim_{n\to\infty}c\cdot S_n=c\lim_{n\to\infty}S_n=cS\ .$$

Демек, жинақты қатарды тұрақты c санына көбейтуге болады және ол қатар да жинақты болады.

2-қасиет. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ мен $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ жинақты қатарларын мүшелеп қосуға және алуға болады, егер $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S,\ \sum_{n=1}^{\infty}b_n=\overline{S}$ болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ қатарлары да жинақты және $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)=S\pm\overline{S}$ теңдігі орындалады.

Дәлелдеуі. S_n қосынды $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ қатарының, ал $\overline{S_n}$ қосынды $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ қатарының алғашқы n мүшелерінің қосындысы болсын, онда қасиеттің шарты бойынша:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S,\ \lim_{n\to\infty}\overline{S_n}=\overline{S},$$

онда $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n \pm \overline{S_n}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} \overline{S_n} = S \pm \overline{S}$ болады.

3-қасиет. Егер қатардың саны санаулы мүшелерін алып тастасақ не қатарға қоссақ, онда қатардың жинақтылығы немесе жинақсыздығы өзгермейді.

Дәлелдеуі. Дәлелдеу үшін екі сандар қатарын қарастырайық:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...,$$
$$a_3 + a_4 + a_5 + ... + a_n + ...,$$

мұндағы екінші қатар бірінші қатардың алғашқы екі мүшесін алып тастағаннан анықталып отыр. Бірінші мен екінші қатарлардың алғашқы n мүшелерінің қосындысын сәйкес S_n, $\overline{S_n}$ деп белгілейік:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n, \ \overline{S_n} = a_3 + a_4 + a_5 + ... + a_n.$$

Сонда

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 ... + a_n = a_1 + a_2 + \overline{S}_{n-2}.$$

Осыдан $\overline{S}_{n-2} = S_n - (a_1 + a_2)$, мұндағы $n \to \infty$-да $(n-2)$ де $+\infty$-ке ұмтылады. Сондықтан бірінші қатар үшін $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ шегі бар болса, онда $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{S}_{n-2}$ шегі де бар. Демек, бірінші қатар жинақты болса, онда екінші қатар да жинақты болады немесе керісінше. Қатарлар жинақты болғанмен де, олардың қосындысы әртүрлі, яғни:

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}_{n-2} = \lim_{n\to\infty} S_n - (a_1 + a_2).$$

Осы сияқты, егер бірінші қатар жинақсыз болса, онда екінші қатар да жинақсыз болады немесе керісінше.

4-қасиет (қатардың жинақтылығының қажетті белгісі). Егер $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары жинақты болса, онда оның жалпы мүшесі нөлге ұмтылады $n \to \infty$-да, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Дәлелдеуі. Қатардың жалпы мүшесін $a_n = S_n - S_{n-1}$ түрінде өрнектеуге болады. Қасиеттің шарты бойынша, қатар жинақты, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, онда

$$\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S.$$

Сондықтан

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0.$$

Осы қасиеттен, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ шарт қатардың жинақты болуы үшін қажетті ғана шарт, жеткілікті шарт емес. Мысалы, гармоникалық қатардың $a_n = \frac{1}{n}$ жалпы мүшесі үшін, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ шарт орындалғанмен де, гармоникалық қатар жинақсыз.

5-қасиет (қатардың жинақсыздығының жеткілікті белгісі). Егер $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатарының жалпы мүшесі нөлге ұмтылмаса, $n \to \infty$-да, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, онда қатар жинақсыз.

Дәлелдеуі. Қарсы жориық, яғни қатар жинақты болсын, онда 4-ші қасиет бойынша $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ болады. Ал бұл қасиеттің $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ шартына қайшы келеді.

Мысалдар. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{2n+1}$ қатарын зерттейік. Ол үшін 5-ші қасиеттің жеткілікті белгісін тексерейік:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2+\frac{1}{n}} = \frac{3}{2} \neq 0 \cdot$$

Демек, қатардың жалпы мүшесі нөлге ұмтылмайды, олай болса, қатар жинақсыз.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ қатарды зерттейік, $\alpha - const$.

Шешуі. Егер $\alpha = 1$ болса, онда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – гармоникалық қатар. Демек, $\alpha = 1$ болғанда берілген қатар жинақсыз.

Егер $\alpha > 1$ және $k \geq 2$ болса, онда:

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n^{\alpha}} \int_{n-1}^{n} dx < 1 + \sum_{n=2}^{k} \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x^{\alpha}} = 1 + \int_{1}^{k} \frac{dx}{x^{\alpha}} =$$

$$= 1 + \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^k < 1 + \frac{1}{\alpha - 1} = \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

Осыдан $\lim\limits_{k\to\infty} S_k < \infty$. Демек, $\alpha > 1$ болса, онда қатар жинақты.

Егер $\alpha < 1$ және $k \geq 2$ болса, онда $\left(n^{\alpha} < n\right)$:

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^{\alpha}} > \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} > ln|1+k| \cdot$$

Осыдан $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = +\infty$. Демек, $\alpha < 1$ болса, онда қатар жинақсыз болады.

6-қасиет (Коши критерийі). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары жинақты болу үшін кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $N(\varepsilon)$ нөмірі табылып, барлық $n \geq N(\varepsilon)$ және бүтін $p \geq 0$ үшін

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| = \left|a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}\right| < \varepsilon \qquad (7.5)$$

теңсіздігі орындалуы қажетті әрі жеткілікті, мұндағы

$$a_n + a_{n+1} + ... + a_{n+p} = = S_{n+p} - S_n,$$

S_{n+p} мен S_n – берілген қатардың дербес қосындылары.

Коши критерийін дәлелдеусіз қабыл алып, осы қасиеттен және практикада жиі қолданылатын төмендегі Коши критерийінің салдарын келтірейік.

Салдар. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатары жинақты болу үшін осы қатардың мүшелерінен анықталған $\{a_n\}$ тізбегі шексіз аз шама болуы қажетті, яғни

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Сонымен, берілген қатарды жинақтылыққа зерттегенде, алдымен ол қатардың жалпы мүшесі нөлге ұмтылатынын тексеру қажет. Егер қатардың жалпы мүшесі нөлге ұмтылмаса, онда ол қатар жинақсыз болады.

Негізінде келтірілген салдар мен 4-ші қасиет әртүрлі тұжырымдалғанмен де екеуі де қатардың жинақтылығының қажетті шарты болып табылады.

Коши критерийін пайдаланып, төмендегі қатарлардың жинақты және жинақсыздығын дәлелдейік.

Мысалдар. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n}$ қатардың жинақты болатынын дәлелдейік.

Кез келген $\varepsilon > 0$ санын тағайындайық, $\left|S_{n+p} - S_n\right| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалатындай және $n > N$ теңсізідігін қанағаттандыратын N нөмірін табайық, p – кез келген натурал сан. Сонда:

$$\left|S_{n+p}-S_n\right| = \left|\frac{cos(n+1)x - cos(n+2)x}{n+1} + \right.$$

$$+\frac{cos(n+2)x - cos(n+3)x}{n+2} + ... +$$

$$\left. + \frac{cos(n+p)x - cos(n+p+1)x}{n+p}\right| = \left|\frac{cos(n+1)x}{n+1} - \right.$$

$$- \frac{cos(n+2)x}{n+1} + \frac{cos(n+2)x}{n+2} - \frac{cos(n+3)x}{n+2} +$$

$$\left. + ... + \frac{cos(n+p)x}{n+p} - \frac{cos(n+p+1)x}{n+p}\right| = \left|\frac{cos(n+1)x}{n+1} - \right.$$

$$- \frac{cos(n+2)x}{(n+1)(n+2)} - \frac{cos(n+3)x}{(n+2)(n+3)} -$$

$$\left. - ... - \frac{cos(n+p)x}{(n+p-1)(n+p)} - \frac{cos(n+p+1)x}{n+p}\right| \le \frac{1}{n+1} +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} +$$

$$+ ... + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} + \frac{1}{n+p} < \frac{2}{n}.$$

Осыдан, егер N нөмірін $\frac{2}{\varepsilon}$-ге тең деп алсақ, онда $\left|S_{n+p} - S_n\right| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалады. Демек, Коши критерийі бойынша қатар жинақты.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ қатары жинақсыз болатынын дәлелдейік.

Коши критериіндегі $\varepsilon = \frac{1}{4}$ болсын, онда кез келген n үшін:

$$\left|S_{2n} - S_n\right| = \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} + \frac{1}{\sqrt{(n+2)(n+3)}} + ... +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}} > \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + ... + \frac{1}{2n+1} > \frac{1}{4}$$

теңсіздігі орындалады. Олай болса, Коши критерийі орындалмайды, демек берілген қатар жинақсыз.

Сұрақтар

1. Санды қатардың қасиеттері.
2. Қатардың жинақтылығының қажетті белгісі.
3. Қатардың жинақсыздығының жеткілікті белгісі.
4. Коши критерийі.

7.3. Оң сандар қатары

Біз осы тақырыпта қатарлардың барлық мүшелері оң болатын қатарларды қарастыратын боламыз, мұндай қатар **оң сандар қатары** деп аталады немесе мүшелері **теріс емес қатар** деп аталады.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ..., \qquad (7.6)$$

мұндағы $a_n \geq 0$. Оң сандар қатарына $S_1 \leq S_2 \leq ... \leq S_n \leq S_{n+1} \leq ...$ теңсіздіктері орындалады.

Шынында да, $S_{i+1} = S_i + a_{i+1}$, мұндағы $a_{i+1} \geq 0$ болғандықтан $S_{i+1} = S_i + \quad + a_{i+1} \geq S_i, i = 1,2,...$ Демек, оң сандар қатарының мүшелерінен анықталған $\{S_n\}$ дербес сандар тізбегі өспелі тізбек болады, онда мына тұжырымдарды аламыз:

1) Егер оң сандар қатарының S_n-дербес қосындысы жоғарыдан шектелсе, онда қатар жинақты;

2) Егер дербес қосынды жоғарыдан шектелмесе, онда қатар жинақсыз.

7.1-теорема. (7.6) оң сандар қатары жинақты болу үшін қатардың $\{S_n\}$ дербес тізбегі шектелген болуы қажетті әрі жеткілікті.

Қажеттілігі. Берілген қатар жинақты болсын, онда 6-қасиет бойынша қатардың $\{S_n\}$ дербес тізбегі шектелген.

Жеткіліктігі. Қатардың $\{S_n\}$ дербес тізбегі жоғарыдан шектелсін, онда [1], 2-тұжырым бойынша, сандар қатардың шегі бар. Дәлелденді.

7.2-теорема (салыстыру белгі). Оң сандар қатарларын қарастырайық:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ..., \qquad (7.6)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + ... + b_n + ..., \qquad (7.7)$$

мұндағы $a_n \geq 0, b_n \geq 0$ болсын. Егер (7.6) мен (7.7) қатарларының барлық мүшелеріне (немесе белгілі бір нөмірден бастап, мысалы, $n \geq N$) $a_n \leq b_n$ теңсіздігі орындалса, онда:

1) (7.7) қатардың жинақтылығынан (7.6) қатардың жинақтылығы шығады;

2) (7.6) қатардың жинақсыздығынан (7.7) қатардың жинақсыздығы шығады.

Демек, егер (7.7) жинақты болса, онда (7.6) жинақты; егер (7.6) жинақсыз болса, онда (7.7) жинақсыз.

Дәлелдеуі. Теореманың шартындағы $a_n \le b_n$ теңсіздігі барлық n үшін орындалсын және (7.6) мен (7.7) қатарларының дербес қосындыларын сәйкес $S_n, \overline{S_n}$ таңбаларымен белгілейік, онда $a_n \le b_n$ теңсіздіктен $S_n \le \overline{S}_n$ теңсіздігін аламыз. Демек, соңғы теңсіздіктен мынадай қорытындыға келеміз: егер $\{\overline{S}_n\}$ тізбегі шектелсе, онда $\{S_n\}$ тізбегі де шектелген; егер $\{S_n\}$ тізбегі шектелмесе, онда $\{\overline{S}_n\}$ тізбегі де шектелмеген болады. Олай болса, 7.1-теоремадан дәлелдеу керек тұжырымды аламыз. Дәлеледенді.

Практикада жиі қолданылатын осы теореманың екі салдарын келтірейік.

1-салдар. (7.6) мен (7.7) оң сандар қатарларының жалпы мүшелеріне мына теңдік орындалсын:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c, \quad 0 \le c \le +\infty,\ b_n \ne 0.$$

Егер: 1) (7.7) қатар жинақты, $c < +\infty$ болса, онда (7.6) қатар да жинақты;

2) (7.6) қатар жинақсыз және $c > 0$ болса, онда (7.7) қатар да жинақсыз болады.

Дәлелдеуі. 1) (7.7) қатар жинақты және $c < +\infty$ болсын. Кез келген $\varepsilon > 0$ санын алайық, онда шектің анықтамасы бойынша, үлкен n саны үшін $\frac{a_n}{b_n} < c + \varepsilon$ теңсіздігі орындалады. Осыдан $a_n < (c+\varepsilon)b_n$. Онда санды қатардың 1-қасиеті бойынша (7.2-тақырып) $\sum_{n=1}^{\infty}(c+\varepsilon)b_n$ қатары да жинақты, себебі $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ қатары жинақты. Сондықтан салыстыру белгі бойынша (7.6) қатар да жинақты.

Теореманың екінші тұжырымын осы сияқты дәлелдеуге болады. Дәлелденді.

Осы салдардан мына тұжырымға келеміз: егер $0 < c < +\infty$ болса, онда (7.6) мен (7.7) қатарлардың екеуі де жинақты немесе жинақсыз.

Ескерту. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{P_k(n)}{P_m(n)}$ қатарын зерттеу үшін бұл қатарды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ қатарымен салыстырған тиімді, мұндағы $P_k(n)$ n-ге тәуелді k дәрежелі, ал $P_m(n)$ n-ге тәуелді m дәрежелі көпмүшеліктер, $\alpha = m - k$.

2-салдар. (7.6) мен (7.7) оң сандар қатарларының жалпы мүшелеріне

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

теңсіздігі орындалсын. Егер: 1) (7.7) қатар жинақты болса, онда (7.6) қатар да жинақты; 2) (7.6) қатар жинақсыз болса, онда (7.7) қатар да жинақсыз болады.

Дәлелдеуі. Барлық n үшін

$$\frac{a_2}{a_1} \le \frac{b_2}{b_1}, \frac{a_3}{a_2} \le \frac{b_3}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{a_{n-1}} \le \frac{b_n}{b_{n-1}}$$

теңсіздіктері орындалсын. Осы теңсіздіктерді бір-біріне мүшелеп көбейтсек:

$$\frac{a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n}{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-1}} \le \frac{b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_{n-1} \cdot b_n}{b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_{n-2} \cdot b_{n-1}}, \quad \frac{a_n}{a_1} \le \frac{b_n}{b_1}.$$

Осыдан

$$a_n \le \frac{b_1}{a_1} b_n.$$

1) Егер (7.7) қатар жинақты болса, онда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_1}{a_1}b_n$ қатары да жинақты болады. Олай болса, салыстыру белгі бойынша, (7.6) қатар да жинақты.

Осы сияқты 2) тұжырымды дәлелдеуге болады. Дәлелденді.

Мысалдар. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2+5^n}$ қатарын зерттейік.

Шешуі. $a_n = \dfrac{1}{2+5^n}$ – берілген қатардың жалпы мүшесі. Қатарды зерттеу үшін қатардың салыстыру белгісін пайдаланған тиімді. Берілген қатарды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$ қатармен салыстырайық, $b_n = \dfrac{1}{5^n}$ және $\dfrac{1}{2+5^n} \le \dfrac{1}{5^n}$ теңсіздігі барлық n үшін орындалады. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$ қатары геометриялық прогрессия және оның еселігі $q=\frac{1}{5}<1$. Сондықтан $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$ қатары жинақты, олай болса, салыстыру белгі бойынша, берілген қатар да жинақты.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin^2 n\alpha}{3^n}$ қатарын зерттейік, мұндағы $a_n=\frac{sin^2 n\alpha}{3^n}$ қатардың жалпы мүшесі. Оның жалпы мүшесіне $0\le\frac{sin^2 n\alpha}{3^n}\le\frac{1}{3^n}$ теңсіздігі орындалады. Сондықтан берілген қатарды жалпы мүшесі $b_n=\frac{1}{3^n}$ болатын $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ қатармен салыстырайық, ал бұл геометриялық прогрессия қатарын құрайтын қатардың еселігі $q=\frac{1}{3}$-ке тең, демек ол жинақты. Онда салыстыру белгі бойынша берілген қатар жинақты болады.

3. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}-1}$ қатарын зерттейік, мұндағы $b_n=\frac{1}{\sqrt{n}-1}$ қатардың жалпы мүшесі.

Шешуі. Қарапайым $\sqrt{n}-1<\sqrt{n}$ теңсіздікті ескеріп, $\frac{1}{\sqrt{n}-1}>\frac{1}{\sqrt{n}}=a_n$ теңсіздігін аламыз. Берілген қатарды $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ қатарымен салыстырайық және бұл қатар жинақсыз, $\alpha=\frac{1}{2}<1$ (7.2-тақырып, мысал). Онда салыстыру белгі бойынша берілген қатар да жинақсыз болады.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+2}{n^2}$ қатарын зерттейік, $a_n=\frac{5n+2}{n^2}$ жалпы мүше.

Шешуі. 1-ші салдарды және ескертуді пайдаланайық. Сонда $\alpha=2-1=1$, сондықтан берілген қатарды $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ гармоникалық қатарымен салыстырайық, мұндағы $b_n=\frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n+2}{n^2}:\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+2n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{2}{n}}{1}=5=c>0\,.$$

Сонымен, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ қатары жинақсыз болғандықтан, салыстыру белгі бойынша берілген қатар да жинақсыз.

Даламбер белгісі. (7.6) оң сандар қатары берілсін.

1) Егер $0<q<1$ және m нөмірі табылып, $n \ge m$ үшін $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q$ теңсіздігі орындалса, онда (7.6) қатар жинақты болады;

2) егер m нөмірі табылып, $n > m$ үшін $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$ теңсіздігі орындалса, онда (7.6) қатар жинақсыз болады.

Дәлелдеуі. 1) $0<q<1$ болсын және $n \ge m$ сандары табылып,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q$$

теңсізігі орындалсын. Осыдан: $a_{n+1} \le qa_n$. Онда

$$a_{m+1} \le a_m q,$$

$$a_{m+2} \le a_{m+1} q \le a_m q^2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{m+p} \le a_{m+p-1} q \le a_{m+p-2} q^2 \le \dots \le a_m q^p$$

Теңсіздіктері орындалады және $a_m q + a_m q^2 + \dots + a_m q^p + \dots$ қатары кемімелі геометриялық прогрессия, еселігі $0<q<1$. Сондықтан бұл қатар жинақты, демек, салыстыру белгі бойынша және санды қатардың 3-ші қасиеті бойынша

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{m+p} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_{m+i}$$

қатары жинақты, онда (7.6) қатар да жинақты болады.

2) m нөмірі табылып, $n > m$ үшін $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$ теңсіздігі орындалсын.

Онда $a_{n+1} \ge a_n$, осыдан:

$$a_{m+1} \ge a_m,$$

$$a_{m+2} \ge a_{m+1} \ge a_m,$$

$$a_{m+3} \ge a_{m+2} \ge a_{m+1} \ge a_m,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{i-3} \ge a_{i-2} \ge a_{i-1} \ge a_i$$

теңсіздіктері орындалады. Мұндағы, $a_m > 0$ болғандықтан, берілген қатардың жоғарыдан шектелген (шенелген) жалпы мүшесі нөлге ұмтылмайды, яғни $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Демек, қатардың жинақтылығының қажетті шарты (7.2-тақырып) орындалмағандықтан (7.6) қатар жинақсыз болады. Дәлелденді.

Енді практикалық сабақта жиі қолданылатын Даламбер белгісінің салдарын қарастырайық.

Салдар. (7.6) оң сандар қатары үшін

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$$

шек бар болсын. 1) Егер $0 < \rho < 1$ болса, онда (7.6) қатар жинақты болады; 2) егер $\rho > 1$ болса, онда (7.6) қатар жинақсыз болады.

Мысалдар. 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}$ қатарын зерттейік.

Шешуі. Мұндағы $a_n = \frac{3^n}{n}$, $a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{n+1}$. Даламбер белгісін пайдаланайық:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{n+1} : \frac{3^n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} n}{3^n (n+1)} =$$

$$= 3 \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 3 > 1.$$

Сонымен, $\rho = 3 > 1$. Сондықтан берілген қатар жинақсыз.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ қатарын зерттейік.

Шешуі. Мұндағы $a_n = \frac{n}{3^n}$, $a_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$. Даламбер белгісі бойынша:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3^{n+1}} : \frac{n}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)3^n}{3^{n+1} n} =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3} < 1.$$

Демек, $\rho = \frac{1}{3} < 1$, сондықтан қатар жинақты.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ қатарын зерттейік.

Шешуі. Мұндағы, $a_n = \frac{3^n n!}{n^n}$, $a_{n+1} = \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$. Даламбер белгісі бойынша:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{3^n n!}{n^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}(n+1)!\,n^n}{3^n n!\,(n+1)^{n+1}} = 3\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} =$$

$$= 3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 3\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1 \cdot$$

Берілген қатар жинақсыз.

Кошидің радикал белгісі. (7.6) оң сандар қатары берілсін.

1) Егер $0 < q < 1$ және m нөмірі табылып, $n \ge m$ үшін $\sqrt[n]{a_n} \le q$ теңсіздігі орындалса, онда (7.6) қатар жинақты болады;

2) егер m нөмірі табылып, $n \ge m$ үшін $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$ теңсіздігі орындалса, онда (7.6) қатар жинақсыз болады.

Дәлелдеуі. 1) $0 < q < 1$ мен m нөмірі табылып, $n \ge m$ үшін $\sqrt[n]{a_n} \le q$ немесе $a_n \le q^n$ теңсіздігі орындалсын делік. Онда $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ $(q < 1)$ қатары жинақты болады (7.2-тақырып), демек салыстыру белгісі бойынша (7.6) қатар жинақты.

2) m нөмірі табылып, $n > m$ үшін $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$ немесе $a_n \ge 1$ теңсіздігі орындалсын. Онда берілген қатарға қатардың жинақтылығының қажетті $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ шарты орындалмайды. Олай болса, (7.6) қатар жинақсыз. Дәлелденді.

Енді Кошидің радикал белгісінің салдарын қарастырайық.

Салдар. (7.6) қатар үшін $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$ шек бар болсын.

1) Егер $\rho < 1$ болса, онда (7.6) санды қатар жинақты болады;

2) Егер $\rho > 1$ болса, онда (7.6) санды қатар жинақсыз болады.

Ескерту. Даламбер мен Кошидің радикал белгілеріндегі $\rho = 1$ болса, онда қатардың жинақты, жинақсыздығы туралы ештеңе айтуға болмайды, яғни қосымша зерттеу қажет. Мысалы, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ қатарлары үшін, Даламбер белгісі бойынша $\rho = 1$

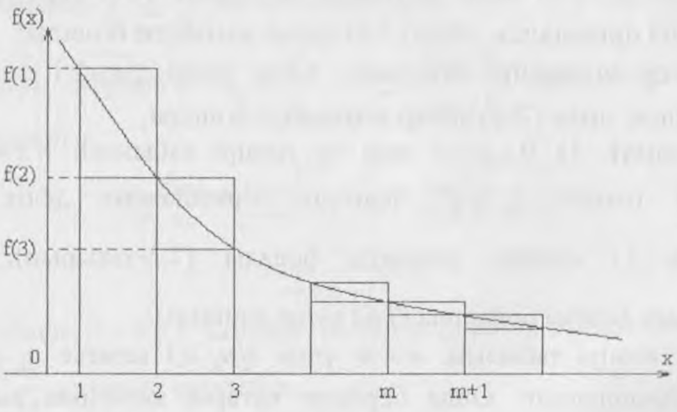
болады, бірақ бірінші қатар жинақсыз, ал екінші қатар жинақты ($\alpha = 2 > 1$, *7.2-тақырып*).

Кошидің интегралдық белгісі. (7.6) оң сандар қатарының мүшелері кемімелі болсын: $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge ... \ge a_n \ge ...$, $[1;+\infty)$ интервалында анықталған $f(x)$ функциясына $f(n) = a_n$ теңдігі орындалсын.

1) Егер $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ бірінші түрдегі меншіксіз интегралы жинақты болса, онда (7.6) қатар да жинақты;

2) егер $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ бірінші түрдегі меншіксіз интегралы жинақсыз болса, онда (7.6) қатар да жинақсыз.

Дәлелдеуі. Дәлелдеу үшін $m \le x \le m+1$ болсын, онда (7.6) қатардың мүшелері кемімелі болғандықтан, $f(x)$ функциясы $f(m) \ge f(x) \ge f(m+1)$



7.1-сурет

$m = 1,2,...$ теңсіздігін қанағаттандырады (*7.1-сурет*). Соңғы теңсіздікті $[m; m+1]$ сегментте интегралдайық:

$$f(m) \ge \int\limits_m^{m+1} f(x)dx \ge f(m+1)$$

Осы теңсіздіктен m бойынша 1-ден n-ге дейін қосынды алайық:

$$\sum_{m=1}^{n} f(m) \ge \sum_{m=1}^{n} \int\limits_m^{m+1} f(x)dx \ge \sum_{m=1}^{n} f(m+1) \text{ және } S_n = \sum_{m=1}^{n} f(m)$$

болсын. Онда

$$S_n \geq \int_1^{n+1} f(x)dx \geq S_{n+1} - a_1 \text{ немесе } S_{n+1} \leq \int_1^{n+1} f(x)dx + a_1.$$

1) Егер $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ жинақты болса, онда $\int_1^{n+1} f(x)dx < \int_1^{+\infty} f(x)dx$ теңсіздігінен

$$S_{n+1} \leq \int_1^{n+1} f(x)dx + a_1 < \int_1^{+\infty} f(x)dx + a_1$$

теңсіздігі орындалады. Демек, (7.6) қатардың S_{n+1} дербес қосындысы жоғарыдан шектелген, кез келген n үшін. Онда *7.3-тақырыптағы* тұжырым бойынша S_{n+1} қосындының шегі бар, яғни (7.6) қатар жинақты.

2) Егер $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ жинақсыз болса, онда n саны өскенде $\int_1^{n+1} f(x)dx$ интегралы да шексіз өседі, яғни $S_n \geq \int_1^{n+1} f(x)dx$ теңсіздігіндегі n саны өскенде S_n қосынды да шексіз өседі. Дәлелденді.

Мысал. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ қатарын зерттейік. Бұл қатардың жинақтылығы мен жинақсыздығына Даламбер мен Кошидің радикал белгілері жауап бере алмайды, себебі:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)^\alpha = \alpha.$$

Ал Кошидің интеграл белгісі арқылы жауап алуға болады, мұндағы $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ (*6.14-тақырып*, мысал). Бұл функция Кошидің интеграл белгісінің барлық шарттарын қанағаттандырады. Онда: $\alpha > 1$ болғанда $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ интегралы жинақты, олай болса, (7.6) қатар да жинақты; $\alpha \leq 1$ болса, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ интегралы жинақсыз, олай болса, (7.6) қатар да жинақсыз.

Бізге (7.6) оң сандар қатары берілсін. (7.6) **қатардың Раабе тізбегі** деп

$$\{r_n\} = \left\{ n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \right\}$$

тізбегін айтамыз.

Раабе[*] белгісі. 1) Егер m нөмірі мен $q > 1$ саны және $n > m$ үшін

$$r_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq q \tag{7.8}$$

теңсіздігі орындалса, онда (7.6) қатар жинақты болады;

2) егер m нөмірі мен $n > m$ үшін $r_n \leq 1$ болса, онда (7.6) қатар жинақсыз болады.

Дәлелдеуі. 1) m нөмірі мен $q > 1$ және $n > m$ үшін

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > q > 1 \text{ немесе } \frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + \frac{q}{n} \tag{7.9}$$

теңсіздігі орындалсын, мұндағы $q > 1$ болғандықтан q мен 1-дің арасынан r саны табылып, $q > r > 1$ теңсіздігі орындалады. Онда $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^s - 1}{\frac{1}{n}} = s$. Демек, $n > m$ үшін $\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^s}{\frac{1}{n}} < q$ немесе $\left(1+\frac{1}{n}\right)^s < 1 + \frac{q}{n}$ теңсіздігі орындалады, онда осыдан және (7.9) теңсіздіктен:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^s = \left(\frac{n+1}{n}\right)^s.$$

Осыдан:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^s = \frac{\frac{1}{(n+1)^s}}{\frac{1}{n^s}}.$$

Соңғы теңсіздіктің оң жағындағы өрнек $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ қатарының екі мүшесінің қатынасы, сондықтан салыстыру белгісінің 2-салдары бойынша (7.6) қатар жинақты болады.

---

[*] Иозеф Людвиг Раабе (1801–1859) – швед математигі.

Екінші тұжырымды жаттығу ретінде оқырманға ұсынамыз. Дәлелденді.

Салдар. Егер мына шек бар болса, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = r$, онда $r > 1$ болғанда (7.6) қатар жинақты, ал $r < 1$ болса, онда (7.6) қатар жинақсыз болады.

Мысал. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n! e^n}{n^{n+p}}$ қатарын зерттейік.

Зерттеу үшін Раабе белгісін пайдаланайық, алдымен $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ өрнекті түрлендірейік:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\dfrac{n! e^n}{n^{n+p}}}{\dfrac{(n+1)! e^{n+1}}{(n+1)^{n+1+p}}} = \frac{n! e^n (n+1)^{n+1+p}}{n^{n+p}(n+1)! e^{n+1}} =$$

$$= \frac{(n+1)^{n+1+p}}{e \cdot n^{n+p}(n+1)} = \frac{(n+1)^{n+p}}{e \cdot n^{n+p}} = \frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+p} =$$

$$= \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+p} = \frac{1}{e} e^{ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+p}} = \frac{1}{e} e^{(n+p)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{(n+p)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}.$$

Соңғы өрнектің дәрежесіндегі $ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ өрнекті Маклорен формуласы бойынша жіктейік:

$$ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2!}\frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Сонда:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = e^{(n+p)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-1} = e^{\frac{2p-1}{2n}+O\left(\frac{1}{n}\right)} = 1 + \frac{2p-1}{2n} + O\left(\frac{1}{n}\right),\ n \to \infty.$$

Енді Раабе тізбегінің жалпы мүшесін құрайық:

$$r_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left(1 + \frac{2p-1}{2n} + O\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) - \frac{2p-1}{2n},\ n \to \infty.$$

Берілген тізбек жинақты болу үшін, $\dfrac{2p-1}{2n} > 1$ теңсіздігі орындалуы қажет. Осыдан, берілген тізбек жинақты болады, егер $p > \dfrac{3}{2}$ болса.

Сұрақтар мен есептер

1. Оң сандар қатарының жинақты болуының қажетті әрі жеткілікті белгісі.

2. Даламбер және Кошидың радикал мен интеграл белгілері.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2+6^n}$, $\sum\limits_{n=5}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}-2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$ қатарын зерттеңдер.

7.4. Қатардың абсолютті және шартты жинақтылығы

Біз өткен тақырыпта, қатардың барлық мүшелерінің таңбасы не оң, не теріс болсын деп қарастырдық. Ал енді осы тақырыпта, қатардың мүшелерінің таңбалары кез келген болып келген қатарларды қарастыратын боламыз және олар **таңбалары айнымалы қатарлар** деп аталады:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{7.10}$$

мысалы, $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+...$ таңбалары айнымалы қатарға мысал бола алады.

Егер (7.10) қатардың мүшелерінің таңбалары кезектесіп ауысып отыратын болса, онда ол **таңбалары ауыспалы** қатар деп аталады, мысалы, қатардың бірінші мүшесінің таңбасы оң болса, онда таңбалары ауыспалы (7.10) қатарды мына түрде жазуға болады:

$$a_1 - a_2 + a_3 + ... + (-1)^{n+1} a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n, \tag{7.11}$$

мұндағы $a_i>0$, осы сияқты, егер қатардың бірінші мүшесі теріс болса, онда

$$-a_1 + a_2 - a_3 + ... + (-1)^n a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n. \tag{7.11'}$$

Анықтама. (7.10) Егер осы қатардың мүшелерінің абсолют шамаларынан анықталған

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + ... + |a_n| + ... = \sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \tag{7.12}$$

қатары жинақты болса, **қатар абсолютті жинақты** деп аталады.

Бұл жағдайда (7.12) қатар оң сандар қатары болады, демек (7.12) қатарға Даламбер салыстыру, Кошидің белгілерін және олардың салдарын пайдалануға болады.

7.13-теорема. Егер (7.12) қатар жинақты болса, онда (7.10) қатарда жинақты болады.

Дәлелдеуі. Теореманың шарты бойынша (7.12) қатар жинақты, яғни Коши критерийі бойынша (*7.2-тақырып*) алдын ала берілген $\varepsilon > 0$ сан үшін N нөмірі табылып, $n > N$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық n және натурал p сандары үшін

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| \leq \varepsilon \tag{7.13}$$

теңсіздігі орындалады. (7.13) теңсіздіктен кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| \leq \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|\right| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалды. Дәлелденді.

Анықтама. (7.10) **қатар шартты жинақты** деп аталады, егер (7.10) қатар жинақты, ал (7.12) қатар жинақсыз болса.

Мысалы,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n^2} + \ldots$$

қатары абсолютті жинақты, себебі $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ -қатары жинақты.

Негізінде таңбалары ауыспалы қатарға жиі қолданылатын Лейбниц теоремасын келтірейік. Лейбниц теоремасының шарттарын қанағаттандыратын қатар **Лейбниц қатары** деп аталады.

Лейбниц белгісі. Егер таңбалары ауыспалы (7.11) қатардың мүшелерінің абсолют шамасы кемімелі болса және оның жалпы мүшесі $n \to +\infty$ да нөлге ұмтылса, яғни:

$$|a_1| \geq |a_2| \geq |a_3| \geq \ldots \geq |a_n| \geq \ldots, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

онда (7.11) қатар жинақты.

Дәлелдеуі. (7.11) қатардың S_{2n} дербес қосындысын қарастырайық:

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} =$$
$$= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n} - a_{2n-1}).$$

Лейбниц белгісінің шарты бойынша жақша ішіндегі өрнектер үшін $(a_{i-1} - \; - a_i) > 0$ теңсіздігі орындалады. Сондықтан $\{S_{2n}\}$ тізбегі кез келген n үшін өспелі және S_{2n}-дербес қосындыны

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} = a_1 -$$
$$- [(a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \ldots + (a_{2n-2} - a_{2n-1}) + a_{2n}]$$

түрінде жазуға болады.

Мұндағы квадрат жақша ішіндегі өрнектер оң, онда кез келген n үшін $S_{2n} \le a_1$ теңсіздігі орындалады. Демек, $\{S_{2n}\}$ тізбегі барлық n үшін өспелі және жоғарыдан шектелген. Онда: $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$.

Лейбниц белгісін толық дәлелдеу үшін $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$ теңдігін дәлелдесек жеткілікті. Ол үшін $S_{2n} = S_{2n} + a_{2n+1}$ және $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$ теңдіктерді еске алсақ жеткілікті. Сонымен, (7.11) қатар жинақты. Дәлелденді.

Бізге берілген қатар (7.11) Лейбниц қатары болсын. Онда жоғарыдағы теореманың дәлелдеуінен дербес қосынды қосындыға өсе отырып жақындаса, ал S_{2n-1} дербес қосынды кеми отырып жақындайды. Демек, $S_{2n} < S < S_{2n-1}$ теңсіздігі орындалады немесе $0 < S < a_1$. Соңғы теңсіздік Лейбниц қатарларының қалдық қатарын бағалағанда өте жиі қолданылады. Егер қалдық қатары

$$r_{2n} = = a_{2n+1} - a_{2n+2} + \dots$$

болса, онда:

$$0 < r_{2n} < a_{2n+1};$$

ал егер

$$r_{2n-1} = -a_{2n} + a_{2n+1} - \dots = -(a_{2n} - a_{2n+1} + \dots)$$

болса, онда:

$$r_{2n-1} < 0,\ |r_{2n-1}| < a_{2m}$$

болады. Сонымен, Лейбниц қатардың қалдық қатарының таңбасы оның бірінші мүшесінің таңбасымен бірдей, ал абсолют шамасы бірінші мүшесінің абсолют шамасынан кіші.

Мысалдар: 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{3n+1}{n(n+1)}$ қатарын зерттейік.

Шешуі. Берілген қатар Лейбниц белгісінің барлық шарттарын қанағаттандырады:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{3n+1}{n(n+1)}\right| = \frac{4}{2} + \frac{7}{6} + \frac{10}{12} + \frac{13}{20} + \dots + \frac{3n+1}{n(n+1)} + \dots,$$

$$\frac{4}{2} > \frac{7}{6} > \frac{10}{12} > \frac{13}{20} > \dots > \frac{3n+1}{n(n+1)},$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n(n+1)} = 0.$$

Сонымен, берілген қатар Лейбниц қатары болады, яғни ол жинақты.

Енді берілген қатардың абсолют шамасынан анықталған $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{n(n+1)}$-қатарға салыстыру белгіні қолданайық:

$$\frac{3n+1}{n(n+1)}=\frac{n+1}{n(n+1)}+\frac{2n}{n(n+1)}>\frac{n+1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}.$$

Сонда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{n(n+1)}$ мен $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ қатарларының жалпы мүшелеріне

$$\frac{3n+1}{n(n+1)}>\frac{1}{n}$$

теңсіздігі орындалады, кез келген, яғни n үшін $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ гармоникалық қатар жинақсыз болғандықтан, салыстыру белгісі бойынша $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{n(n+1)}$ қатары да жинақсыз. Олай болса, берілген қатар шартты жинақты.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$ қатарын зерттейік.

Шешуі. Қатарды зерттеу үшін Даламбер белгісін пайдаланайық:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}\frac{1}{(n+1)!}}{(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Демек, берілген қатар абсолютті жинақты.

Сұрақтар мен есептер

1. Қатардың абсолютті жинақтылығы.
2. Қатардың шартты жинақтылығы.
3. Лейбниц белгісі мен Лейбниц қатары.
4. Қатарларын жинақтылыққа зерттеңіз:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2(n+2)},\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3n+2}{n(n+1)},\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n!},\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+2)!},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3n+1}{n^2(n+1)}.$$

7.5. Абель мен Дирихле белгілері

Көп жағдайда мүшелері екі элементтердің көбейтіндісінен анықталған қосындыны қарастыруға тура келеді:

$$S=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\cdot\beta_i=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+...+\alpha_m\beta_m.$$

Алдымен мына қосындыларды қарастырайық:

$$B_1=\beta_1,\ B_2=\beta_1+\beta_2,...,\ B_m=\beta_1+\beta_2+...+\beta_m.$$

Енді β_i элементтерін B_i элементтері арқылы өрнектейік:

$$\beta_1=B_1,\ \beta_2=B_2-B_1,...,\ \beta_m=B_m-B_{m-1},$$

Онда S қосындыны мына түрге түрлендіруге болады:

$$S=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\cdot\beta_i=\alpha_1B_1+\alpha_2(B_2-B_1)+...+\alpha_m(B_m-B_{m-1}).$$

Соңғы теңдіктегі жақшаларды ашып, B_i элементерін топтастырайық:

$$S=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\cdot\beta_i=(\alpha_1-\alpha_2)B_1+(\alpha_2-\alpha_3)B_2+...+(\alpha_{m-1}-\alpha_{m-2})B_{m-1}+$$

$$+\alpha_mB_m=\alpha_mB_m+\sum_{i=1}^{m-1}(\alpha_i-\alpha_{i-1})B_i. \quad (7.14)$$

(7.14) формула **Абель* түрлендіруі** деп аталады.

7.1-лемма. Егер α_i көбейткіші кемімелі (өспелі), ал B_i қосындысының абсолют шамасы барлық i үшін шектелсе, яғни $|B_i|\le M$, $i=\overline{1\cdot m}$, онда

$$|S|==\left|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\cdot\beta_i\right|\le M(|\alpha_i|+2|\alpha_m|)$$

теңсіздігі орындалады.

Дәлелдеуі: (7.14) Абель түрлендіруіндегі $\alpha_i-\alpha_{i+1}$ айырымдарының таңбалары бірдей, сондықтан

$$|S|=\left|\sum_{i=1}^{m-1}(\alpha_i-\alpha_{i+1})\cdot B_i+\alpha_m\cdot B_m\right|\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{m-1}|\alpha_i-\alpha_{i+1}|\cdot|B_i|+|\alpha_m|\cdot|B_m|\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{m-1}|\alpha_i-\alpha_{i+1}|\cdot M+|\alpha_m|\cdot M=$$

$$=M(|\alpha_1-\alpha_m|+|\alpha_m|)\le M(|\alpha_1|+2|\alpha_m|).$$

---

* Н. Абель (1802–1829) – норвег математигі.

Егер лемманың шартындағы α_i көбейткіш кемімелі әрі оң сан болса, онда

$$|S| = \left|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i\right| \le M\alpha_1$$

теңсіздігі орындалады.

Бізге таңбалары кез келген

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \qquad (7.15)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \ldots + a_n b_n + \ldots \qquad (7.16)$$

қатарлары берілсін, мұндағы a_i мен b_i – нақты сандар.

Абель белгісі. Егер (7.15) қатар жинақты, ал a_m нақты сандары монотонды және барлық n үшін шектелсін, яғни $|a_n| \le M,\ n = 1, 2, \ldots,$ онда (7.16) қатар жинақты болады.

Дәлелдеуі. Дәлелдеу үшін Коши критерийін пайдаланамыз (*7.2-тақырып*). Сондықтан

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k b_k = \sum_{i=1}^{m} a_{n+i} b_{n+i}$$

қосындыны қарастырайық. Егер $\alpha_i = a_{n+i}, \beta_i = b_{n+i}$ болса, онда біз S қосындыны аламыз. Осы қосындыға, жоғарыдағы лемманы пайдаланайық. Абель белгісі бойынша (7.15) қатар жинақты, яғни берілген $\varepsilon > 0$ сан үшін N нөмірі табылып, $n > N$ теңсіздігі мен кез келген p санына

$$|b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots\ldots + b_{n+p}| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалады. Сондықтан леммадағы M ретінде ε санын алуға болады. Сонда $n > N$ мен, $m = 1, 2, \ldots\ldots,$ үшін

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k \cdot b_k\right| \le \varepsilon(|a_{n+1}| + |a_{n+m}|) \le 3M\varepsilon$$

болады, яғни (7.16) қатар жинақты. Дәлелденді.

Дирихле* белгісі. Егер (7.15) қатардың дербес қосындысы барлық n үшін шектелсе,

$$|B_n| = |b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_n| < N\ ,$$

---

* Л. Дирихле (1805–1859) – неміс математигі.

$n = 1, 2, \ldots$, ал $\{a_n\}$ монотонды тізбек және $\lim\limits_{n=\infty} a_n = 0$ болса, онда (7.16) қатар жинақты.

Дәлелдеуі. Дирихле белгісінің шарты бойынша, алдын ала берілген $\varepsilon > 0$ саны үшін N нөмірі табылып, $n > N$ үшін $|a_n| < \varepsilon$ болады және

$$|b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots + b_{n+p}| = |B_{n+p} - B_n| \leq |B_{n+p}| +$$
$$+ |B_n| \leq 2N.$$

Леммадағы $M = 2N$ деп алып, $n > N$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық n және $m = 1, 2, \ldots$, мына теңсіздік орындалады:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k \cdot b_k\right| \leq 2M\,(|a_{n+1}| + |a_{n+m}|) \leq 6N\varepsilon,$$

яғни (7.16) тізбек жинақты. Дәлелденді.

Мысалдар. 1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\cos\frac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n}$ қатарын зерттейік.

Шешуі. Алдымен $\cos\dfrac{\pi n^2}{n+1}$ өрнекті түрлендірейік:

$$\cos\frac{\pi n^2}{n+1} = (-1)^n \cos\left(\frac{\pi n^2}{n+1} - \pi n\right) =$$
$$= (-1)^n \cos\pi\left(\frac{n^2}{n+1} - n\right) = (-1)^{n+1} \cos\frac{\pi}{n+1}.$$

Сонда берілген қатарды зерттеу үшін,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln^2 n} \cdot \cos\frac{\pi}{n+1}$$

қатарын зерттесек жеткілікті. Мұндағы

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln^2 n}$$

қатары Лейбниц белгісінің барлық шарттарын қанағаттандырады:

$$\frac{1}{\ln^2 2} > \frac{1}{\ln^2 3} > \ldots > \frac{1}{\ln^2 n} > \ldots, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln^2 n} = 0.$$

Сондықтан,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln^2 n}$$

қатар жинақты. Ал $\left\{\cos\frac{\pi}{n+1}\right\}$ тізбегі монотонды және барлық $n \ge 2$ үшін шектелген. Олай болса, Абель белгісі бойынша берілген қатар жинақты.

2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\frac{n\pi}{4}}$ қатарын зерттейік.

Шешуі. Қатарды зерттеу үшін екі жағдайды қарастырайық: $p>0$, $p\le 0$. Алдымен $p\le 0$ болсын. Онда берілген қатар мына түрге түрленеді:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{p}\sin\frac{n\pi}{4}}{1+n^{p}\sin\frac{n\pi}{4}},$$

ал бұл қатардың жалпы мүшесі $n \to \infty$-да нөлге ұмтылмайды. Олай болса, $p<0$ болғанда берілген қатар 5-ші қасиет бойынша (*7.2-тақырып*) жинақсыз.

Енді $p>0$ болсын. Қатардың жалпы мүшесін өрнектейік:

$$\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\frac{n\pi}{4}}=\sin\frac{n\pi}{4}\left(n^p+\sin\frac{n\pi}{4}\right)^{-1}=\sin\frac{n\pi}{4}\times$$

$$\times\frac{n^{-p}}{n^{-p}}\left(n^p+\sin\frac{n\pi}{4}\right)^{-1}=\sin\frac{n\pi}{4}\cdot n^{-p}\left(1+\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}\right)^{-1}.$$

Соңғы теңдіктің оң жағындағы $\left(1+\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}\right)^{-1}$ өрнекті Маклорен формуласы бойынша түрлендірейік, сонда:

$$\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\frac{n\pi}{4}}=\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}\left(1-\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}+o\left(\frac{1}{n^p}\right)\right)=$$

$$=\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}-\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}+o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right),\ n\to\infty.$$

Сонымен, $p>0$ болғанда берілген қатарды зерттеу үшін мына қатарлар айырымын зерттесек жеткілікті:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}+o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right),\ n\to\infty$$

Алдымен соңғы қатардың бірінші қатарын зерттейік, мұндағы

$$\left|\sum_{m=1}^{n}\sin\frac{m\pi}{4}\right|<\frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0.$$

Онда $p>0$ болған жағдайда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}$ қатары Дирихле бойынша жинақты.

Енді екінші қатарды зерттейік. Алдымен оның жалпы мүшесін өрнектейік:

$$\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}=\frac{1}{n^{2p}}\cdot\frac{1-\cos\frac{n\pi}{2}}{2}=\frac{1}{2n^{2p}}-\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{2n^{2p}}.$$

Сонда екінші қатар екі қатардың айырымына жіктелінеді:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^{2p}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{2n^{2p}}.$$

Мұндағы, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^{2p}}$ қатар $2p>1$ немесе $p>\frac{1}{2}$ болғанда жинақты ($p>0$), ал екінші қатар үшін Дирихле белгісіндегі $B_n=\cos\frac{n\pi}{2}$ шектелген, $\{a_n\}=\left\{\frac{1}{2n^{2p}}\right\}$ монотонды және $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{2p}}=0$. Сондықтан Дирихле белгісі бойынша, $p>0$ болғанда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{2n^{2p}}$ қатар жинақты. Олай болса, берілген қатар $p>\frac{1}{2}$ болғанда жинақты болады.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\cdot\sin n^2}{n}$ қатарын зерттейік.

Шешуі. Дирихле белгісін пайдаланып зерттейік, сонда:

$$\left|\sum_{m=1}^{n}\sin m\cdot\sin m^2\right|=\frac{1}{2}\left|\sum_{m=1}^{n}[\cos m(m-1)-\cos m(m+1)]\right|=$$

$$=\frac{1}{2}|1-\cos 2+\cos 2-\cos 6+\cos 6-\cos 12+\ldots+$$

$$+\cos(n-1)(n-2)-\cos(n-1)n+\cos n(n-1)-\cos n(n-1)|=$$

$$=\frac{1}{2}|1-\cos n(n+1)|\leq 1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Сонымен, Дирихле белгісі бойынша берілген қатар жинақты.

Сұрақтар мен есептер

1. Абель белгісі.
2. Дирихле белгісі.
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}}$ қатарын зерттеңдер.
4. $\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi n^2}{n+3}}{\ln^2 n}$ қатарын зерттеңдер.

7.6. Функциялық тізбек пен қатардың негізгі ұғымдары

Біз X жиынында анықталған $f_i(x)\,(i=1,2,...)$ функцияларын қарастырайық:

$$f_1(x),\ f_2(x),\ldots,f_n(x),\ldots \qquad x\in X, \qquad (7.17)$$

мұндағы $f_i(x)$ функциялар кез келген $x\in X$ үшін нақты мәндерді қабылдасын.

Анықтама. Егер X жиынындағы x-ке және кез келген n $(n=1,2,...)$ натурал санына белгілі бір ереже немесе заңдылық бойынша $f_n(x)$ функцияны сәйкес қойса, онда бізге X жиынында анықталған (7.17)-функциялық **тізбек берілді** дейміз және ол қысқаша $\{f_n(x)\}$ таңбамен белгіленеді, бұл жағдайда $f_i(x)$ **функциялық тізбектің мүшелері** немесе **элементтері**, ал X жиыны **функциялық тізбектің анықталу облысы** деп аталады. Осылайша, $\{u_n(x)\}$ функциялық тізбегінің мүшелерінен анықталған

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) \qquad (7.18)$$

шексіз қосынды **функциялық қатар** деп аталады, бұл жағдайда да (7.18) функциялық қатардың барлық мүшелері X жиынында анықталған және ол **функциялық қатардың анықталу облысы** деп аталады. Функциялық қатардың алғашқы n мүшелерінің қосындысы:

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{n}u_k(x)=S_n(x)$$

осы қатардың **дербес қосындысы** деп аталады. Бұл жағдайда

$$S_1(x)=u_1(x), \qquad S_2(x)=u_1(x)+u_2(x),\ldots,$$
$$S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x),\ldots$$

Онда

$$u_1(x)=S_1(x),\ u_1(x)=S_1(x)-S_2(x),...,\ u_n(x)=S_n(x)-S_{n+1}(x),...$$

Демек, берілген (7.18) функциялық қатарына әр мүшесі осы функциялық қатардың мүшелерінен анықталған

$$S_1(x), S_2(x),..., S_n(x),... \text{ немесе } \{S_n(x)\} \qquad (7.19)$$

дербес функциялық тізбек сәйкес келеді және керісінше, яғни (7.19) дербес функциялық тізбегіне әр мүшесі (7.19) функциялық тізбектің мүшелерінен анықталған (7.18) функциялық қатар сәйкес келеді әрі бұл сәйкестік бір мәнді анықталады.

Анықтама. (7.17) функциялық тізбек X жиынында **шектелген (шенелген)** деп аталады, егер барлық $n\ (n=1,2,...)$ және кез келген $x\in X$ үшін $M>0$ саны табылып, $|f_n(x)|\le M$ теңсіздігі орындалса.

Егер кез келген $n\ (n=1,2,...)$ және $x\in X$ үшін

$$f_n(x)\le f_{n+1}(x) \quad (f_n(x)\ge f_{n+1}(x))$$

теңсіздігі орындалса, онда (7.17) функциялық тізбек **өспелі (кемімелі)** деп аталады.

Анықтама. (7.17) функциялық тізбек $x_0\in X$ **нүктеде жинақты** деп аталады, егер $\{f_n(x_0)\}$ санды тізбек жинақты болса, ал егер $\{f_n(x_0)\}$ жинақсыз болса, онда (7.17) функциялық тізбекте x_0 **нүкте де жинақсыз** деп аталады.

Егер (7.17) функциялық тізбек X жиынының әрбір нүктелерінде жинақты болса, онда ол X **жиынында жинақты** немесе X **жиынында нүктелі жинақты** деп аталады.

Жоғарыдағы анықтамаларды (7.18) функциялық қатар үшін де беруге болады.

Анықтама. (7.18) функциялық қатар $x_0\in X$ **нүктеде жинақты** деп аталады, егер $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ санды қатары жинақты болса, ал кері жағдайда, яғни $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ қатар жинақсыз болса, онда (7.18) функциялық қатар x_0 **нүктеде жинақсыз** деп аталады.

Егер (7.18) функциялық қатар X жиынының әрбір нүктелерінде жинақты болса, онда функциялық қатар X **жиынында жинақты** немесе X **жиынында нүктелі жинақты** деп аталады.

Жинақты болатын нүктелердің жиыны осы функциялық тізбектің немесе қатардың **жинақты облысы** деп аталады және олардың жинақты облысы олардың анықталу облысымен беттесуі немесе оның бір бөлігі немесе бос жиын болуы мүмкін.

Анықтама. (7.18) функциялық қатар X жиынында **абсолютті жинақты** деп аталады, егер осы жиында $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ қатары жинақты болса. Егер (7.17) функциялық тізбек үшін

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x), \; x \in X \tag{7.20}$$

шегі бар болса, онда функциялық тізбек барлық $x \in X$ үшін $f(x)$ функциясына жинақты және бұл жағдайда $f(x)$ функция (7.17) функциялық тізбектің **шектік функциясы** деп аталады.

Функциялық тізбекке келтірілген шектік функцияның анықтамасын функциялық қатарға да келтіруге болады: егер X жиыны (7.18) функциялық қатардың жинақты облысы болса, онда осы функциялық қатардың (7.19) дербес функциялық тізбегінің шегі, яғни

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x) = S(x), \quad x \in X .$$

(7.18) функциялық қатардың қосындысы болады:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x), \quad x \in X \tag{7.21}$$

әрі ол функциялық қатардың **шектік функциясы** деп аталады.

Осы анықтамалардағы функциялық тізбек пен қатардың сәйкес $f(x)$ пен $S(x)$, шектік функциялары олардың жинақты облыстарында анықталған.

Біз функциялық тізбек пен қатардың тек жинақтылығын ғана зерттеп қоймаймыз, сонымен қатар олардың шектік функцияларының үзіліссіз болатынына немесе үзілісті болатынына ерекше көңіл бөлеміз. Анығырақ айтқанда, егер X жиынында функциялық тізбектің (қатардың) барлық мүшелері үзіліссіз болса, онда осы үзіліссіздік шарттан шектік функцияның да үзіліссіздігі шыға ма? Егер осы сұраққа оң жауап болмаған жағдайда қандай шарт орындалғанда шектік функция үзіліссіз болады? деген сұраққа жауап беруге тура келеді. Бірінші сұраққа оң жауап болмайтынын қарапайым мысалдардан көруге болады, ал екінші сұраққа жауапты алдағы тақырыптарда қарастыратын боламыз.

Сұрақтар

1. Функциялық қатар.
2. Функциялық қатардың анықталу облысы.
3. Функциялық тізбектің шектік функциясы.

7.7. Функциялық тізбек пен қатардың бірқалыпты жинақтылығы

Біз X жиынында анықталған $\{f_n(x)\}$ функциялық тізбекті қарастырайық және барлық $x \in X$ үшін (7.20)-теңдік орындалсын. Онда, функция шегінің анықтамасы бойынша ([1], *2.3-тақырып*): X жиынынан алынып тағайындалған x үшін кез келген $\varepsilon > 0$ санына N нөмірі табылып, $n > N$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық n үшін

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{7.22}$$

теңсіздігі орындалады, мұнда алдын ала тағайындалған X жиынындағы x туралы сөз қозғалып отыр. Ал егер X жиынынан басқа x-ті алсақ, онда басқа $\{f_n(x)\}$ сандар тізбекті аламыз және де (7.22) теңсіздіктегі ε үшін N нөмірі жарамсыз болып қалуы мүмкін, сондықтан N-нен өзге үлкен нөмірді табуға тура келеді. Демек, x жиынында шексіз көп жинақты сандар тізбектердің әрқайсысының өзіне тән N нөмірі бар. Олай болса, алдын ала берілген $\varepsilon > 0$ саны үшін осы шексіз көп сандар тізбектердің бәріне ортақ N нөмірі табыла ма? деген сұрақ туады. Кейбір жағдайларда ондай N нөмірі табылатынын, ал кейде табылмайтынын төмендегі мысалдардан көруге болады.

Мысалдар. 1. $\{f_n(x)\} = \left\{\dfrac{x}{1+n^2x^2}\right\}$, $x \in X = [0,1]$ функциялық тізбекті қарастырайық.

Шешуі. Мұнда

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+n^2x^2} = 0 \text{ және } (1-nx)^2 \geq 0,\ 2nx \leq 1 + n^2x^2,\ \frac{2nx}{1+n^2x^2} \leq 1,$$

$$0 \leq f_n(x) = \frac{1}{2n} \cdot \frac{2nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2n}$$

теңсіздігі орындалады. Демек, тағайындалған x-ке $|f_n(x) - 0| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалу үшін кез келген $x \in X = [0,1]$ үшін $\dfrac{1}{2n} < \varepsilon$ теңсіздікті қанағаттандыратын n натурал саны табылады, яғни $n > \dfrac{1}{2\varepsilon}$. Демек, іздестіріп отырған N саны ретінде $E\left(\dfrac{1}{2\varepsilon}\right) = \left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]$ санын алуға болады, яғни $n > N = E\left(\dfrac{1}{2\varepsilon}\right)$ нөмірі барлық $x \in [0,1]$ үшін ортақ.

2. $\{f_n(x)\}=\left\{\frac{nx}{1+n^2x^2}\right\},\ x\in X=[0,1]$ функциялық тізбекті қарастырайық.

Шешуі. Бұл мысалда (n бойынша Лопиталь ережесі)

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n^2x^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{2nx^2}=0$$

және тағайындалған x үшін

$$f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}=\frac{1}{nx}\cdot\frac{n^2x^2}{1+n^2x^2}\le\frac{1}{nx}\left(1-\frac{1}{1+n^2x^2}\right)<\frac{1}{nx}$$

теңсіздігі орындалады. Демек, тағайындалған x-ке $|f_n(x)-0|<\varepsilon$ теңсіздігі орындалу үшін $\frac{1}{nx}<\varepsilon$ теңсіздігі орындалуы қажет, осыдан $n>\frac{1}{\varepsilon x}$. Онда N нөмірі ретінде $E\left(\frac{1}{\varepsilon x}\right)$ санын алуға болады, яғни $n>N=E\left(\frac{1}{\varepsilon x}\right)$ және бұл N нөмірі x-ке тәуелді. Ал n натурал санын қаншалықты үлкен етіп алғанмен де $f_n(x)$ функция үшін $[0;1]$ сегменттен $x=\frac{1}{n}$ нүкте табылып, $f_n(x)$ функцияның осы нүктедегі мәні $\frac{1}{2}$-ге тең болады, яғни $f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$. Демек, n санын қаншалықты үлкен етіп алғанмен де $f_n(x)<\frac{1}{2}=\varepsilon$ теңсіздігі орындалатындай барлық x-ке ортақ N нөмірі табылмайды, яғни $\varepsilon=\frac{1}{2}>0$ және барлық $x\in[0;1]$ үшін N нөмірі жоқ.

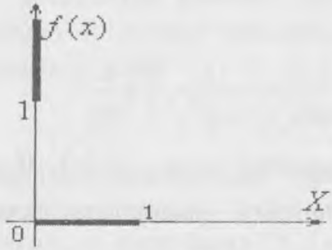
Анықтама. (7.17) функциялық тізбек X жиынында $f(x)$ функцияға **бірқалыпты жинақты** деп аталады, егер кез келген $\varepsilon>0$ санына $N(\varepsilon)$ табылып, $n\ge N(\varepsilon)$ теңсіздігін қанағаттандыратын n және барлық $x\in X$ үшін

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \tag{7.23}$$

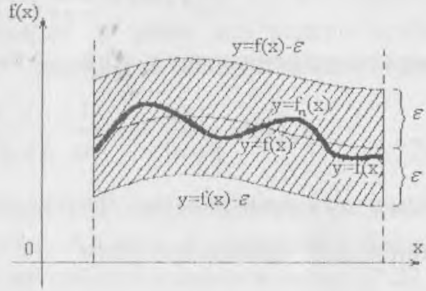
теңсіздігі орындалатын болса.

Бұл анықтамадағы $N(\varepsilon)$ нөмірі тек ε-ге тәуелді, ал x-ке тәуелді емес. Сондықтан кез келген $\varepsilon>0$ саны үшін бәріне ортақ $N(\varepsilon)$ нөмірі табылып, осы нөмірден бастап (7.23) теңсіздік барлық $x\in X$

үшін орындалады. Егер анықталған $\{f_n(x)\}$ функциялық тізбек X жиынында жинақты болса, онда ол осы жиында бірқалыпты жинақты болады деп тұжырымдауға болмайды. Мысалы, $X=[0,1]$ жиынында анықталған $\{f_n(x)\}$ функциялық тізбекті қарастырайық:



7.2-сурет



7.3-сурет

$$f_n(x)=\begin{cases}1-nx, & x\in\left[0,\frac{1}{n}\right]\\ 0, & x\in\left(\frac{1}{n};1\right]\end{cases}.$$

Бұл функциялық тізбек барлық $x\in[0;1]$ үшін жинақты. Шынында да, барлық n үшін $f_n(0)=1$ болады, демек, $x=0$ нүктеде $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0)=1$, яғни егер $x=0$ болса, онда $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)=1$. Енді $(0;1]$ жиынынан кез келген x-ті тағайындайық, онда белгілі бір нөмірден бастап, $f_n(x)$ функцияның бәрі де нөлге тең болады. Демек, барлық $x\in(0,1]$ үшін $\{f_n(x)\}$ функциялық тізбек 0-ге жинақталады, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)=0$, $x\in(0;1]$. Сонымен, $\{f_n(x)\}$ функциялық тізбек $x\in[0,1]$ жиынында $f(x)$ функцияға жинақты:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ 0, & x\in(0;1]\end{cases}$$

және $f(x)$-шектік функция $[0,1]$ жиынының $x=0$ нүктесінде үзілісті (*7.2-сурет*).

Енді $\{f_n(x)\}$ функциялық тізбек $[0,1]$ жиынында бірқалыпты жинақты болмайтынын көрсетейік. Ол үшін $[0,1]$ жиынына тиісті $\{x_n\}=\left\{\frac{1}{2n}\right\}$ санды тізбегін қарастырайық, онда кез келген n және

$x_n = \frac{1}{2n}$ үшін $f_n(x_n) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ және $f(x_n) = 0$ болады. Демек, кез келген n нөмірі үшін $|f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{1}{2}$ болады, яғни $\varepsilon \le \frac{1}{2}$ болғанда барлық $x \in [0,1]$ үшін (7.23) теңсіздік ешқандай да n нөмір үшін орындалмайды. Сондықтан $\{f_n(x)\}$ функциялық тізбек $[0,1]$ жиынында $f(x)$ функцияға жинақты, ал ол осы жиында бірқалыпты жинақты емес.

Енді жоғардағы анықтамаға эквивалентті анықтаманы келтірейік.

Анықтама. (7.17) функциялық тізбек X жиынында $f(x)$ шектік функцияға **бірқалыпты жинақты** деп аталады, егер

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0. \tag{7.24}$$

Бұл екі анықтама эквивалентті, шынында да, егер (7.24) теңдік орындалса, онда кез келген $\varepsilon > 0$ санына $N(\varepsilon)$ нөмірі табылып, $n \ge N(\varepsilon)$ теңсіздігін қанағаттандыратын n үшін

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x) < \varepsilon|$$

теңсіздігі орындалады, онда функцияның жоғарғы шекарасының анықтамасы бойынша:

$$|f_n(x) - f(x)| < \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|, \ x \in X.$$

Онда $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $x \in X$ демек, (7.24) теңдік орындалса, онда (7.23) теңдік те орындалады. Керісінше, егер (7.23)-теңсіздік орындалса, онда (7.24) орындалатынын оңай дәлелдеуге болады. Дәлелдеуін оқырмандарға ұсынамыз.

Бірқалыпты жинақтылықтың геометриялық мағынасын қарастырайық. X жиынындағы $y = f_n(x)$ пен $y = f(x)$ функциялар айырымының ең жоғарғы шекарасы, $n \to +\infty$-да нөлге ұмтылады, яғни $y = f_n(x)$ функциясының графигін $y = f(x) + \varepsilon$ мен $y = f(x) - \varepsilon$ функцияларының графигімен X жиынында ε жазықтықпен қоршайық (*7.3-сурет*): $y = f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon$, $x \in X$. Онда $y = f_n(x)$ функцияларының сызбалары x-ке тәуелсіз белгілі бір үлкен n нөмірден бастап, ε жазықтығында жатады және де $y = f_n(x)$ шекті функцияның графигін қоршап, соған "жақындайды". Сонымен, $\{f_n(x)\}$ функциялық тізбекке X жиынында бірқалыпты жинақтылық орындалғанда, жеткілікті үлкен n нөмір үшін $y = f_n(x)$ функцияның мәні шектік $f(x)$ функцияның мәніне "жақындайды" барлық X жиынында.

Жоғарыда функциялық тізбекке келтірілген анықтамаларды функциялық қатарға келтірейік.

(7.6)-тақырыпта қарастырылған (7.18) функциялық қатарға (7.21) формуладағы теңдік орындалсын.

Анықтама. (7.18) функциялық қатар X жиынында $S(x)$ шектік функцияға **бірқалыпты жинақты** деп аталады, егер осы қатардың $\{S_n(x)\}$ дербес тізбегі X жиында $S(x)$ функцияға бірқалыпты жинақты болса.

Бірқалыпты жинақты (7.18) функциялық қатардың **қалдық қатары** деп аталатын $r_n(x)=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)$ функциялық қатарды қарастырайық. Онда $r_n(x)==S(x)-S_n(x)$, $x\in X$, осыдан $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)=S(x)$ болғандықтан $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$ теңдігі орындалады.

Егер $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$ болса, онда

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)= S(x)$$

теңдігі орындалады. Сондықтан функциялық қатардың бірқалыпты жинақтылығының анықтамасын мына түрде де беруге болады: (7.18) функциялық қатар X жиынында $S(x)$-ке **бірқалыпты жинақты** деп аталады, егер осы қатардың $r_n(x)$ қалдық қатары X жиында нөлге бірқалыпты жинақты болса, яғни

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0.$$

Анықтама. (7.18)-функциялық қатар X жиынында $S(x)$ шектік функцияға **бірқалыпты жинақты** деп аталады, егер кез келген $\varepsilon>0$ санына $N(\varepsilon)$ нөмірі табылып, $n\geq N(\varepsilon)$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық n және барлық $x\in X$ үшін

$$|S_n(x)-S(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)\right|<\varepsilon$$

теңсіздігі орындалса, басқаша айтқанда, егер

$$\sup_{x\in x}|S_n(x)|=\sup_{x\in x}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)\right|\to 0,\quad n\to\infty,$$

онда (7.18) функциялық қатар бірқалыпты жинақты болады.

Сонымен біз функциялық қатар мен тізбектің жинақты және бірқалыпты жинақты болатынын көрдік. Енді алдағы тақырыптарда жинақты болатын функциялық қатар мен тізбек бірқалыпты жинақты болмауы мүмкін, ал бірқалыпты жинақты функциялық қатар мен тізбек жинақты болатынын көреміз.

Жоғарыдағы функциялық тізбек пен қатардың анықтамаларынан төмендегі екі тұжырымды аламыз:

1) Саны санаулы бірқалыпты жинақты тізбектердің (қатарлардың) қосындысы да бірқалыпты жинақты тізбек (қатар) болады.

2) Бірқалыпты жинақты тізбектің (қатардың) барлық мүшелерін шектелген $\varphi(x)$ функциясына көбейткеннен жаңа тізбектің (қатардың) бірқалыпты жинақтылығы өзгермейді.

Екінші тұжырымды дәлелдейік. Тұжырымның шарты бойынша мына теңсіздік орындалады: $|\varphi(x)| < c$, $x \in X$, c-const және $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{c}$, $x \in X$, онда

$$|\varphi(x)f_n(x) - \varphi(x)f(x)| < c\frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$$

теңсіздігі барлық $n \geq N(\varepsilon), x \in X$ үшін орындалады. Демек, $\{\varphi(x)f_n(x)\}$ функциялық тізбек $\varphi(x)f(x)$ функцияға бірқалыпты жинақты барлық $x \in X$ үшін. Осы сияқты бірінші тұжырымды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x) \cdot u_n(x)$$

функциялық қатар үшін дәлелдеуге болады.

Мысал. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ функциялық қатар $[-1,1]$ сегментінде бірқалыпты жинақты болатынын қарастырайық.

Шешуі. Бірқалыпты жинақтылыққа зерттеу үшін анықтаманы пайдаланайық:

$$|S_n(x) - S(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Мұндағы, $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \to 0$, егер $n \to \infty$. Сондықтан функциялық қатар $[-1,1]$ жиынында бірқалыпты жинақты.

Сұрақтар мен есептер

1. Функциялық қатардың бірқалыпты жинақтылығының анықтамасы.

2. Функциялық қатардың шектік функцияға бірқалыпты жинақтылығы.

3. Функциялық тізбектің шектік функцияға бірқалыпты жинақтылығы.

4. Функциялық тізбек пен қатарды сәйкес сегменттерде бірқалыпты жинақтылыққа зерттеңдер:

$$\{f_n(x)\} = \left\{\frac{x}{1+n^4x^3}\right\},\ x \in X = [0,1];\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^4}, [-1,1];\ \{f_n(x)\} = \left\{\frac{nx}{1+n^4x^4}\right\},\ x \in X = [0,1].$$

7.8. Функциялық тізбектің бірқалыпты жинақты болу критерийі

Біз X жиынында анықталған $\{f_n(x)\}$ функциялық тізбекті қарастырайық, мұндағы $x \in X$.

Коши критерийі. $\{f_n(x)\}$ функциялық тізбек X жиынында шектік функцияға бірқалыпты жинақты болу үшін кез келген $\varepsilon > 0$ санына $N(\varepsilon)$ нөмірі табылып, $n \geq N(\varepsilon)$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық n нөмірі, барлық натурал $p \geq 0$ $(p = 0, 1, 2, \ldots)$ және барлық үшін $x \in X$

$$\left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon \tag{7.25}$$

теңсіздігінің орындалуы қажетті әрі жеткілікті.

Қажеттілігі. $\{f_n(x)\}$ функциялық тізбек X жиынында бірқалыпты жинақты болсын деп ұйғарып, (7.25) теңсіздікті дәлелдейік. Онда, функциялық тізбектің бірқалыпты жинақтылығының анықтамасы бойынша, кез келген $\varepsilon > 0$ санына $N(\varepsilon)$ нөмірі табылып, $n \geq N(\varepsilon)$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық $x \in X$ үшін $|f_n(x) - f(x)| = |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ теңсіздігі орындалады. Егер $n \geq N(\varepsilon)$ және $p \geq 0$ болса, онда барлық $x \in X$ үшін мына теңсіздік орындалады:

$$\left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| = \left|f_{n+p}(x) - f(x) + f(x) - f_n(x)\right| \leq \left|f_{n+p}(x) - f(x)\right| +$$

$$+ \left|f(x) - f_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Жеткіліктілігі. (7.25) теңсіздігі орындалсын деп ұйғарып, $\{f_n(x)\}$ функциялық тізбек X жиынында бірқалыпты жинақты болатынын дәлелдейік. Онда, X жиынынан тағайындалған кез келген x үшін

$$\{f_n(x)\}, \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{7.26}$$

тізбегі санды тізбек болады және оған Коши критерийі ([1], *1.8-тақырып*) орындалады. Сондықтан (7.26) санда тізбек жинақты болады. Осы санды тізбектің X жиынындағы шегін $f(x)$ деп белгілейік. Енді тізбек X жиынында $f(x)$ функциясына бірқалыпты жинақты болатынын дәлелдейік. (7.25) теңсіздік орындалатын болғандықтан, кез келген $\varepsilon > 0$ санына $N(\varepsilon)$ нөмірі табылып, $n \geq N(\varepsilon)$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық n нөмірі, барлық натурал $p \geq 0$ $(p = 0, 1, 2, ...)$ және барлық $x \in X$ үшін

$$\left| f_{n+p}(x) - f_n(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{7.27}$$

теңсіздігі орындалады, мұндағы $\lim\limits_{p \to \infty} f_{n+p}(x) = f(x)$ теңдігін ескеріп, (7.27) теңсіздіктен $p \to \infty$-да шекке көшейік. Онда барлық $n \geq N(\varepsilon)$, $x \in X$ үшін

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

болады. Дәлелденді.

7.9. Функциялық қатардың бірқалыпты жинақты болу белгілері

Біз X жиынында анықталған

$$u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \; x \in X \tag{7.28}$$

функциялық қатарды қарастырайық.

Коши критерийі. (7.28) функциялық қатар X жиында шектік функцияға бірқалыпты жинақты болу үшін кез келген $\varepsilon > 0$ санына $N(\varepsilon)$ нөмір табылып, $n \geq N(\varepsilon)$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық $n, p \geq 0$ сандар мен барлық $x \in X$ үшін

$$\left| S_{n+p}(x) - S_n(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon \tag{7.29}$$

теңсіздігінің орындалуы қажетті әрі жеткілікті.

Дәлелдеуін функциялық тізбекке келтірілген Коши критерийін (*7.28-тақырып*) пайдаланып дәлелдеуге болады. Дәлелдемесін жаттығу ретінде оқырман қауымға ұсынамыз.

Функциялық қатарды бірқалыпты жинақтылыққа зерттеу үшін көп жағдайда жеткілікті белгілерді пайдаланған тиімді. Ол үшін оң сандар қатарын қарастырайық:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \; a_n > 0. \tag{7.30}$$

Вейерштрасс белгісі. X жиынында (7.28) функциялық қатардың барлық мүшелеріне

$$|u_n(x)| \le a_n,\ n = 1,2,... \tag{7.31}$$

теңсіздігі орындалсын және (7.30) сандар қатары жинақты болсын, онда (7.28) функциялық қатар X жиында абсолютті және бірқалыпты жинақты болады.

Бұл жағдайда (7.28) функциялық қатар (7.30) сандар қатармен можарантталады немесе (7.30) сандар қатар (7.28) функциялық қатардың **можарантты қатары** деп аталады.

Дәлелдеуі. Теореманың (белгінің) шарты бойынша (7.30) қатар жинақты, онда Коши критерийі бойынша (*7.28-тақырып*), кез келген $\varepsilon > 0$ санына $N(\varepsilon)$ нөмір табылып, $n \ge N(\varepsilon)$ теңсіздігін қанағаттандыратын $n, p \ge 0$ үшін

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon,$$

теңсіздік орындалады. Онда

$$n, p \ge 0,\ x \in X \text{ және } (7.31)$$

теңсіздіктен мына теңсіздікті аламыз:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon.$$

Енді осы тақырыптағы Коши критериін және функциялық қатардың абсолют жинақтылығының анықтамасынан (*7.6-тақырып*) (7.28) функциялық қатар бірқалыпты әрі абсолют жинақты болады. Дәлелденді.

Мысал. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} ln\left(1+\dfrac{x^2}{n\,ln^2 n}\right)$, $|x| < a$ функциялық қатарды Вейерштрасс белгісін пайдаланып зерттейік.

Шешуі. Жалпы мүшесін $|x| < a$ аралықта бағалайық:

$$0 < ln\left(1+\frac{x^2}{n\,ln^2 n}\right) \le ln\frac{x^2}{n\,ln^2 n} \le \frac{x^2}{n\,ln^2 n} < \frac{a^2}{n\,ln^2 n} < \frac{a^2}{n^3}.$$

Сонда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{a^2}{n^3}$ сандар қатар жинақты (*7.3-тақырып*, мысал) әрі ол берілген функциялық қатардың можарантты қатары. Онда Вейерштрасстың белгісі бойынша берілген қатар бірқалыпты әрі абсолютті жинақты.

Егер (7.28) функциялық қатар бірқалыпты жинақты болса, онда ол абсолютті жинақты болмауы мүмкін, мысалы,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{x^2+n}, \ x \in (-\infty,+\infty)$$

функциялық қатарына кез келген тағайындалған $x \in (-\infty,+\infty)$ үшін Лейбниц белгісі орындалады (*7.4-тақырып*):

$$\frac{1}{x^2+1} > \frac{1}{x^2+2} > \ldots > \frac{1}{x^2+n} > \ldots, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^2+n} = 0 \cdot$$

Онда берілген қатар кез келген $x \in (-\infty,+\infty)$ үшін жинақты. Онда кез келген қатардың қалдық қатары өзінің бірінші мүшесі арқылы бағаланады (*7.4-тақырып*):

$$r_n(x) = (-1)^n \frac{1}{x^2+n+1} + \ldots, \quad |r_n(x)| < \frac{1}{x^2+n+1} < \frac{1}{n+1},$$

Осыдан $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$, яғни берілген қатар жиынында бірқалыпты жинақты.

Енді осы қатардың мүшелерінен абсолют шамамен алынған

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n}$$

қатарын зерттейік. Сандар осіндегі x-ке натурал n_x санын $x^2 \le n_x$ теңсіздігі орындалатындай етіп таңдап алайық. Онда, $n \ge n_x$ теңсіздігін қанағаттандыратын n үшін

$$x^2 \le n_x \ \left(x^2 + n \le 2n\right)$$

теңсіздігі орындалады, яғни

$$\frac{1}{2n} \le \frac{1}{x^2+n}$$

теңсіздігі де орындалады, мұндағы $\frac{1}{2n}$ гармоникалық қатардың жалпы мүшесі, ал гармоникалық қатар жинақсыз (*7.1-тақырып*, 2-мысал). Сандар қатардағы салыстыру белгі бойынша (*7.3-тақырып, 7.2-теорема*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n}$ қатары да жинақсыз. Олай болса, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{x^2+n}$ қатары абсолютті жинақты емес. Сонымен, бірқалыпты жинақты (7.28) функциялық қатар абсолютті жинақты болмауы мүмкін.

Егер X жиында (7.28) функциялық қатар бірқалыпты және абсолютті жинақты болса, онда осы жиында $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ қатары бірқалыпты жинақты болмауы мүмкін (осы тұжырымға төмендегі *2-мысалды қара*). Мысалы,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^2}{(x^2+1)^n},\ x\in(-\infty,+\infty)$$

функциялық қатарын қарастырайық:

$$\frac{x^2}{1+x^2}-\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^2}{(x^2+1)^n}.$$

Қатардың қалдық қатарын бағалайық:

$$r_n(x)=\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^{n+p}\frac{x^2}{(x^2+1)^{n+p+1}}=$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+2}}+(-1)^{n+2}\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+3}}+...,$$

$$|r_n(x)|<\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+2}}=\frac{x^2}{1+(n+1)x^2+...}<\frac{1}{n+2}.$$

Онда $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$, яғни қарастырып отырған функциялық қатар бірқалыпты жинақты. Енді осы қатардың абсолют шамасымен алынған қатарын қарастырайық:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)^n}=\frac{x^2}{1+x^2}-\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+...+\frac{x^2}{(1+x^2)^n}+...,\ x\neq 0$$

Бұл қатардың еселігі $q=\dfrac{1}{1+x^2}$-қа тең геометриялық прогрессия және $0<q<1$. Сондықтан абсолют шамамен алынған қатар жинақты (*7.1-тақырып*).

Енді осы абсолют шамамен алынған n мүшесінің қосындысын табайық $(x\neq 0)$:

$$S_n(x)=1+x^2-\frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

Онда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)=1+x^2=S(x)$. Сонда:

$$S(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ 1+x^2, & x\neq 0.\end{cases}$$

Енді абсолют шамамен алынған қатардың қалдық қатарын қарастырайық:

$$(x \neq 0): \quad r_n = \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^{n+1}} + \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^{n+2}} + \ldots = \frac{\dfrac{x^2}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}}{1-\dfrac{1}{1+x^2}} = \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n}.$$

Онда тағайындалған кез келген n үшін $\lim\limits_{x\to 0} r_n = 1$.

Сонымен, абсолют шамамен алынған қатар бірқалыпты жинақты емес.

Әрқайсысы X жиынында анықталған төмендегі функциялық қатар мен тізбекті қарастырайық:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x) = u_1(x)v_1(x) + u_2(x)v_2(x) + \ldots + u_n(x)v_n(x) + \ldots \tag{7.32}$$

$$v_1(x), v_2(x), \ldots, v_n(x), \ldots \tag{7.33}$$

Абель белгісі. Егер 1) (7.28) функциялық қатар X жиында бірқалыпты жинақты болса; 2) (7.33) функциялық тізбек X жиында шектелсін, яғни $|v_n(x)| \leq M$, $x \in X$ және ол осы жиынның әрбір x-сі үшін не кемімелі, не өспелі болсын, онда (7.32) функциялық қатар X жиында бірқалыпты жинақты болады.

Дәлелдеуі. Теореманың шарты бойынша (7.28) функциялық қатар бірқалыпты жинақты, яғни ε > 0 санына N(ε) саны табылып, $n \geq N(\varepsilon)$ теңсіздігін қанағаттандыратын n үшін, барлық $p \geq 0$ $(p = 1,2,\ldots)$ және барлық $x \in X$ үшін мына теңсіздік орындалады:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon.$$

Осыдан және жоғардағы $n \geq N(\varepsilon)$, $p \geq 0$ $(p = 1,2,\ldots)$, $x \in X$ және Абель леммасынан (*7.5-тақырып*, *7.1-лемма*) мына теңсіздікті аламыз:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} v_k(x)u_k(x)\right| \leq \varepsilon\left(|v_{n+1}(x)| + 2|v_{n+p}(x)|\right) < 3\varepsilon M.$$

Соңғы теңсіздік Коши критерийі бойынша (7.32) функциялық қатардың X жиында бірқалыпты жинақты болатынын дәлелдейді.

Дирихле белгісі. Егер 1) (7.33) функциялық тізбек X жиынының әрбір x элементі үшін монотонды және бірқалыпты нөлге ұмтылсын;

2) (7.28) функциялық қатардың $S_n(x)$ дербес қосындыларынан анықталған тізбек X жиында шектелсе, онда (7.32) функциялық қатар осы жиында бірқалыпты жинақты болады.

Дәлелдеуі. Теореманың екінші шарты бойынша $M>0$ саны табылып, барлық $x\in X$, $n=1,2,...$ үшін

$$|S_n(x)|=|u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)|\le M$$

және $x\in X,\ p\ge 0\ \ (p=1,2,..),\ n=2,3,...$үшін

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p}u_k(x)\right|=|S_{n+p}(x)-S_{n-1}(x)|\le|S_{n+p}(x)|+|S_{n-1}(x)|\le 2M$$

теңсіздіктері орындалады. Ал теореманың бірінші шарты бойынша, кез келген тағайындалған $\varepsilon>0$ санына $N(\varepsilon)$ нөмірі табылып, $n\ge N(\varepsilon)$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық n және барлық $x\in X$ үшін

$$0\le|v_k(x)|<\frac{\varepsilon}{6M}$$

теңсіздігі орындалады. Енді Абель леммасын (*7.5-тақырып*) және жоғарыдағы теңсіздіктерді (7.32) функциялық қатарды бағалауға пайдаланайық:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}v_k(x)u_k(x)\right|\le 2M(|v_{n+1}(x)|+2|v_{n+p}(x)|)\le 2M\frac{3\varepsilon}{6M}=\varepsilon\cdot$$

Сонымен, соңғы теңсіздік барлық $n\ge N(\varepsilon)$, $p\ge 0$ және $x\in X$ үшін орындалады. Дәлелденді.

Мысалдар. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x\cdot\sin nx}{\sqrt{n+x}},\ x\in[0,+\infty)$ функциялық қатарды зерттейік.

Шешуі. Ол үшін берілген қатарды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin x\cdot\sin nx$ қатар мен $\left\{\frac{1}{\sqrt{n+x}}\right\}$ тізбектің сәйкес мүшелерінің көбейтіндісі деп қарастырайық. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin x\cdot\sin nx$ функциялық қатарының дербес қосындылары шектелген. Шынында да:

$$|S_n(x)|=\left|\sum_{k=1}^{n}\sin x\cdot\sin kx\right|=\left|\sin x\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|=$$

$$=\left|\sin x\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right|=\left|2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right|=$$

$$=2\left|\cos\frac{x}{2}\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}\right|=2\left|\cos\frac{x}{2}\right|\times\left|\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}\right|\le 2.$$

Алдымен $\left\{\frac{1}{\sqrt{n+x}}\right\}$ функциялық тізбектің монотонды тізбек болатынын дәлелдейік:

$$v_n(x)-v_{n+1}(x)=\frac{1}{\sqrt{n+x}}-\frac{1}{\sqrt{n+1+x}}=$$

$$=\frac{\sqrt{n+1+x}-\sqrt{n+x}}{\sqrt{n+x}\sqrt{n+1+x}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{n+1+x}-\sqrt{n+x}\right)\left(\sqrt{n+1+x}+\sqrt{n+x}\right)}{\sqrt{n+x}\sqrt{n+1+x}\left(\sqrt{n+1+x}+\sqrt{n+x}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(n+x)(n+1+x)}\left(\sqrt{n+1+x}+\sqrt{n+x}\right)}>0.$$

Функциялық тізбектің жалпы мүшесіне мына теңсіздік орындалады:

$$v_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n+x}}<\frac{1}{\sqrt{n}},$$

мұндағы $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$. Сондықтан $\left\{\frac{1}{\sqrt{n+x}}\right\}$ функциялық тізбек бірқалыпты жинақты. Демек, қарастырып отырған функциялық қатар $[0,+\infty)$ жиында Дирихле белгісінің барлық шарттарын қанағаттандырады, олай болса ол бірқалыпты жинақты барлық $x\in[0,+\infty)$ үшін.

2. Егер (7.28) функциялық қатар X жиында абсолютті әрі бірқалыпты жинақты болса, онда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ функциялық қатар осы жиында бірқалыпты жинақты болмауы мүмкін. Осы тұжырымды дәлелдейік.

Шешуі. Ол үшін $u_n(x)=(-1)^n\varphi_n(x)$ болсын, мұндағы $\varphi_n(x)$ теріс емес $\{\varphi_n(x)\}$ функциялық тізбектің мүшелері, ал тізбек x бойынша бірқалыпты жинақты, n бойынша монотонды нөлге ұмтылады және $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$ функциялық қатар жинақты. Онда Дирихле белгісі бойынша (7.28) қатар, яғни $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\varphi_n(x)$ қатар бірқалыпты жинақты және ол абсолютті жинақты, себебі $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$ қатары жинақты. Енді $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$ қатардың жинақтылығынан $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|=$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\varphi_n(x)|$ қатарының бірқалыпты жинақты болуы мүмкін емес. Осы тұжырымға мысал келтірейік: $\{\varphi_n(x)\}=\{(1-x)x^n\}$, $x\in[0;1]$ болсын. Тізбектің нөлге бірқалыпты жинақты болатынын дәлелдейік. Тізбектің жалпы мүшесі үшін

$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\lim_{n\to\infty}(1-x)x^n=0,\ x\in[0;1]$$

және

$$\sup_{x\in[0,1]}|\varphi_n(x)-\varphi(x)|=\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}=\frac{n^n}{(n+1)(n+1)^n}=\frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=\frac{1}{n+1}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}|\varphi_n(x)-\varphi(x)|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=0\cdot\frac{1}{e}=0,$$

$$\varphi_n(x)-\varphi_{n+1}(x)=x^n-x^{n+1}-x^{n+1}+x^{n+2}=$$
$$=x^n(x^2-2x+1)=x^n(x-1)^2>0.$$

Демек, $\{\varphi_n(x)\}$ тізбек нөлге бірқалыпты жинақты және монотонды. Онда Дирихле белгісі бойынша $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ функциялық қатар бірқалыпты жинақты, $x\in[0;1]$. Осы қатардың абсолют шамасымен алынған дербес қосындысын табайық:

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(1-x)x^k=\frac{(1-x)x^nx-1+x}{x-1}=1-x^{n+1}.$$

Осыдан

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1),\\ 0, & x=1.\end{cases}$$

Онда, $\sup\limits_{x\in[0,1]}|S_n(x)-S(x)|=1$, яғни функциялық қатар жинақты, бірақ бірқалыпты жинақты емес.

Сұрақтар мен есептер

1. Вейерштрасс белгісі.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{x^2+2n}$, $x\in(-\infty,+\infty)$ функциялық қатарға кез келген тағайындалған $x\in(-\infty,+\infty)$ үшін Лейбниц белгісі орындала ма?

7.10. Функциялық қатар мен тізбекті мүшелеп шекке көшу және шектік функцияның үзіліссіздігі

Біз өткен тақырыптарда жинақты функциялық қатардың мүшелері үзіліссіз болса да оның қосындысы үзіліссіз немесе үзілісті болатынын көрдік. Енді осы қосындының үзіліссіз болатынын қамтамасыз ететін жеткілікті шарттарын қарастыратын боламыз. Ол үшін сандар осінен кез келген x_0 нүкте алайық және ол X сандар жиынында жатуы да, жатпауы да мүмкін, бірақ осы нүктенің кез келген ε маңайында X жиынның нүктелері жатсын, яғни бұл жағдайда x_0 нүкте X **жиынның шектік нүктесі** деп аталады.

7.4-теорема (функциялық қатарды мүшелеп шекке көшу).

1) (7.28) функциялық қатар X сандар жиынында шекті $S(x)$ функцияға бірқалыпты жинақты болса;

2) функциялық қатардың әр мүшесінің x_0 нүктеде шектік мәні бар болсын:

$$\lim_{x\to x_0} u_k(x) = c_k,\ k = 1,2,...$$

Онда x_0 нүктеде $S(x)$ шектік функцияның мәні бар және мына теңдіктер орындалады:

$$\lim_{x\to x_0} S(x) = \lim_{x\to x_0} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k, \qquad (7.34)$$

яғни функциялық қатарға бірқалыпты жинақтылық орындалғанда lim-шек пен Σ-қосынды таңбаларын орын алмастыруға болады, басқаша айтқанда, функциялық қатардың әр мүшесінен жеке-жеке шекке көшуге болады.

Дәлелдеуі. Алдымен (7.34) теңдіктегі шектік мәннен анықталған $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ санды қатардың жинақты болатынын көрсетейік. Коши критерийі (*7.2-тақырып*) бойынша кез келген $\varepsilon > 0$ санына $N(\varepsilon)$ нөмір табылып, $n \ge N(\varepsilon)$ теңсіздікті қанағаттандыратын $n, p \ge 0$ натурал сандары үшін

$$\left| u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + ... + u_{n+p}(x) \right| < \varepsilon \qquad (7.35)$$

теңсіздік орындалады. Осы теңсіздіктен шекке көшейік, сол $n \ge N(\varepsilon)$, p сандар үшін

$$\left| c_{n+1} + c_{n+2} + ... + c_{n+p} \right| \le \varepsilon < 2\varepsilon .$$

Онда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ санды қатарына Коши критерийі орындалады, яғни $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ жинақты қатар. Енді $S(x)-\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ айырымын x_0 нүктенің маңайында бағалайық. Теореманың шарты бойынша $S(x)$ берілген (7.28) функциялық қатардың шекті функциясы, яғни $S(x)=\sum_{k=1}^{\infty} u_k,\ x \in X$, онда барлық n нөмірге мына теңдік орындалады:

$$S(x)-\sum_{k=1}^{\infty} c_k=\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)-\sum_{k=1}^{\infty} c_k=\sum_{k=1}^{n} u_k(x)-\sum_{k=1}^{n} c_k+$$

$$+\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)-\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k.$$

Осыдан барлық $x \in X$ үшін мына теңсіздікті аламыз:

$$\left|S(x)-\sum_{k=1}^{\infty} c_k\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x)-\sum_{k=1}^{n} c_k+\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right|\right|+\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k\right|. \qquad (7.36)$$

Егер $\varepsilon>0$ санын тағайындасақ, онда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ қатардың жинақтылығы мен (7.28) функциялық қатардың жинақтылығынан тағайындалған $\varepsilon>0$ санына n нөмір табылып, барлық $x \in X$ үшін

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k\right|<\frac{\varepsilon}{3},\quad \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3} \qquad (7.37)$$

теңсіздіктері орындалады. Сонда, саны санаулы қосындылардың шегі осы қосындылардың мүшелерінен алынған шектердің қосындысына тең болғандықтан, жоғарыда тағайындалған $\varepsilon>0$ санына, n нөмірге және $0<|x-x_0|<\delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын X жиынындағы x үшін

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x)-\sum_{k=1}^{n} c_k\right|<\frac{\varepsilon}{3} \qquad (7.38)$$

теңсіздігі орындалатындай $\delta>0$ саны табылады. Олай болса, (7.37), (7.38) теңсіздіктерді пайдаланып, (7.36) теңсіздіктен $0<|x-x_0|<\delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын $x \in X$ үшін

$$\left|S(x)-\sum_{k=1}^{n} c_k\right|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

теңсіздігі орындалады. Сонымен, $S(x)$ функциясының $x=x_0$ нүктеде шектік мәні бар және (7.34) теңдік орындалады. Дәлелденді.

Жоғарыдағы *7.4-теореманы* $\{f_n(x)\}$ функциялық тізбек үшін келтірейік.

7.5-теорема (тізбекті мүшелеп шекке көшу). 1) $\{f_n(x)\}$ функциялық тізбегі X жиында $f(x)$-шектік функцияға бірқалыпты жинақты болса;

2) функциялық тізбектің әрбір мүшесінің x_0 нүктеде шектік мәні бар болса, яғни

$$\lim_{x \to x_0} f_k(x) = c_k, \quad k = 1,2,...,$$

онда x_0 нүктеде $f(x)$-шектік функцияның да шектік мәні бар және мына теңдіктер орындалады:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (\lim_{n \to \infty} f_n(x)) = \lim_{n \to \infty} (\lim f_n(x)).$$

Демек, бұл жағдайда шекке көшкенде $\lim\limits_{x \to x_0}$ мен $\lim\limits_{n \to \infty}$ таңбаларының орнын алмастыруға болады.

Ескерту. Егер *7.4-теоремадағы* x_0 нүкте X жиынның элементі және функциялық қатардың барлық $u_k(x)$ мүшелері осы нүктеде үзіліссіз болса, онда функциялық қатардың $S(x)$ шектік функциясы да $x = x_0$ нүктеде үзіліссіз болады.

Шынында да, егер $x_0 \in X$ болса, онда $c_k = u_k(x_0)$ және (7.34) теңдіктен

$$\lim_{x \to x_0} S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_0) = S(x_0).$$

Бұл теңдік $S(x)$ функцияның $x = x_0$ нүктеде үзіліссіз болатынын айқындайды.

Сонымен, осы тақырыптағы негізгі теореманы $[a; b]$ сегментте мына түрде тұжырымдауға болады:

7.6-теорема (шектік функцияның үзіліссіздігі). Егер функциялық қатардың (функциялық тізбектің) барлық мүшелері $[a; b]$ сегментте үзіліссіз және осы қатар (тізбек) $[a; b]$ сегментте бірқалыпты жинақты болса, онда қатардың (тізбектің) шектік функциясында $[a; b]$ сегментте үзіліссіз болады.

Осы теоремадан соң, функциялық қатарды бірқалыпты жинақтылыққа зерттегенде мына жағдайды еске сақтаған тиімді: егер функциялық қатардың (тізбектің) әрбір мүшесі X жиында үзіліссіз және осы жиында үзілісті функцияға жинақты болса, онда функциялық қатар (тізбек) бірқалыпы жинақты болмайды.

Енді функциялық қатармен тізбектің бір қалыпты жинақты болуының жеткілікті белгісін $[a;b]$ сегмент үшін келтірейік.

Дини[*] белгісі. Барлық мүшелері $[a;b]$ сегментте анықталған үзіліссіз $\{f_n(x)\}$ функциялық тізбектің мүшелері кемімейтін (өспейтін) болса, яғни $f_1(x) \le f_2(x) \le ... \le f_n(x) \le ...$ $(f_1(x) \ge f_2(x) \ge ... \ge$ $\ge f_n(x) \ge ...)$ және ол $[a;b]$ сегментте үзіліссіз $f(x)$ функцияға жинақты болса, онда $\{f_n(x)\}$ тізбегі $[a;b]$ сегментте бірқалыпты жинақты болады.

Дини белгісін функциялық қатар үшін тұжырымдайық: егер барлық мүшелері $[a;b]$ сегментте оң әрі үзіліссіз $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$-функциялық қатардың шектік $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ функциясы осы сегментте үзіліссіз болса, онда қатар осы сегментте бірқалыпты жинақты болады.

Дәлелдеуі: Алдымен барлық $x \in [a;b]$ үшін кез келген $\varepsilon > 0$ санына n нөмірі табылып,

$$0 < r_n(x) = f(x) - f_n(x) < \varepsilon \qquad (7.38')$$

теңсіздігі орындалатынын дәлелдейік. Бұл жағдайда функциялық тізбек кемімейтін болғандықтан, яғни

$$r_1(x) \ge r_2(x) \ge ... \ge r_n(x) \ge ..., \qquad (7.39)$$

(7.38') теңсіздік жеткілікті үлкен n нөмірі үшін орындалады. Онда, функциялық тізбек бірқалыпты жинақты болады. Осы айтылған тұжырымды дәлелдеу үшін кері ұйғарайық, яғни $\varepsilon_0 > 0$ санына (7.38') теңсіздік орындалатын n нөмірі табылмасын. Онда, әрбір n-ге ($n = 1,2,..$) сәйкес $x_n \in [a;b]$ нүкте табылып, мына теңсіздік орындалады:

$$r_n(x_n) \ge \varepsilon_0. \qquad (7.40)$$

Берілген $[a;b]$ сегменттің $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ нүктелерінен Больцано-Вейерштрасс теоремасы ([1], *1.8-тақырып*) бойынша $x_0 \in [a,b]$ нүктеге жинақты $x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}, ...$ тізбекше бөліп аламыз, яғни $\lim\limits_{n_k \to \infty} x_{n_k} = x_0$. Теоремадағы $f(x)$ пен $f_n(x)$ функциялары $[a;b]$ сегментте үзіліссіз, олай болса, $r_n(x) = f(x) - f_n(x)$ функциясы да $[a;b]$ сегментте үзіліссіз. Сондықтан кез келген m үшін

---

* Улисс Дини (1845–1918) – Италия математигі.

$$\lim_{n_k \to \infty} r_m(x_{n_k}) = r_m(x_0)$$

теңдігі орындалады. Бірақ кез келген m мен жеткілікті үлкен k үшін $n_k > m$ теңсіздігі орындалады. Енді (7.39) бен (7.40) теңсіздіктерден:

$$r_m(x_{n_k}) \geq r_{n_k}(x_{n_k}) \geq \varepsilon_0 .$$

Кез келген m үшін соңғы теңсіздіктен $n_k \to \infty$-да шекке көшсек, онда:

$$\lim r_m(x_{n_k}) = r_m(x_0) \geq \varepsilon_0 . \tag{7.41}$$

$x_0 \in [a,b]$ нүктеде $f_m(x)$ функция $f(x)$ функцияға жинақты:

$$\lim_{m \to \infty} r_m(x_0) = 0 . \tag{7.42}$$

Сонымен, (7.41) мен (7.42) формулалардағы шектер бір-біріне қайшы келеді, осы қайшылық теореманы дәлелдейді. Осы сияқты Дини белгісін функциялық қатар үшін де дәлелдеуге болады.

Сұрақтар

1. Функциялық қатарды мүшелеп шекке көшу.
2. Тізбекті мүшелеп шекке көшу.
3. Тізбектің (қатардың) шектік функциясының үзіліссіздігі.
4. Тізбек (қатар) үшін Дини белгісі.

7.11. Функциялық қатар мен тізбекті мүшелеп интегралдау және дифференциалдау

7.7-теорема (тізбекті мүшелеп интегралдау). Егер 1) $\{f_n(x)\}$-функциялық тізбек $[a;\, b]$ сегментте $f(x)$-шектік функцияға бірқалыпты жинақты болса; 2) функциялық тізбектің әрбір мүшесі $[a;\, b]$ сегментте интегралданса, онда функциялық тізбектің $f(x)$ функциясы да осы сегментте интегралданады және функциялық тізбектің әрбір мүшесін немесе мүшелеп осы сегментте интегралдауға болады, яғни мына шек бар:

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx, \quad n = 1,2,\ldots$$

Дәлелдеуі. Кез келген $\varepsilon > 0$ санын тағайындайық. Теореманың шарты бойынша, $\{f_n(x)\}$ функциялық тізбек $f(x)$ функцияға бірқалыпты жинақты, яғни тағайындалған $\varepsilon > 0$ санына $N(\varepsilon)$

нөмірі табылып, $n \geq N(\varepsilon)$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық n және $x \in [a;b]$ үшін мына теңсіздік орындалады:

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \qquad (7.43)$$

Егер $f(x)$ шектік функцияның $[a;\ b]$ сегментте интегралданатынын дәлелдесек, онда белгілі теңсіздіктерден ([1], *6.7-тақырып*) және (7.43) теңсіздіктен барлық $n \geq N(\varepsilon)$ үшін мына теңсіздікті аламыз:

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx-\int_a^b f(x)dx\right|=\left|\int_a^b (f_n(x)-f(x))dx\right|\leq \int_a^b |f_n(x)-f(x)|dx \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\int_a^b dx=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

Сонымен, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx$ шек бар және ол $\int_a^b f(x)dx$ интегралына тең болатындығы дәлелденді. Енді $f(x)$ функцияның $[a;\ b]$ сегментте интегралданатынын дәлелдейік. Ол үшін $[a;\ b]$ сегментті $x_i \in [a;b]$, $i=\overline{0,m}$ нүктелерімен еркімізше m бөлікке бөлейік: $a=x_0<x_1<x_2<\ ...<\ <x_m=b,$ $[x_{k-1};x_k]$, $k=\overline{1,m}$ және $\omega_k(f)$ таңба $f(x)$ функцияның $[x_{k-1};x_k]$ сегменттегі тербелісі, ал $\omega_k(f_n)$ таңба $f_n(x)$ функцияның $[x_{k-1};x_k]$ сегменттегі тербелісі болсын.

Енді кез келген $\varepsilon>0$ санға және $k=\overline{1,m}$ нөмірлерге жеткілікті үлкен n нөмірі табылып,

$$\omega_k(f)\leq\omega_k(f_n)+\frac{\varepsilon}{b-a} \qquad (7.44)$$

теңсіздігі орындалатынын дәлелдейік. Шынында да, кез келген $x',x''\in\in[x_{k-1};x_k]$ нүктелер үшін мына теңсіздік орындалады:

$$|f(x')-f(x'')|=$$
$$=|f(x')-f_n(x')+f_n(x')-f_n(x'')+f_n(x'')-f(x'')|\leq$$
$$\leq|f(x')-f_n(x')|+|f_n(x')-f_n(x'')|+|f_n(x'')-f(x'')|. \qquad (7.45)$$

Теореманың шарты бойынша $\{f_n(x)\}$ функциялық тізбек $[a;\ b]$ сегментте $f(x)$ функцияға бірқалыпты жинақты, яғни кез келген $\varepsilon>0$ санына n нөмірі табылып, барлық $x\in[a;b]$ үшін (7.43) теңсіздігі орындалады. Олай болса, кез келген n үшін

$$|f(x')-f_n(x')|+|f_n(x'')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{b-a},$$

онда осыдан және (7.45) теңсіздіктен мына теңсіздікті аламыз:

$$|f(x')-f(x'')| \le |f_n(x)-f_n(x'')| + \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Онда соңғы теңсіздіктен және x' мен x'' кез келген нүктелер болғандықтан (7.44) теңсіздік дәлелденді.

Жоғарыдағы $[a;b]$ сегментті бөліктеуге сәйкес келетін $f(x)$ функцияның жоғарғы мен төменгі қосындыларын сәйкес S пен s арқылы, ал $f_n(x)$ функцияның қосындыларын S_n, s_n таңбаларымен белгілейік. Жоғарыдағы (7.44) теңсіздікті $[x_{k-1};x_k]$ сегментінің Δx_k ұзындығына көбейтіп және одан k бойынша 1-ден m-ге дейін қосынды алайық:

$$\omega_k(f)\Delta x_k \le \omega_k(f_n)\Delta x_k + \frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_k,$$

$$\sum_{k=1}^{m}\omega_k(f)\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{m}\omega_k(f_n)\Delta x_k + \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{m}\Delta x_k.$$

Осыдан:

$$S-s \le S_n - s_n + \varepsilon. \qquad (7.46)$$

Сонымен, $[a;\ b]$ сегменті еркімізше m бөлікке бөлу нәтижесінде (7.46) теңсіздікті алдық және $f_n(x)$ функция $[a;\ b]$ сегментте интегралданатын болғандықтан $S_n - s_n < \varepsilon$ теңсіздігі орындалатындай осы бөліктеу табылады, онда (7.46) теңсіздіктен $S-s \le 2s$ болады. Ал мұндағы $\varepsilon > 0$ кез келген сан болғандықтан $f(x)$ функция $[a;\ b]$ сегментте интегралданады ([1], *6.4-тақырып*, теорема). Дәлелденді.

7.7-теореманы функциялық қатар үшін орындалатын тұжырымды келтірейік.

7.8-теорема (қатарды мүшелеп интегралдау). Егер 1) (7.28) функциялық қатар $[a;\ b]$ сегментте өзінің $S(x)$-шектік функциясына бірқалыпты жинақты болса;

2) (7.28) функциялық қатардың барлық $u_k(x)$ мүшелері $[a;\ b]$ сегментте интегралданса, онда $S(x)$ функция да $[a;\ b]$ сегментте интегралданады, яғни

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b u_k(x)dx$$

қосынды жинақты және ол $\int_a^b S(x)dx$-ке тең.

7.9-теорема (тізбекті мүшелеп дифференциалдау). Егер 1) $\{f_n(x)\}$ функциялық тізбектің әрбір мүшесінің $[a;\, b]$ сегментте $f'_n(x)(n=1,2,\ldots)$ туындысы бар болса;

2) $\{f'_n(x)\}$ тізбегі $[a;\, b]$ сегментте бірқалыпты жинақты болса;

3) $\{f_n(x)\}$ тізбегі $[a;\, b]$ сегменттің, кем дегенде бір $x_0 \in [a,b]$ нүктесінде жинақты болса, онда $\{f_n(x)\}$ функциялық тізбек $[a;\, b]$ сегментте $f\,(x)$ шектік функцияға бірқалыпты жинақты және оны осы сегменте мүшелеп дифференциалдауға болады, яғни $f\,(x)$ функциясының $f'(x)$ туындысы $\{f'_n(x)\}$ функциялық тізбектің шектік функциясы болады.

Дәлелдеуі: Алдымен $\{f_n(x)\}$ функциялық тізбек $[a,b]$ сегментте бірқалыпты жинақты болатынын дәлелдейік. Теореманың шарты бойынша $\{f_n(x_0)\}$ тізбек жинақты, ал $\{f'_n(x)\}$ тізбек $[a;\, b]$ сегментте бірқалыпты жинақты, онда кез келген $\varepsilon > 0$ санына $N(\varepsilon)$ нөмірі табылып, $n \geq N(\varepsilon)$ теңсіздігін қанағаттандыратын n және натурал p сандары үшін

$$\left|f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \left|f'_{n+p}(x) - f'_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \qquad (7.47)$$

теңсіздік барлық $x \in [a,b], x_0 \in [a,b]$ үшін орындалады.

Енді $[a;\, b]$ сегменттен кез келген x нүкте алайық. $\left|f_{n+p}(t) - f_n(t)\right|$ функциясы $[x_0, x]$ сегментте кез келген тағайындалған n мен p сандары үшін Лагранж теоремасының ([1], *3.7-тақырып*) барлық шарттарын қанағаттандырады, сондықтан x_0 мен x нүктелерінің арасынан c нүкте табылып,

$$\begin{gathered}\left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| - \left[f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)\right] = \\ = \left[f'_{n+p}(c) - f'_n(c)\right] \cdot (x - x_0)\end{gathered}$$

теңдігі орындалады. Осыдан және (7.47) мен $|x - x_0| \leq b - a$ теңсіздіктерінен барлық $x \in [a;b]$, $n \geq N(\varepsilon)$, $p \geq 0$ $(p = 1,2,\ldots)$ үшін

$$\begin{gathered}\left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| \leq \left|f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)\right| + \\ + \left|f'_{n+p}(c) - f'_n(c)\right| \cdot |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) < \varepsilon\end{gathered}$$

теңсіздігі орындалады. Сонымен, Коши критерийі бойынша $\{f_n(x)\}$ функциялық тізбек $[\,a\,;b\,]$ сегментте шектік $f(x)$ функциясына жинақты болады.

Енді $[a;b]$ сегменттің кез келген x_0 нүктесінде $f(x)$ шектік функцияның туындысы бар және ол туынды $\{f_n'(x)\}$ функциялық тізбектің шектік функциясы болатынын дәлелдейік. Ол үшін $[a;b]$ сегменттің кез келген x_0 нүктесін тағайындайық және осы нүктенің δ-маңайы толық $[a;b]$ сегментке тиісті болатындай $\delta>0$ санын алайық. Егер $x=a$ болса, онда x_0 нүктенің δ-маңайы ретінде $[a,a+\delta)$ интервалын, ал егер $x_0=b$ болса $(b-\delta,b]$ интервалын қарастырамыз. Енді x_0 нүкте $[a;b]$ интервалда $0<|\Delta x|<\delta$, $x_0=a$ нүкте $0<\Delta x<b,$ ал $x_0=b$ нүкте $-\delta<\Delta x<0$, теңсіздіктерді қанағаттандыратын Δx шешімдерінің жиынын $\{\Delta x\}$ таңбасымен белгілейік те, Δx-ке тәуелді функциялық тізбек

$$\varphi_n(\Delta x)=\frac{f_n(x_0+\Delta x)-f_n(x_0)}{\Delta x}$$

$\{\Delta x\}$ жиынында бірқалыпты жинақты болатынын дәлелдейік. Теореманың шарты бойынша, $\{f_n'(x)\}$ функциялық тізбек бірқалыпты жинақты болғандықтан, кез келген $\varepsilon>0$ санына $N(\varepsilon)$ нөмірі табылып, $n\geq N(\varepsilon)$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық n, $p\geq 0$ және барлық $x\in[a;b]$ үшін

$$\left|f_{n+p}'(x)-f_n'(x)\right|<\varepsilon \tag{7.48}$$

теңсіздігі орындалады. $\{\Delta x\}$ жиынындағы кез келген Δx-ті және n мен p-ны тағайындайық, онда $[x_0,x_0+\Delta x]$ сегментте $f_{n+p}(t)-f_n(t)$ функция Лагранж теоремасының барлық шарттарын қанағаттандыратын болғандықтан, $(0;1)$ интервалынан θ саны табылады және

$$\varphi_{n+p}(\Delta x)-\varphi_n(\Delta x)=\frac{\left[f_{n+p}(x_0+\Delta x)-f_n(x_0+\Delta x)\right]-\left[f_{n+p}(x_0)-f_n(x_0)\right]}{\Delta x}=f_{n+p}'(x_0+\theta\Delta x)-f_n'(x_0+\theta\Delta x)$$

теңдігі орындалады. Соңғы теңдіктен және (7.48) теңсіздіктен барлық $x\in[a;b]$ және $n\geq N(\varepsilon)$, $p\geq 0$ үшін

$$\left|\varphi_{n+p}(\Delta x)-\varphi_n(\Delta x)\right|<\varepsilon, \qquad \Delta x\in\{\Delta x\}$$

теңсіздігі орындалады. Демек, Коши критерийі бойынша $\{\varphi_n(\Delta x)\}$ тізбегі $\{\Delta x\}$ жиынында бірқалыпты жинақты. Осы дәлелденген жинақтылық $\{\varphi_n(\Delta x)\}$ тізбегіне $\Delta x=0$ нүктеде *7.4-теореманы* қолдануға мүмкіндік береді, яғни $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ функция $\{\varphi_n(\Delta x)\}$ тізбектің $\Delta x\to 0$-дағы шектік функциясы болады және

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\lim_{n\to\infty}\varphi_n(\Delta x)\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{\Delta x\to 0}\varphi_n(\Delta x)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_n(x_0+\Delta x)-f_n(x_0)}{\Delta x}\right]=\lim_{n\to\infty}f_n'(x_0).$$

Сондықтан $f(x)$ функциясының x_0 нүктедегі туындысы бар және ол $\lim\limits_{n\to\infty}f_n'(x_0)$-ге тең. Дәлелденді.

Енді 7.9-теореманың функциялық қатар үшін орындалатын тұжырымын келтірейік.

7.10-теорема (қатарды мүшелеп дифференциалдау). Егер 1) (7.28) функциялық қатардың әрбір $u_k(x)$ мүшесінің $[a;\ b]$ сегменттегі туындысы бар болсын; 2) туынды арқылы анықталған $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k'(x)$ функциялық қатар $[a;\ b]$ сегментте бірқалыпты жинақты болсын; 3) (7.28) қатар $[a;\ b]$ сегменттің кем дегенде, бір x_0 нүктесінде жинақты болсын, онда (7.28) функциялық қатар $[a;\ b]$ сегментте $S(x)$ шектік функцияға бірқалыпты жинақты және оны осы сегментте мүшелеп диференциалдауға болады, яғни функциялық қатардың $[a;\ b]$ сегменттегі $S(x)$ шектік функциясының туындысы туынды арқылы анықталған $\sum\limits_{k=1}^{n}u_k'(x)$ функциялық тізбектің шектік функциясы болады.

Мысалдар. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}arctg\frac{x}{n^2}$ функциялық қатарды мүшелеп дифференциалдауға бола ма?

Шешуі. $u_n(x)=arctg\frac{x}{n^2}$ $(n=1,2,\ldots)$ функция барлық $x\in(-\infty;\infty)$ үшін дифференциалданады, үзіліссіз және $arctg\frac{x}{n^2}\sim\frac{x}{n^2}$, $n\to\infty$-да. Сондықтан барлық кез келген тағайындалған $x\in(-\infty;+\infty)$ үшін $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^2}$ қатар берілген қатардың мажоранты қатары болады және $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x}{n^2}\right|$ қатар жинақты. Олай болса, берілген қатар бірқалыпты жинақты. Енді $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(arctg\frac{x}{n^2}\right)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^4+x^2}$ қатарды қарастырайық:

$$\frac{n^2}{n^4+x^2}<\frac{n^2}{n^4}=\frac{1}{n^2}.$$

Мұндағы, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сандар қатары жинақты, олай болса, Вейерштрасс белгісі бойынша $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\frac{x}{n^2}\right)'$ қатары бірқалыпты жинақты. Онда, *7.10-теорема* бойынша, берілген қатарды мүшелеп дифференциалдауға болады.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n^x}$ функциялық қатардың $x\to+0$ -дағы шегін табайық.

Шешуі. Берілген қатар үшін, *7.4-теореманың* барлық шарттары орындалатынын дәлелдейік. Алдымен қатардың бірқалыпты жинақты болатынын көрсетейік. Қатардың жалпы мүшесіне кез келген $x\in[0;+\infty)$ үшін $\frac{1}{2^n n^x}<\frac{1}{2^n}$ теңсіздігі орындалады. Онда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ -геометриялық прогрессия берілген қатардың мажорантты қатары және Вейерштрасс белгісі бойынша берілген қатар бірқалыпты жинақты. Кез келген $x_0\in[0;+\infty)$ үшін

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{2^n\cdot n^x}=\frac{1}{2^n\cdot n^{x_0}},\ \frac{1}{2^n\cdot n^{x_0}}\le\frac{1}{2^n}.$$

Демек, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n^{x_0}}$ жинақты. Олай болса, 7.4-теорема бойынша берілген қатардан мүшелеп шекке көшуге болады. Енді қатардың шегін табайық:

$$\lim_{x\to+0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to+0}\frac{1}{2^n n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1.$$

Сұрақтар мен есептер

1. Тізбекті (қатарды) мүшелеп интегралдау.
2. Тізбекті (қатарды) мүшелеп дифференциалдау.
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\arccos\frac{x}{n^3}$ функциялық қатарды мүшелеп дифференциалдауға бола ма?
4. $\sum_{n=1}^{\infty}arctg\frac{x}{n^4}$ функциялық қатарды мүшелеп дифференциалдауға бола ма?
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n\cdot n^x}$ функциялық қатардың $x\to+0$ -дағы шегін табыңдар.

7.12. Дәрежелі қатар

Анықтама. Дәрежелі қатар деп мына функциялық қатарды айтамыз:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad (7.49)$$

мұндағы a_i – нақты сандар және олар **дәрежелі қатардың коэффициенттері** деп аталады.

Дәрежелі қатардың жалпы түрі

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

түрінде беріледі. Біз дәрежелі қатарды қарастырғанда дәрежелі қатардың (7.49) түрін қарастыратын боламыз, себебі дәрежелі қатардың жалпы мүшесіне $t = x - x_0$ алмастыруын пайдаланып, дәрежелі қатардың жалпы түрін (7.49) түрге келтіруге болады.

Берілген функцияны (7.49)-дәрежелі қатар түріне келтіруді **функцияны жіктеу** деп атайды және ол арқылы функцияның интегралдық жуық мәнін есептеу, дифференциал теңдеуді шешу үшін қолданылады. Дәрежелі қатардың жинақты облысын табайық және оның жинақты облысы OX осінің сегменті, жарты сегменті, интервалы болады. Кез келген дәрежелі қатар $x = 0$ нүктеде жинақты.

Егер (7.49) дәрежелі қатардың жинақты облысы $x = 0$ нүкте болса және барлық сандар осі болмаса, онда $(-R, R)$ интервалы табылады. Бұл интервалдың ішкі нүктелерінде дәрежелі қатар абсолютті жинақты болады, осы интервал дәрежелі қатардың **жинақтылық облысы,** ал R саны дәрежелі қатардың **жинақтылық радиусы** деп аталады. Осы интервалдың шеткі $x = \pm R$ нүктелерінде дәрежелі қатар жинақты болуы да, болмауы да мүмкін. Сондықтан интервалдың шеткі нүктелерінде дәрежелі қатардың жинақты-жинақсыздығын зерттеу үшін әрбір мысалды жеке-жеке қарастыру қажет. Кейбір дәрежелі қатарлар тек $x = 0$ нүктеде ғана жинақты болады, мысалы $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$, ал $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ дәрежелі қатар барлық сандар осінде жинақты болады. Енді $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ мысалды қарастырсақ, бұл қатар еселігі x-ке тең геометриялық прогрессия, олай болса, ол $|x| < 1$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x үшін жинақты, ал $|x| \geq 1$ теңсіздігін қанағаттандыратын x үшін жинақсыз. Олай болса,

$-1 < x < 1$ интервалы дәрежелі қатардың жинақтылық облысы болады, мұнда $R=1$.

Дәрежелі қатардың жинақтылық облысы $x = 0$ нүкте және барлық сандар осі болмаса, онда оның жинақтылық облысы $(-R, R)$, $(-R, R]$, $(-R, R]$, $[-R, R)$, $[-R, R]$ интервалдардың бірі болады. Егер дәрежелі қатар $x = 0$ нүктеде ғана жинақты болса, онда $R = 0$ болады және керісінше. Егер дәрежелі қатар сандар осінің барлық нүктелерінде жинақты болса, онда $R = +\infty$ және керісінше.

7.11-теорема. Егер (7.49) дәрежелі қатар $x = x_0 \neq 0$ нүктеде жинақты болса, онда $|x| < |x_0|$ теңсіздікті қанағаттандыратын барлық x үшін дәрежелі қатар абсолютті жинақты болады.

Дәлелдеуі. (7.49) дәрежелі қатар $x = x_0$ нүктеде жинақты болғандықтан

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$$

санды қатардың $a_n x_0^n$ жалпы мүшесі $n \to \infty$-да нөлге ұмтылады. (*7.2-тақырып*), онда ол шектелген (шенелген) (*1.1-тақырып*):

$$\left|a_n x_0^n\right| \le M, \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{7.50}$$

Енді $|x| < |x_0|$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x үшін дәрежелі қатарды қарастырайық:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right| = |a_0| + |a_1 x| + \left|a_2 x^2\right| + \ldots + \left|a_n x^n\right| + \ldots, \tag{7.51}$$

мұндағы

$$\left|a_n x^n\right| = \left|a_n x_0^n \cdot \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| \le M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n.$$

Демек, (7.51) қатардың әрбір мүшелері $M + M\left|\frac{x}{x_0}\right| + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots$ қатарының сәйкес мүшелерінен кіші. Соңғы қатардың еселігі $q = \left|\frac{x}{x_0}\right|$-ге тең геометриялық прогрессия $\left(\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1\right)$. Онда салыстыру белгі (*7.2-теорема*) бойынша (7.51) қатар жинақты. Демек, *7.3-теорема* бойынша (7.49) қатарда жинақты, яғни абсолют жинақтылықтың анықтамасы бойынша (*7.4-тақырып*) (7.49) қатар абсолютті жинақты. Дәлелденді.

Енді дәрежелі қатардың жинақтылық радиусын анықтайтын теоремаларды қарастырайық.

7.12-теорема. Егер мына шек бар болса

$$lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho, \quad 0 \le \rho < \infty,$$

онда (7.49) дәрежелі қатардың жинақтылық радиусы $R = \frac{1}{\rho}$ болады. Бұл жағдайда, $R = 0$ болады, егер $\rho = \infty$; $R = \infty$, егер $\rho = 0$ болса.

Дәлелдеуі. Даламбер белгісін қолданайық:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}| \cdot |x|^{n+1}}{|a_n| \cdot |x|^n} = \lim_{n\to\infty} |x| \cdot \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |x| \cdot \rho \cdot$$

Егер $\rho = 0$ болса, онда $|x| \cdot \rho = 0$ болады және барлық x үшін дәрежелі қатар абсолютті жинақты, яғни $R = \infty$. Егер $\rho = \infty$ және $x \ne 0$ болса, онда $|x| \cdot \rho = \infty$ болады және дәрежелі қатар жинақсыз болады. Сонымен, $|x| < \frac{1}{\rho}$ болса, қатар абсолютті жинақты, ал $|x| > \frac{1}{\rho}$ болғанда дәрежелі қатар жинақсыз болады, сондықтан $\frac{1}{\rho} = R$ болады. Дәлелденді.

Осы сияқты, Кошидің радикал белгісін қолданып, дәрежелі қатардың жинақтылық радиусын табу үшін мына теореманы дәлелдеуге болады.

7.14-теорема (Коши-Адамар*). Кез келген дәрежелі қатардың жинақтылық радиусы Коши-Адамар формуласы деп аталатын мына формуладан анықталады:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho, \ R = \frac{1}{\rho}.$$

Сонымен, дәрежелі қатар жинақты интервалдардың ішкі нүктелерінде абсолютті жинақты болады, ал енді қатардың бірқалыпты жинақтылығын қарастырайық.

7.15-теорема. (7.49) дәрежелі қатар өзінің жинақтылық интервалына тиісті кез келген сегментте бірқалыпты жинақты болады.

Дәлелдеуі. Дәрежелі қатардың жинақтылық интервалы $(-R; R)$ және $-R < \alpha \le \ x \le \beta < R$ болсын. Енді $[\alpha; \beta] \subset (-R; R)$ сегментте

---

* Жан Адамар (1865–1903) – француз математигі.

дәрежелі қатар бірқалыпты жинақты болатынын дәлелдейік. Ол үшін $x_0 > max\{|\alpha|,|\beta|\}$, $x_0 \in (-R;R)$ болсын, онда барлық $x \in [\alpha;\beta]$ үшін $|x| < |x_0|$ теңсіздігі орындалады. Сондықтан $|a_n x^n| \le |a_n x_0^n|$ теңсіздігі де орындалады. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ санды қатары жинақты болғандықтан, Вейерштрасс белгісі бойынша (*7.9-тақырып*), $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ және $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ қатарлары $[\alpha;\beta]$ сегментте бірқалыпты жинақты болады. Дәлелденді.

Коши критерийін пайдаланып мына тұжырымды дәлелдеуге болады: егер (7.49) дәрежелі қатар $(-R;R)$ жинақтылық интервалының шеткі $x = R$ нүктесінде жинақты болса, онда дәрежелі қатар $[0;R]$ сегментте бірқалыпты жинақты болады.

Осы сияқты: егер дәрежелі қатар $X = -R$ немесе $X = R$, $X = -R$ нүктеде жинақты болса, онда дәрежелі қатар $[-R;0]$ немесе $[-R;R]$ сегменттерде жинақты болады.

7.16-теорема (дәрежелі қатардың үзіліссіздігі). (7.49) дәрежелі қатардың $S(x)$ қосынды жинақтылық интервалдың ішкі нүктелерінде үзіліссіз болады.

Дәлелдеуі. Дәрежелі қатар үшін x нүкте $(-R;R)$ инақтылық интервалының ішкі нүктесі болсын. Осы нүктені $[\alpha;\beta]$ сегментінің ішкі нүктесі және $[\alpha;\beta] \subset (-R;R)$ енгізуі орындалатындай $[\alpha;\beta]$ сегментті таңдап алуға болады. Онда, $[\alpha;\beta]$ сегментте (7.49) дәрежелі қатар бірқалыпты және оның әрбір мүшелері үзіліссіз. Олай болса, қатар мүшелерінің қосындысында $[\alpha;\beta]$ сегментте үзіліссіз, демек, x нүктеде де үзіліссіз. Дәлелденді.

Осы сияқты, егер дәрежелі қатар $x = -R(x = R)$ нүктеде жинақты болса, онда қатардың қосындысы да $x = -R(x = R)$ нүктеде үзіліссіз болады.

7.17-теорема (дәрежелі қатарды мүшелеп дифференциалдау). (7.49) дәрежелі қатарды өзінің жинақтылық интервалының ішкі нүктелері үшін мүшелеп дифференциалдауға болады, яғни

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \tag{7.52}$$

және (7.52) дәрежелі қатардың жинақтылық интервалы (7.49) дәрежелі қатардың жинақтылық интервалымен бірдей болады.

7.18-теорема (дəрежелі қатарды мүшелеп интегралдау). (7.49) дəрежелі қатары өзінің жинақтылық интервалында мүшелеп интегралдауға болады, яғни

$$\int_0^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (7.53)$$

жəне (7.53) пен (7.49) дəрежелі қатарлардың жинақтылық интервалдары бірдей. Теоремалардың дəлелденуін оқырмандарға ұсынамыз.

Мысалдар. 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^n}{(2n)!}$ дəрежелі қатардың жинақтылық интервалын табайық.

Шешуі. *7.12-теоремадан*:

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!}}{\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{[(n+1)!]^2(2n)!}{[2(n+1)]!(n!)^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)2(n+1)} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{4}.$$

Онда $R = \frac{1}{\rho} = 4$. Сондықтан дəрежелі қатар $|x| < 4$ теңсіздігін қанағаттандыратын x үшін жинақты, яғни $-4 < x < 4$. Енді жинақтылық интервалдың шеткі x=-4, x=4 нүктелерін жинақты, жинақсыз болатынын тексерейік:

$$x=4, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!},\ a_n = \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!},\ a_{n+1} = \frac{[(n+1)!]^2 4^{n+1}}{[2(n+1)]!},$$

$$a_n - a_{n+1} = \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}\left[1 - \frac{(n+1)^2 4}{2(n+1)(2n+1)}\right] = -\frac{1}{2n+1} < 0,\ a_n < a_{n+1}.$$

Демек, x=4 болғанда сандар тізбегі өспелі ($a_n < a_{n+1}$). Олай болса, $n \to \infty$-да оның жалпы мүшесі нөлге ұмтылмайды, яғни сандар тізбегі жинақсыз. Осы сияқты, $x = -4$ нүктеде $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}$ сандар тізбегі жинақсыз. Сонымен, берілген дəрежелі қатардың жинақтылық интервалы (-4;4) болады.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{a^{n^2}}$, $a > 1$ дəрежелі қатардың жинақтылық радиусын табайық.

Шешуі. *7.12-теоремадан:*

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n^2}(n+1)!}{a^{(n+1)^2} n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{a^{2n+1}} = 0, \quad (a>1).$$

Онда $R = \frac{1}{\rho}$, осыдан $R = \infty$. Демек, берілген дәрежелі қатар барлық сандар осінде жинақты болады.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}}$, $a > 0$ дәрежелі қатардың жинақтылық интервалын анықтайық.

Шешуі. Ол үшін Коши-Адамар формуласын пайдаланайық:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^{\frac{1}{\sqrt{n}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{a^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}} = \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1,\ a>0,$$

яғни $|x|<1$ болғанда берілген қатар абсолютті жинақты.

Енді $x=1$ болсын, онда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{\sqrt{n}}}$ санды қатарға Раабе белгісін қолданайық:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\frac{1}{a^{\sqrt{n}}}}{\frac{1}{a^{\sqrt{n+1}}}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a^{\sqrt{n+1}}}{a^{\sqrt{n}}} - 1\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(a^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(e^{\ln a^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n \times$$

$$\times\left(e^{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot\ln a} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{\ln a}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\frac{\ln a}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \ln a \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \ln a \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}}} = \begin{cases} +\infty, \text{ егер } a>1, \\ 0, \quad \text{егер } a=1, \\ -\infty, \text{ егер } 0<a<1. \end{cases}$$

Сонымен, Раабе белгісі бойынша, $x=1$ болғанда дәрежелі қатар абсолютті жинақты, егер $a>1$ болса; ал егер $0<a\le 1$ болса, онда қатар жинақсыз.

Енді $x = -1$ болсын, онда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{a^{\sqrt{n}}}$ сандар қатарын қарастырамыз. Егер $0 < a \le 1$ болса, онда $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^{\sqrt{n}}} \neq 0$. Демек, қатардың жалпы мүшесі нөлге ұмтылмайды (*7.2-тақырып, 5-қасиет*), яғни қатар жинақсыз. Егер $a > 1$ болса, онда жоғарыда есептелгендей $x = 1$ нүктеде абсолютті жинақты болады.

Сұрақтар мен есептер

1. Дәрежелі қатардың жинақтылық радиусы.
2. Дәрежелі қатардың үзіліссіздігі.
3. Дәрежелі қатарды мүшелеп дифференциалдау.
4. Дәрежелі қатарды мүшелеп интегралдау.
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2 x^{n+1}}{(2n+2)!}$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{a^{\sqrt{n+1}}}$, $a > 0$; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n! x^{n+2}}{a^{n^2}}$, $a > 1$ дәрежелі қатарлардың жинақтылық радиусын табыңдар.

7.13. Периодты функциялар

Сандар осінде анықталған $f(x)$ функцияны қарастырайық.

Анықтама. $f(x)$ функциясы **периодты** деп аталады, егер функцияның анықталу облысындағы кез келген x үшін $T \neq 0$ саны табылып, $f(x+T) = f(x)$, теңдігі орындалса. Бұл жағдайда T саны $f(x)$ **функцияның периоды** деп аталады. Мектеп көлемінен біздерге таныс $\sin x$, $\cos x$, tgx және $ctgx$ тригонометриялық функциялар периодты функцияларға мысал болады. Егер T саны функцияның периоды болса, онда $-T, \pm 2T, \pm 3T, \ldots$ сандары да осы функцияның периоды болады. Егер T_1 мен T_2 сандары да $f(x)$ функцияның периоды болса, онда $T_1 \pm T_2$ сандары да $f(x)$ функцияның периоды болады. Демек, егер функцияның периоды бар болса, онда ол тек біреу ғана емес.

Көп жағдайда функцияның периоды ретінде оның ең кіші периодын қарастырамыз және ол функцияның негізгі периоды деп аталады. Жоғарыда айтылғандардан мына тұжырымдарды оңай дәлелдеуге болады:

1) Периоды T-ға тең функциялардың қосындысы, айырымы, көбейтіндісі және бөліндісі де периоды T-ға тең периодты функция болады;

2) егер $f(x)$ функцияның периоды T болса, онда $f(ax)$ функциясының периоды $\frac{T}{a}$ болады. Шынында да,

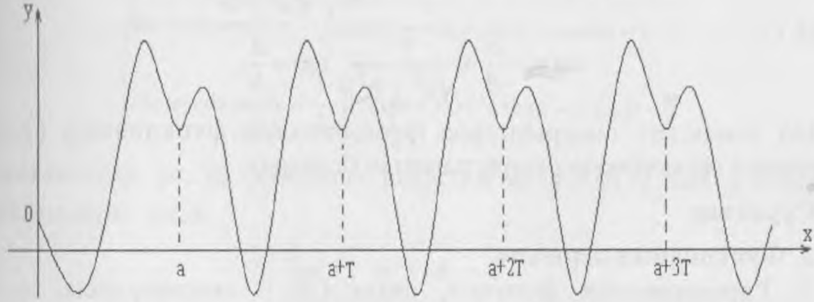
$$f[a\left(x+\frac{T}{a}\right)]=f(ax+T)=f(ax).$$

3) егер $f(x)$ функция ұзындығы T-ға тең кесіндіде интегралданса, онда ол ұзындығы T-ға тең басқа кесінділерде де интегралданады және ол интегралдар өзара тең, яғни кез келген a мен $b(a \neq b)$ нүктелер үшін мына теңдік орындалады (*7.4-сурет*)

$$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_b^{b+T} f(x)dx. \qquad (7.54)$$

Шынында да, (7.54) теңсіздікті дәлелдеу үшін анықталған интегралдың геометриялық мағынасына сүйеніп, оңай дәлелдеуге болады. Онда:

$$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_a^{b} f(x)dx+\int_b^{b+T} f(x)dx+\int_{b+T}^{a+T} f(x)dx.$$



7.4-сурет

Енді $\int_{b+T}^{a+T} f(x)dx$ интегралын өрнектейік, ол үшін $x = t + T$ алмастыруын қолданайық, $dx=dt$, $t=x-T$, $t_{ж}=a$, $t_m=b$:

$$\int_{b+T}^{a+T} f(x)dx=\int_b^a f(t+T)dt=\int_b^a f(t)dt=\int_b^a f(x)dx.$$

Осыдан дәлелдеу керек (7.54) теңдікті аламыз:

$$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_a^{b} f(x)dx+\int_b^{b+T} f(x)dx+\int_b^{a} f(x)dx=\int_b^{b+T} f(x)dx.$$

Практикада жиі қолданатын **қарапайым периодты функция** деп

$$y = A\sin(\omega x + \varphi), \quad x \in (-\infty; \infty) \qquad (7.55)$$

функцияны айтамыз және ол қарапайым гармоника, қысқаша **гармоникалық функция** деп аталады, мұндағы $|A|$ гармоникалық функцияның **амплитудасы,** ω – **жиілігі**, φ – **алғашқы (бастапқы) фазасы** деп аталады.

Гармоникалық функцияның периоды $T = \frac{2\pi}{\omega}$-ға тең:

$$y = A\sin\left[\omega\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \varphi\right] = A\sin(\omega x + \varphi + 2\pi) = A\sin(\omega x + \varphi)\cdot$$

Тригонометриядағы белгілі формулалардан:

$$y = A\sin(\omega x + \varphi) = A(\sin\omega x \cdot \cos\varphi + \cos\omega x \cdot \sin\varphi) = a\cos\omega x + b\sin\omega x,$$

мұндағы $a = A\,sin\,\varphi$, $b = A\,cos\,\varphi$, яғни гармоникалық функцияны мына түрге түрлендіруге болады:

$$y = a\cos\omega x + b\sin\omega x, \quad x \in (-\infty; \infty), \qquad (7.56)$$

мұндағы

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \; sin\,\varphi = \frac{a}{A} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$cos\,\varphi = \frac{b}{A} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \; tg\varphi = \frac{a}{b}.$$

Біз төмендегі тақырыптарда гармоникалық функцияның (7.56) түріндегі гармониканы қарастыратын боламыз.

Сұрақтар

1. Функцияның периоды.

2. Гармоникалық функция, оның $|A|$ – амплитудасы, φ – алғашқы (бастапқы) фазасы, ω – жиілігі.

3. Қарапайым периодты функция.

7.14. Тригонометриялық және Фурье қатарлары

Анықтама. Мына қатар

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin x) \qquad (7.57)$$

тригонометриялық қатар деп аталады, мұндағы a_0, a_n және b_n тригонометриялық қатардың коэффициенттері $(n = 1,2,...)$.

Периоды 2π-ге тең $f(x)$ функцияны (7.57) тригонометриялық қатарға жіктеуге бола ма, анық айтқанда, егер мүмкін болса, a_0, a_n

және $b_n(n=1,2,...)$ коэффициенттерінің қандай мәндерінде (7.57) тригонометриялық қатар жинақты және ол периоды 2π-ге тең берілген $f(x)$ функцияға тең болады:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+...+(a_n\cos nx+b_n\sin x)+...?$$

Бұл сұраққа жауап беру үшін, алдымен $[-\pi;\pi]]$ сегментте анықталған интегралдарды есептейік, кез келген бүтін $n\neq 0$ үшін:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx=\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}=0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx=-\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}=0, \tag{7.58}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx=\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2nx)dx=\pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2nx)dx=\pi, \tag{7.59}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(n+m)x+\cos(n-m)x]dx=0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(n-m)x-\cos(n+m)xdx=0.] \tag{7.60}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(n+m)x+\sin(n-m)x]dx=0.$$

Анықтама. $[a;\ b]$ сегментте анықталған $y=\varphi(x)$ пен $y=\psi(x)$ функциялары үшін

$$\int_a^b\varphi(x)\cdot\psi(x)dx=0$$

теңдік орындалса, онда ол функциялар осы сегментте **ортогональ** деп аталады.

Мысалы, $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x,....,$ функциялары $[-\pi;\pi]$ сегментте қос-қостан ортогональды функциялар болады және *7.13-тақырыптағы* 3-ші тұжырым бойынша, (7.58)–(7.60) формулалар $[a;a+2\pi]$ сегментте де орындалады. Демек, ұзындығы 2π-ге тең кез келген сегменттерде $\cos nx,\ \cos mx, \sin nx, \sin mx,\ \sin nx, \cos mx$ функцияларда қос-қостан ортогональ болады.

Енді периоды 2π-ге тең $f(x)$ функция тригонометриялық қатарға жіктелсін деп ұйғарайық, яғни

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \tag{7.61}$$

теңдік орындалсын және $[-\pi;\pi]$ сегментте (7.61) тригонометриялық қатарды мүшелеп интегралдауға болатын болсын. Онда (7.61) теңдіктің екі жағында $[-\pi;\pi]$ сегментте интегралдауға болады:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(a_n \cos kx + b_k \sin kx)dx$$

Осы теңдікке, *7.8-теореманы* және (7.58) формуланы пайдаланып, a_0-коэффициентті табамыз:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \pi a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx + b_k \int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \pi a_0, \qquad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx. \tag{7.62}$$

Енді (7.61) теңдікті $\cos nx$-ке көбейтіп, $[-\pi;\pi]$ сегментте мүшелеп интегралдайық

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nxdx + b_k \int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos xdx \cdot$$

Соңғы теңдікке, тригонометриялық функциялардың қос-қостан ортогональ болатынын ескеріп, a_n коэффициентті табамыз:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = a_n\pi, \; a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx, \qquad n = 1,2,... \tag{7.63}$$

Осы сияқты, (7.61) теңдікті $\sin nx$-ке көбейтіп, $[-\pi;\pi]$ сегментте мүшелеп интегралдап, b_n коэффициентті табамыз:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx, \qquad n = 1,2,... \tag{7.64}$$

Сонымен, егер $f(x)$ функциясы $[-\pi;\pi]$ сегментте интегралданса, (7.61) теңдік орындалса, (7.61) қатарды мүшелеп интегралдауға және оны $\cos nx$ пен $\sin nx$ функцияларына көбейткен соң қатарларды да $[-\pi;\pi]$ сегментте мүшелеп интегралдауға болса, онда (7.61) тригонометриялық қатардың a_0, a_n, b_n коэффициенттері (7.62) -(7.64) формуладан анықталады.

Бізге $[-\pi;\pi]$ сегментте $f(x)$ функция берілсін. Осы функция үшін (7.62–7.64) формулалардан a_0, a_n, b_n коэффициенттерді тауып, (7.57) тригонометриялық қатарға қояйық. Сонда, осылайша анықталған тригонометриялық қатар $[-\pi;\pi]$ сегментте жинақты бола ма және ол қатар берілген $f(x)$ функцияға тең бола ма? деген сұраққа жауап іздеуге тура келеді. Осы сұрақтарға оң болған жағжайда ғана (7.61) теңдік орындалады, ал бұл сұрақтарға жауап бермей тұрып, <<=>> белгінің орнына <<≈>> белгіні қоямыз, яғни

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Анықтама. (7.57) тригонометриялық қатардың коэффициенттері 7.62-(7.64) формулалардан анықталса, онда a_0, a_n, және b_n коэффициенттері **Фурье коэффициенттері** деп аталады.

Егер (7.57) тригонометриялық қатардың коэффициенттері Фурье коэффициенттері болса, онда (7.57) қатар $f(x)$ функциясының **Фурье қатары** деп аталады.

Енді практикада жиі қолданылатын тұжырымды қарастырайық: периоды 2π-ге тең $f(x)$ функциясына $[-\pi;\pi]$ сегментте (7.61) теңдік орындалсын және ол бірқалыпты жинақты болсын, онда (7.61) формула [–π; π] сегменте $f(x)$ функцияның Фурье қатары болады.

Шынында да, бірқалыпты жинақты (7.57) тригонометриялық қатарға (7.61) теңдік орындалсын. Онда *7.8-теорема* бойынша, $f(x)$ функциясы үзіліссіз және тригонометриялық қатарды мүшелеп интегралдауға болады. Демек, (7.62) теңдік орындалады.

Мына теңдікті қарастырайық:

$$f(x)\cos mx = \frac{a_0}{2}\cos mx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx) \qquad (7.65)$$

және $\varepsilon > 0$, $S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ болсын.

Енді (7.65) формуланың оң жағындағы қатардың бірқалыпты жинақты болатынын дәлелдейік. (7.57) тригонометриялық қатар бірқалыпты жинақты болғандықтан N нөмір табылып, $k \geq N$ теңсіздігін қанағаттандыратын k үшін

$$|f(x) - S_k(x)| \leq \varepsilon$$

теңсіздік орындалады. Осыдан:

$$|f(x)\cos mx - S_k(x)\cos mx| = |f(x) - S_k(x)| \cdot |\cos mx| \leq \varepsilon$$

Соңғы теңсіздік (7.65) қатардың бірқалыпты жинақты болатынын анықтайды. Олай болса, (7.65) қатарды $[-\pi;\pi]$ сегментте мүшелеп интегралдауға болады, яғни бұл жағдайда (7.63) теңдік орындалады. Осылайша, (7.65) теңдікті дәлелдеуге болады. Сонымен, (7.61) қатар $f(x)$ функциясының Фурье қатары болады. Дәлелденді.

Сұрақтар мен есептер

1. Тригонометриялық қатар.
2. Ортогональ функция.
3. Фурье қатары.
4. Периоды 2π-ге тең $f(x)=x$ функцияны $[-\pi;\ \pi]$ аралықта Фурье қатарына жікте.
5. Периоды 2π-ге тең $f(x)=x^2$ функцияны $[-\pi;\ \pi]$ аралықта Фурье қатарына жікте.
6. $f(x)=\pi-2x$ функцияны $[0,\pi]$ аралықта синус бойынша Фурье қатарына жікте.

7.15. Периоды 2π-ге тең функцияны Фурье қатарына жіктеу

Анықтама. $y=f(x)$ функция $[a;b]$ сегментте **тегіс** деп аталады, егер функцияның осы сегменттегі туындысы үзіліссіз болса.

$y=f(x)$ функция $[a;b]$ сегментте **бөлікті-тегіс** деп аталады, егер функцияның өзі және оның туындысы осы сегментте не үзіліссіз не саны санаулы нүктелерде бірінші түрдегі (текті) үзілісті болса.

Дәлелдеусіз Дирихле теоремасын қабыл алайық:

Периоды 2π-ге тең бөлікті-тегіс (не үзіссіз не үзілісті) $f(x)$ функцияның Фурье қатары барлық x үшін жинақты және оның барлық үзіліссіз нүктелеріндегі қосындысы $f(x)$-ке тең, ал үзілісті нүктелердегі қосындысы $\dfrac{f(x_0)+f(x_0-0)}{2}$-ге тең болады.

Енді тақ және жұп функцияларға орындалатын қасиеттерді қарастырайық.

1-қасиет. Егер $f(x)$ функция $[-l;l]$ сегментте интегралданса және ол жұп болса, онда:

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int_{0}^{l} f(x)dx,$$

ал егер ол тақ болса, онда:

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = 0$$

теңдіктері орындалады.

Дәлелдеуі. Теңдіктің сол жағын екі интегралдың қосындысы түрінде жазайық:

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{-l}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{l} f(x)dx$$

теңдіктің оң жағындағы бірінші интегралға $x=-t$ алмастыруын пайдаланайық:

$$dx=-dt,\ t_{ж}=0,\ t_T=l,$$

онда:

$$\int_{-l}^{0} f(x)dx=-\int_{l}^{0} f(-t)dt=\int_{0}^{l} f(-t)dt.$$

Сонда

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx=2\int_{0}^{l} f(x)dx.$$

Осыдан, егер жұп болса, онда қасиеттің бірінші тұжырымы, ал егер тақ болса, онда екінші тұжырымы орындалады. Дәлелденді.

2-қасиет. Екі тақ немесе екі жұп функциялардың көбейтіндісі жұп функция болады. Шынында да, $\varphi(x)$ пен $\psi(x)$ функциялары жұп болсын, онда $F(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x)$ функциясы үшін мына теңдік орындалады:

$$F(-x)=\varphi(-x)\cdot\psi(-x)=\varphi(x)\cdot\psi(x)=F(x).$$

Егер $\varphi(x)$ пен $\psi(x)$ функциялары тақ болса, онда:

$$F(-x)=\varphi(-x)\cdot\psi(-x)=-\varphi(x)\cdot(-\psi(x))=\varphi(x)\cdot\psi(x)=F(x).$$

3-қасиет. Тақ және жұп функциялардың көбейтіндісі тақ функция. Шынында да, $\varphi(x)$-жұп, ал $\psi(x)$-тақ болсын, онда:

$$F(-x)=\varphi(x)\cdot\psi(x)=-\varphi(x)\cdot\psi(x)=-F(x).$$

Енді $[-\pi;\ \pi]$ сегментте берілген $f(x)$-жұп функцияны Фурье қатарына жіктейік. Ол үшін жоғарыдағы қасиеттерді ескерсек, яғни $\cos nx$ – жұп функция, ал $f(x)\cdot\cos nx$ жұп функция болады, ал $\sin nx$ – тақ функция, онда (7.62)–(7.64) формуладан және 1-қасиеттен Фурье қатарының коэффициенттерін жұп $f(x)$ функция үшін анықтаймыз:

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx, \tag{7.66}$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nxdx=0,\qquad n=1,2,\ldots$$

Сонымен, $[-\pi;\pi]$ сегменттері жұп $f(x)$ функция үшін Фурье қатары тек косинус арқылы жіктелінеді:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx, \qquad (7.67)$$

мұндағы a_0 мен a_n коэффициенттері (7.66) фомуладан анықталады. Енді $[-\pi;\pi]$ сегментте $f(x)$ функциясы тақ болсын, онда:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=0,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=0, \qquad (7.68)$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx.$$

Демек, $f(x)$ функциясы тақ болса, онда Фурье қатары тек синус арқылы жіктелінеді:

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx, \qquad (7.69)$$

мұндағы b_n коэффициенті (7.68) формуладан анықталады.

Егер $f(x)$ функция $[a;b]$ сегментте бөлікті үзіліссіз болса, онда сегментті саны санаулы $[a_0;a_1],[a_1;a_2],...$ сегменттерге бөлуге болады және $f(x)$ функция $[a_k;a_{k+1}]$ сегменттің барлық ішкі нүктелерінде үзіліссіз, әрі мына шектер бар ($a_0=a,\ b=a_n$) болсын:

$$f(a_k+0)=\lim_{\substack{x\to a_k\\ x>a_k}}f(x),\quad f(a_k-0)=\lim_{\substack{x\to a_k\\ x<a_k}}f(x).$$

Егер функция ұзындығы функцияның периодына тең сегментте бөлікті үзіліссіз болса, онда периодты функция **бөлікті үзіліссіз** деп аталады. Енді $f_k(x)$ функция ретінде мына функцияны қарастырайық:

$$f_k(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(a_k;a_{k+1}),\\ f(a_k+0), & x=a_k,\\ f(a_k-0), & x=a_{k+1}.\end{cases}$$

Онда барлық $f_k(x)$ функциялар сәйкес $[a_k;a_{k+1}]$ сегментте үзіліссіз болады, яғни $[a;b]$ сегментте бөлікті үзіліссіз $f(x)$ функция осы сегментте интегралданады және мына теңдік орындалады:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f_k(x)dx.$$

7.16. Периоды $2l$-ге тең функцияны Фурье қатарына жіктеу

Енді периоды $2l$-ге тең $f(x)$ функцияны Фурье қатарына жіктейік. Ол үшін $x = \frac{lt}{\pi}$ болсын, онда $\varphi(x) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$ функцияның периоды 2π-ге тең. Бұл жағдайда $\varphi(x)$ функцияның Фурье қатарының коэффициенттерін (7.62)-(7.64) формулаларды пайдаланып табамыз:

$$\varphi(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

мұндағы

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)dt,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos ntdt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right)\cos ntdt,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin ntdt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right)\sin ntdt, \quad n = 1,2,...$$

Енді t айнымалыдан x айнымалыға көшіп іздестіріп отырған Фурье қатарын құрамыз, $t = \frac{lx}{\pi}$, $dt = \frac{l}{\pi}dx$:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{7.70}$$

мұндағы

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \tag{7.71}$$

Егер $f(x)$ жұп болса, онда Фурье қатары косинус бойынша жіктелінеді $(b_n = 0)$:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}, \tag{7.72}$$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n=1,2,...$$

ал егер $f(x)$ тақ болса, онда Фурье қатары синус бойынша жіктелінеді $(a_0 = 0; a_n = 0)$:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{7.73}$$

мұндағы

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n=1,2,...$$

Мысалдар. **1.** $f(x) = x^2$ функцияның [–0; 2π] сегменттері Фурье қатарының коэффициенттерін есептейік. Ол үшін (7.62–7.64) формулаларды пайдаланайық

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{8\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2 \sin nx}{n} - \frac{2\sin nx}{n^3} + \frac{2x\cos nx}{n^2}\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{n^2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x^2 \cos nx}{n} + \frac{2\cos nx}{n^3} + \frac{2x\sin nx}{n^2}\right)\Big|_0^{2\pi} = -\frac{4\pi}{n}.$$

Онда Фурье қатары

$$f(x) = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi \sin nx}{n}\right)$$

түрінде жазылады.

2. Периоды 2π-ге тең $f(x) = x^2$ функцияны [–π; π] интервалда Фурье қатарына жіктейік. Берілген функция жұп: $(-x)^2 = x^2$, ал $f(-\pi) = f(\pi) = \pi^2$ теңдігі функцияның периодтылығынан орындалады. Сондықтан берілген функцияны Фурье қатарына жіктеу үшін формулаларды пайдаланыңыз:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{2}{\pi}\Big(\frac{x^2 \sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx\Big) = -\frac{4}{\pi n}\Big(\frac{\sin nx}{n^2} - \frac{x\cos nx}{n}\Big)\Big|_0^{\pi} = \frac{4(-1)^n}{n^2},$$

мұндағы: $\sin n\pi = 0$, $\cos n\pi = (-1)^n$. Сонда

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

3. Периоды 2π-ге тең $f(x)=x$ функцияны $[-\pi;\ \pi]$ интервалда Фурье қатарына жіктейік. Берілген функция тақ: $f(-x)=-x=-f(x)$. Сондықтан, берілген функцияға (7.68–7.69) формулаларды пайдаланамыз:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin nx}{n^2}-\frac{x\cos nx}{n}\right)\Bigg|_0^{\pi}=-\frac{2(-1)^n}{n}=(-1)^{n+1}\frac{2}{n},$$

$$\sin n\pi=0, \cos n\pi=(-1)^n.$$

Сонда

$$f(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin nx. \tag{7.74}$$

Егер (7.72) формуладағы $x=\pi$ болса, онда қосынды нөлге айналады. Ал $f(x)$ функция π нүктеде үзілісті, онда Фурье қатарының қосындысы, Дирихле теоремасы бойынша $\frac{f(\pi-0)+f(\pi+0}{2}$ өрнегіне тең, мұндағы

$$f(\pi-0)= =\lim_{\substack{x\to\pi\\x<\pi}}\pi,\ f(\pi+0)=f(-\pi+0)=\lim_{\substack{x\to\pi\\x>\pi}}\pi=-\pi.$$

Онда:

$$\frac{f(\pi-0)+f(\pi+0)}{2}-\frac{\pi+(-\pi)}{2}=0.$$

VIII ТАРАУ. КӨП АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯ

8.1. Көп өлшемді евклид кеңістігіндегі негізгі ұғымдар

Біз осы курстың III томында (Математикалық анализ. *1-бөлім*) бір айнымалы $y = f(x)$ функцияны қарастырдық, мұндағы x **тәуелсіз айнымалы шама**, ал y айнымалы шама x -ке тәуелді, яғни x функцияның **аргументі**, ал y немесе f **функция** деп аталады.

Көп жағдайда функция екі, үш, т.с.с. бірнеше тәуелсіз айнымалы шамаларға тәуелді болады, мысалы, тікбұрышты параллелепипедтің $V = abc$, көлемі оның табанының a мен b ұзындықтары мен c биіктігіне тәуелді, демек көлем үш a,b,c тәуелсіз айнымалы шамаларға тәуелді болады. Осы сияқты, физикалық дененің t уақыттағы құбылысын қарастырғанда, онда ол дененің физикалық сипаттамасын төрт айнымалы шама арқылы анықтауға болады, мұнда x, y, z дененің координат жүйедегі координаты, ал t – уақыт. Осы курстың II томында евклид кеңістігі туралы (*IV тарау*) толық мағлұмат берілген. Сондықтан сызықты евклид кеңістігінің анықтамасына және оның қасиеттеріне элементтеріне орындалатын амалдарға, скаляр көбейтіндіге, нормаға, базиске, осы сияқты осы курстың I томында координат жазықтығы және үш өлшемді координат кеңістігі туралы толық айтылған. Ол себепті біз оларға тоқталмаймыз.

Анықтама. m **өлшемді координат кеңістігі** деп m нақты $x_1, x_2, ..., x_m$ сандарынан әртүрлі реттілікпен құралған жиындарды айтамыз және ол R^m немесе R таңбаларымен белгіленеді.

Әртүрлі реттілікпен алынған $x_1, x_2, ..., x_n$ сандардың жиыны m өлшемді координат кеңістігіндегі A **нүктенің координаты** деп аталады және ол нүкте $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ таңбамен белгіленеді.

Анықтамадағы "реттілік" деген ұғымды $x_1, x_2, ..., x_n$ нақты сандарының қайсысы бірінші, қайсысы екінші, т.с.с. сан екендігін білдіреді.

Анықтама. m өлшемді R^m координат кеңістігі m **өлшемді евклид кеңістік** деп аталады, егер R^m кеңістігіндегі кез келген екі $A'(x_1', x_2', ..., x_m')$ пен $A''(x_1'', x_2'', ..., x_m'')$ нүктелердің арақашықтығы анықталса және ол

$$\rho(A', A'') = \sqrt{(x_1' - x_1'')^2 + (y_2' - y_2'')^2 + (z_m' - z_m'')^2}$$

формуласымен анықталады және m өлшемді евклид кеңістік (қысқаша евклид кеңістік) E^m немесе E таңбамен белгіленеді. E^1 евклид кеңістігі нақты сандар осі болады. Осы сияқты E^2, E^3 евклид кеңістіктері сәйкес евклид жазықтық және үш өлшемді евклид кеңістік болып табылады.

Енді m өлшемді E евклид кеңістігіндегі нүктелер жиынын (жиыншаларын) қарастырайық, ол үшін $A_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0) \in E$, $R > 0$ болсын. $x_1, x_2, ..., x_m$ координаттары

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + ... + (x_m - x_m^0)^2 < R^2$$

теңсіздігін қанағаттандыратын E жиынындағы барлық $A(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ нүктелердің $\{A\}$ жиыны центрі $A_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ нүкте, ал радиусы R-ге тең m **өлшемді ашық (қатаң) шар** деп аталады, яғни $\{A\} = \{A : \rho(A, A_0) < R\}$. Демек, алдын ала тағайындалған $A_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ нүктеден E кеңістігіндегі кез келген A нүктеге дейінгі арақашықтығы $\rho(A, A_0) < R$ теңсіздігін қанағаттандыра алатын $A(x_1, x_2, ..., x_m)$ нүктелердің жиынын m **өлшемді ашық шар** дейміз.

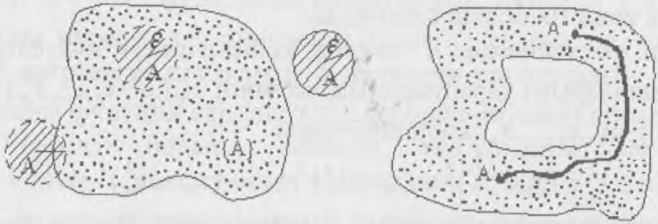
Егер осы анықтамадағы A нүктелердің жиыны $\rho(A, A_0) \le R$ теңсіздігін қанағаттандырса, онда $\{A\}$ жиын m **өлшемді тұйық шар** деп аталады, яғни $\{A\} = \{A : \rho(A, A_0) \le R\}$, ал егер $\rho(A, A_0) = R$ теңсіздігін қанағаттандыратын A нүктелердің $\{A\}$ жиыны центрі $A_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ нүкте, радиусы R-ге тең **сфера** деп аталады, яғни $\{A\} = \{A : \rho(A, A_0) = R\}$.

Егер, $m = 2$ болса (E^2- евклид жазықтығы), онда жоғарыда қарастырылған $\{A\}$ жиындар, центрі $A_0(x_1^0, x_2^0)$ нүкте, радиусы R-ге тең сәйкес ашық дөңгелек, дөңгелек және шеңбер болады.

Центрі $A_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ нүкте, радиусы ε-ге $(\varepsilon > 0)$ тең ашық шар $A_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ **нүктенің** ε **маңайы** деп аталады және ол $U_\varepsilon(A_0)$ таңбамен белгіленеді, яғни $U_\varepsilon(A_0) = \{A : \rho(A, A_0) < \varepsilon\}$.

Координаттары $|x_1 - x_1^0| \le d_1, |x_2 - x_2^0| \le d_2, ..., |x_m - x_m^0| \le d_m$ теңсіздіктерді қанағаттандыратын $A(x_1, x_2, ..., x_m)$ нүктелердің $\{A\}$ жиыны m **өлшемді параллелепипед** деп аталады, мұндағы $d_i > 0, i = \overline{1, m}$. Егер $m = 2$ болса, онда $\{A\}$ жиын тіктөртбұрыш болады.

E кеңістігінің нүктелерін анықталған $\{A\}$ жиынындағы A нүкте осы жиынның **ішкі нүктесі** деп аталады, егер A нүктенің кейбір ε маңайы бар болып әрі ол маңайдың барлық нүктелері $\{A\}$ жиынына тиісті болса, яғни $U_\varepsilon(A) \subset \{A\}$ (*8.1-сурет*).



а) *ә*)

8.1-сурет

Демек, A нүктенің ε маңайының барлық нүктелері $\{A\}$жиынына тиісті. $\{A\}$ жиын E кеңістігінің нүктелер жиыны болсын.

E кеңістігіндегі A нүкте $\{A\}$ жиынның **сыртқы нүктесі** деп аталады, егер A нүктенің кейбір ε маңайы табылып әрі ол маңайдың барлық нүктелері $\{A\}$ жиынына тиісті болмаса, яғни $U_\varepsilon(A) \cap \{A\} = \varnothing$ (*8.1-сурет*).

E кеңістігіндегі A нүкте $\{A\}$ жиынының **шекаралық (шекара) нүктесі** деп аталады, егер A нүкте $\{A\}$ жиынының не сыртқы, не ішкі нүктесі болмаса (*8.1-сурет*). Демек, A нүктенің кез келген ε маңайында $\{A\}$ жиынға тиісті әрі тиісті емес нүктелер бар және де $\{A\}$ жиынының A шекара нүктесі осы жиынның өзіне тиісті болуы да, тиісті болмауы да мүмкін. Олай болса, A **нүкте** $\{A\}$ **жиынының шекара нүктесі болу үшін** A **нүктенің кез келген** ε **маңайында** $\{A\}$ **жиынға тиісті және де тиісті емес нүктелер бар болуы қажетті әрі жеткілікті.** Шынында да, егер A нүктенің ε маңайында $\{A\}$ жиынға тиісті (тиісті емес) нүктелер табылмаса, онда A нүкте $\{A\}$ жиынының сыртқы (ішкі) нүктесі болады және де бұл нүкте осы жиынның шекара нүктесі де бола алмайды.

E кеңістігінің $\{A\}$ жиыны **ашық жиын немесе облыс** деп аталады, егер $\{A\}$ жиынындағы кез келген нүкте оның ішкі нүктесі болса, яғни жиындағы кез келген A нүктенің ε маңайы осы жиынға тиісті болады.

$\{A\}$ жиынның әрбір шекаралық нүктелері осы жиынның нүктелері болса, онда $\{A\}$ **жиын тұйық** деп аталады. Мысалы, сфера тұйық жиын болады. $\{A\}$ жиынның барлық шекаралық нүктелерінен анықталған жиынды $\{\overline{A}\}$ таңбамен белгілейік. $\{A\}$ мен $\{\overline{A}\}$ жиындарының қосындысы **тұйық облыс** деп аталады.

Егер $\{A\}$ облыстың барлық нүктелері кейбір шардың ішінде жатса, онда **облыс шектелген (шенелген)** деп аталады. **Нүктенің маңайы** деп осы нүкте тиісті кез келген ашық жиынды айтамыз.

Анықтама. E кеңістігінде L **қисық сызық үзіліссіз** деп аталады, егер осы кеңістіктегі $\{A\}$ жиынның $A(x_1, x_2, ..., x_m)$ нүктелерінің координатары t параметрге тәуелді үзіліссіз функция болса:

$$x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), ..., x_m = \varphi_m(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

мұндағы $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_m(t)$ функциялары $[\alpha; \beta]$ сегментте үзіліссіз функциялар. Бұл жағдайда, $\{A\}$ жиынындағы $A'(x_1', x_2', ..., x_m')$, $A''(x_1'', x_2'', ..., x_m'')$ нүктелерді **үзіліссіз L қисық сызықпен қосуға болады** дейміз, егер осы қисық сызықтың теңдеуі параметр теңдеулерімен анықталса:

$$x_1' = \varphi_1(\alpha), x_2' = \varphi_2(\alpha), ..., x_m' = \varphi_m(\alpha),$$
$$x_1'' = \varphi_1(\beta), x_2'' = \varphi_2(\beta), ..., x_m'' = \varphi_m(\beta),$$

мұндағы $A'(\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha), ..., \varphi_m(\alpha))$ мен $A''(\varphi_1(\beta), \varphi_2(\beta), ..., \varphi_m(\beta))$ нүктелері $A'A''$ **қисық сызықтың ұштары** деп аталады.

E кеңістігіндегі $\{A\}$ **жиынның нүктелері байланысты** деп аталады, егер оның кез келген екі нүктесін үзіліссіз қисық сызықпен қосуға әрі қисық сызықтың барлық нүктелері осы жиынға тиісті болса, қысқаша, $\{A\}$ **жиыны байланысты** деп аталады (*8.1 ә-сурет*).

Осы анықтамадан соң жоғарыда келтірілген кейбір анықтамаларға эквивалентті анықтамаларды келтірейік.

A **нүктенің маңайы** деп A нүкте тиісті болатын кез келген ашық байланысты жиынды айтамыз. Ашық байланысты жиын **облыс** деп аталады, ал облыс пен шекаралық нүктелер жиынының қосындысы **тұйық облыс** деп аталады.

E кеңістігіндегі A нүкте $\{A\}$ **жиынның шектік нүктесі** деп аталады, егер A нүктенің кез келген ε маңайында A нүктеден өзге жиынның, кем дегенде бір нүктесі бар болса. Жиынның шектік нүктесін былай түсіндіруге болады: A нүкте $\{A\}$ **жиынның шектік нүктесі** деп аталады, егер "біз A нүктені баспай, $\{A\}$ жиынның нүктелерін басып A нүктеге мейлінше өте аз жеткілікті қашықтыққа дейін жақындай алсақ". Осы анықтамадан соң тұйық жиын туралы мынадай қорытындыға келеміз: $\{A\}$ **жиын тұйық болу**

үшін оның барлық шектік нүктелері осы жиынға тиісті болуы қажетті әрі жеткілікті. Енді тұйық жиынның алғашқыда берілген анықтамасына эквивалентті анықтаманы келтірейік: $\{A\}$ **жиын тұйық** деп аталады, егер оның барлық шектік нүктелері осы жиынға тиісті болса. Демек, жиынның шектік нүктесі осы жиынның өзіне тиісті болуы да, болмауы да мүмкін.

Сұрақтар

1. m өлшемді координат кеңістігі.
2. m өлшемді евклид кеңістігі.
3. m өлшемді ашық (қатаң) шар.
4. Жиынының ішкі, сыртқы, шекаралық (шекара) нүктелері.
5. Тұйық жиын.

8.2. Көп айнымалы функция

Осы тақырыпта m айнымалы функцияның анықтамасын келтіреміз. $\{A\}$ жиын E евклид кеңістігінің нүктелер жиыны болсын. Алдымен, осы курстың III томында келтірілген бір айнымалы функцияның анықтамасын еске түсірейік.

Анықтама. E евклид түзуінің $(m=1)$ нүктелерінен анықталған $\{A\}$ жиынның әрбір A нүктесіне белгілі бір заңдылық немесе ереже бойынша u саны сәйкес келсе, онда бізге $\{A\}$ жиынында $u=f(A)$ **функция берілді** дейміз.

Бұл жағдайда біз бір айнымалы функцияны $y=f(x)$ таңбамен белгіледік. Енді екі айнымалы функцияның анықтамасын берейік.

Анықтама. E евклид жазықтығының $(m=2)$ нүктелерінен анықталған $\{A\}$ жиынның әрбір A нүктесіне белгілі бір заңдылық немесе ереже бойынша u саны сәйкес келсе, онда бізге $\{A\}$ жиынында $u=f(A)$ **функция берілді** дейміз.

Екі айнымалы функция $u=f(x,y)$ таңбамен белгіленеді, мұндағы қосарланған (x,y) тәуелсіз айнымалы шамалар евклид жазықтығындағы нүкте, яғни евклид жазықтығындағы A нүктенің координаттары және x пен y функцияның аргументтері деп аталады, u **тәуелді айнымалы шама** немесе **функция** деп аталады.

Осы сияқты, үш айнымалы функцияның анықтамасын келтіруге болады және ол $u=f(x,y,z)$ таңбамен белгіленеді, бұл жағдайда

x, y, z тәуелсіз айнымалы шамалар немесе функцияның аргументтері әрі олар евклид кеңістігіндегі A нүктенің координаттары.

Сонымен, егер $u = f(A)$ функция $\{A\}$ жиынында берілсе, онда $\{A\}$ жиын **функцияның анықталу жиыны,** ал u саны $\{A\}$ жиынындағы A нүктеге сәйкес келетін сан. $\{A\}$ жиынындағы A нүктелерге сәйкес келетін u сандарының жиыны $u = f(A)$ функцияның **қабылдай алатын мәндер жиыны** деп аталады.

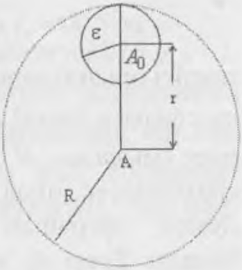
Енді m айнымалы функцияның анықтамасына тоқталайық.

Анықтама. m өлшемді E евклид кеңістігінің элементтерінен анықталған $\{A\}$ жиынның әрбір A нүктесіне белгілі бір заңдылық немесе ереже бойынша u саны сәйкес келсе, онда бізге m **айнымалы** $u = f(A)$ **функция берілді** дейміз.

Анықтамадағы $\{A\}$ жиын $u = f(A)$ **функцияның анықталу жиыны,** ал анықталу жиынның әрбір нүктесіне сәйкес келетін u сандар жиыны **функцияның қабылдай алатын мәндер жиыны** деп аталады. A нүктенің координаттары реттелген $x_1, x_2, ..., x_m$ нақты сандармен анықталғандықтан, m айнымалы функция $u = f(A)$, $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ немесе $u = f(A)$ таңбаларының бірімен белгіленеді, мұндағы $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$.

Енді көп айнымалы функцияға мысалдар қарастырайық. Төмендегі функциялардың анықталу жиындарын анықтаңдар.

1-мысал. Ашық шар, яғни $\rho(A, A_0') < R$ теңсіздігін қанағаттандыратын A_0' нүктелердің жиыны ашық жиын болатынын дәлелдейік (*8.2-сурет*).



8.2-сурет

Дәлелдеуі. Ашық жиынның анықтамасы бойынша шардың (ашық шардың) кез келген нүктесі осы шардың ішкі нүктесі болатынын дәлелдесек жеткілікті, яғни шардың кез келген A_0 нүктесі үшін ε маңайы табылып, осы маңай толығымен шарға тиісті болатынын дәлелдейік. A_0 нүкте шардың кез келген нүктесі және $\rho(A, A_0) = r$ болсын. Онда A_0 ашық шардың нүктесі болғандықтан $r > R$ теңсіздігі орындалады. Жоғарыдағы $\varepsilon > 0$ санын $R - r$-ге тең болсын деп таңдап алып, A_0 нүктенің ε маңайын қарастырайық. Онда A_0 нүктенің осы маңайындағы кез келген A_0' нүктелері үшін $\rho\ (A_0', A_0) < \varepsilon$ теңсіздігі орындалады.

Үшбұрыш теңсіздігі бойынша:

$$\rho\ (A, A_0^{'}) \le \rho(A_0^{'}, A_0) + \rho(A_0, A) < \varepsilon + r = R - r + r = R.$$

Сонымен, A_0 нүктенің ε маңайындағы кез келген $A_0^{'}$ нүкте ашық шарға тиісті болады. Дәлелденді.

2-мысал. Сфера, яғни $\beta(A_0^{'}, A) = R$ теңдігін қанағаттандыратын $A_0^{'}$ нүктелердің жиыны тұйық жиын болатынын дәлелдейік.

Дәлелдеуі. Тұйық жиынның анықтамасы бойынша, барлық шекаралық нүктелер сфераға тиісті болатынын дәлелдесек жеткілікті. Алдымен сфераның кез келген A_0 нүктесі оның шекара нүктесі болатынын дәлелдейік, яғни A_0 нүктенің кез келген ε маңайында сфераға тиісті және тиісті емес нүктелер бар екенін дәлелдейік. A мен A_0 нүктелердің координаттары $A(a_1, a_2, ..., a_m)$, $A_0(x_1^0,\ x_2^0, ..., x_m^0)$ болсын. A_0 нүкте сфераға тиісті болғандықтан

$$\rho(A_0, A) = \sqrt{(x_1^0 - a_1)^2 + (x_2^0 - a_2)^2 + ... + (x_m^0 - a_m)^2} = R$$

теңдігі орындалады. Енді $A'(x'_1, x'_2, ..., x'_m)$ нүктені қарастырайық, мұндағы $x'_i = x_i^0 + \dfrac{x_i^0 - a_i}{R} \cdot \dfrac{\varepsilon}{2}$ болсын. A' пен A'_0 нүктелердің арақашықтығына

$$\rho(A', A'_0) = \sqrt{\left(\frac{x_0^1 - a_1}{R} \cdot \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_2^0 - a_2}{R} \cdot \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + ... + \left(\frac{x_m^0 - a_m}{R} \cdot \frac{\varepsilon}{2}\right)^2} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалады. Онда A' нүкте A_0 нүктенің ε маңайына тиісті болады. Екіншіден, A' нүкте сфераға тиісті емес, себебі

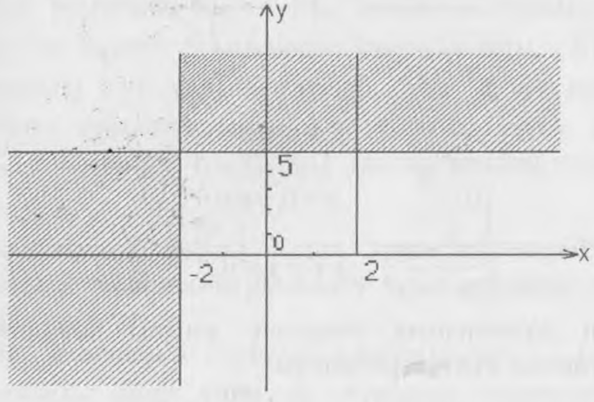
$$\rho(A', A) = \sqrt{(x_1^1 - a_1)^2 + (x_2^1 - a_2)^2 + ... + (x_m^1 - a_m)^2} = R + \frac{\varepsilon}{2} > R$$

теңдігі орындалады, Сонымен, сфераның A_0 нүктесінің ε маңайында сфераға тиісті (мысалы, A_0 нүктенің өзі) және сфераға тиісті емес (мысалы, A' нүкте) нүктелер бар (егер үш өлшемді кеңістікті қарастырсақ, онда жоғарыда айтылғандардың көрнектілігі айқын). Демек, сфераның кез келген нүктесі оның шекаралық нүктесі болады. Егер A_0 нүкте сфераға тиісті болмаса, онда ол сфераның шекаралық нүктесі бола алмайды. Шынында да, мысалы, егер $\rho(A_0, A) = \ = r < R$ болса және $\varepsilon = R - r$, онда A_0 нүктенің ε маңайындағы A' нүктелердің біреуі де сфераға тиісті емес $\rho(A', A) \le \rho(A', A_0) + \rho(A_0, A) < \varepsilon + r = R$). Онда A_0 нүкте сфераның нүктесі бола алмайды.

3-мысал. $u=\sqrt{(2+x)(y-5)}$ болсын. Функцияның анықталу жиыны XOY жазықтығындағы қосарланған x, y нақты сандарының жиыны болып табылады. Олай болса, u функция анықталу үшін квадрат түбір астындағы өрнек $(2+x)(y-5)\geq 0$ теңсіздікті қанағаттандыруы керек. Осыдан:

$$\begin{cases} 2+x\geq 0, \\ y-5\geq 0 \end{cases} \text{ және } \begin{cases} 2+x\leq 0, \\ y-5\leq 0 \end{cases}$$

теңсіздіктер жүйесін аламыз. Онда (*8.3-сурет*).



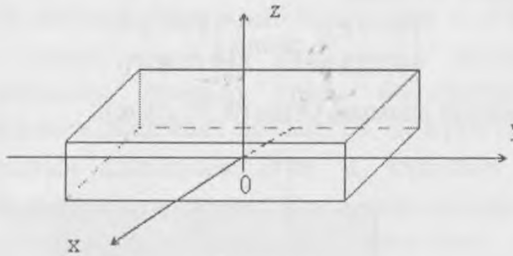
8.3-сурет

$$\begin{cases} x\geq -2, \\ y\geq 5 \end{cases} \text{ және } \begin{cases} x\leq -2 \\ y\leq 5 \end{cases}$$

Сонымен, берілген функцияның x пен y аргументтері не $x>-2$, $y\geq 5$ не $x\leq -2$, $y\leq 5$ теңсіздігін қанағаттандыратын қосарланған $(x;y)$ сандарға (жазықтықтағы нүктелерге) u функцияның мәндері сәйкес келеді. Қосарланған нүктелердің жиыны XOY координат жазықтығында түзулермен белгіленген (штрихталған), ал белгіленбеген нүктелерде функция анықталмаған.

4-мысал. $u(x,y)=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{z(1-z)}}-2\ln(16-y^2)$. Функция үш x, y, z тәуелсіз айнымалы шамалар арқылы берілген, сондықтан функцияның анықталу жиыны XYZ кеңістігіндегі үштік $(x;y;z)$ сандармен анықталатын нүктелердің жиыны болып табылады. Осы үштік сандар мына теңсіздіктерді қанағаттандыруы керек:

$9-x^2 \ge 0$, $z(1-z)>0$, $16-y^2>0$. Осыдан $-3 \le x \le 3$, $0<z<1$, $-4<$ $<y<4$. Сонымен берілген функцияның анықталу жиыны параллелепипед болады, ал осы параллелепипедке тиісті емес нүктелерде функция анықталмаған (*8.4-сурет*).



8.4-сурет

5-мысал. $u=\begin{cases} 0, & x=0, y=0, \\ \dfrac{x^2+xy}{2x^2+y^4}, & x \ne 0, y \ne 0. \end{cases}$

Берілген функцияның анықталу жиыны координат жазықтығының барлық нүктелері болады.

Сұрақтар мен есептер

1. Көп айнымалы функция.
2. Көп айнымалы функцияның анықталу жиыны.
3. $u=\sqrt{(2+x)(y-5)}$ функцияның анықталу жиынының сызбасын салыңдар.
4. $u(x,y)=\dfrac{\sqrt{16-x^2}}{\sqrt{z(4-z)}}-2\ln(9-y^2)$ функцияның анықталу жиынының сызбасын салыңдар.

8.3. Евклид кеңістігіндегі жинақты нүктелер тізбегі

Алдымен m өлшемді E евклид кеңістіктегі тізбектің анықтамасына тоқталайық.

Анықтама. Әрбір n натурал $(n=1,2,...)$ сандарына m өлшемді E евклид кеңістігінде A_n нүктелер сәйкес келсе, онда осы сәйкестікпен анықталған $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ нүктелер тізбегі m өлшемді евклид кеңістігінің **нүктелер тізбегі** (қысқаша: евклид кеңістігіндегі тізбек) деп аталады және ол $\{A_n\}$ таңбамен белгіленеді.

Анықтама. m өлшемді E евклид кеңістістігіндегі $\{A_n\}$ нүктелер тізбегі **жинақты (жинақталатын) тізбек** деп аталады, егер A_0 нүкте бар болып және кез келген $\varepsilon > 0$ санына сәйкес $N(\varepsilon)$ нөмірі табылып, $n \geq N(\varepsilon)$ теңсіздігі үшін $\rho(A_n, A_0) < \varepsilon$ теңсіздік орындалатын болса, онда A_0 нүкте $\{A_n\}$ **нүктелер тізбегінің шегі** деп аталады және ол мына түрде белгіленеді:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A_0 \text{ немесе } A_n \to A_o, \text{ егер } n \to \infty. \tag{8.1}$$

Осы анықтаманың геометриялық мағынасын былай түсінуге болады: $N(\varepsilon)$ нөмірінен бастап $\{A_n\}$ жиынның барлық нүктелері A_0 нүктенің кез келген ε маңайына тиісті болады, ($N(\varepsilon)$ нөмірі жалпы жағдайда) $\varepsilon > 0$ санына тәуелді, яғни A_n нүктелерден A_0 нүктеге дейінгі арақашықтық $n \to \infty$ болғанда нөлге ұмтылады: $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(A_n, A_0) = 0$. Демек, $\{\rho(A_n, A_0)\}$ сандар жиыны нөлге жинақталады.

Осы тақырыптағы негізгі Коши критерийі мен Больцано-Вейерштрасстың теоремасын дәлелдеу үшін алдымен екі лемманы дәлелдейік.

8.1-лемма. m өлшемді E евклид кеңістігіндегі $\{A_n\}$ тізбек A_0 нүктеге жинақты болу үшін A_n нүктенің координаттарынан анықталған $\{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\}, ..., \{x_m^{(n)}\}$ тізбектер A_0 нүктенің сәйкес $a_1, a_2, ..., a_m$ координаттарына жинақталынуы қажетті әрі жеткілікті.

Қажеттілігі. $\{A_n\}$ нүктелер тізбегі A_0 нүктеге жинақталсын деп ұйғарай-ық. Жоғарыдағы анықтама бойынша, кез келген $\varepsilon > 0$ санына $N(\varepsilon)$ нөмірін таңдайық, онда барлық $n \geq N(\varepsilon)$ үшін $\rho(A_n, A_0) < \varepsilon$ теңсіздігі орындалады. Лемманың шартындағы $\{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\}, ..., \{x_m^{(n)}\}$ сандары берілген A_n нүктенің координаты, ал $a_1, a_2, .., a_m$ сандары казір ғана анықталған A_0 нүктенің координаты болсын. Соңғы $\rho(A_n, A_0) < \varepsilon$ теңсіздікті *8.1-тақырыптағы* $A_n(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, ..., x_m^{(n)})$ мен $A_0(a_1, a_2, ..., a_m)$ нүктелердің арақашықтығының формуласы бойынша мына түрде жазуға болады:

$$\sqrt{(x_1^{(n)} - a_1)^2 + (x_2^{(n)} - a_2)^2 + ... + (x_m^{(n)} - a_m)^2} < \varepsilon. \tag{8.2}$$

Осыдан, $n \geq N$ теңсіздігі үшін төмендегі теңсіздіктер орындалады:

$$|x_1^{(n)}-a_1|<\varepsilon, |x_2^{(n)}-a_2|<\varepsilon,...,|x_m^{(n)}-a_m|<\varepsilon.$$

Демек, A_n нүктенің координаттарынан анықталған $\{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\},..., \{x_m^{(n)}\}$ тізбектер сәйкес A_0 нүктенің $a_1, a_2,..., a_m$ координаттарына жинақталады.

Жеткіліктілігі. A_n нүктенің $\{x_1^{(n)}\},\{x_2^{(n)}\},...,\{x_m^{(n)}\}$ координаттары сәйкес A_0 нүктенің $a_1, a_2,..., a_m$ координаттарына жинақталсын. Онда, кез келген $\varepsilon>0$ санына $N_1, N_2,..., N_m$ нөмірлері табылып, $n\ge N_1, n\ge N_2,..., n\ge N_m$ теңсіздіктері үшін сәйкес

$$|x_1^{(n)}-a_1|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}, |x_2^{(n)}-a_2|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}},..., |x_m^{(n)}-a_m|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}.$$

теңсіздіктері орындалады. Енді, анықтамадағы N нөмірі ретінде $N_1, N_2,..., N_m$ нөмірлерінің максимумын таңдап алайық, яғни $N=\max\{N_1, N_2,..., N_m\}$, онда соңғы теңсіздіктерден (8.2) теңсіздікті аламыз, яғни $\rho(A_n, A_0)<\varepsilon$. Олай болса, E кеңістіктегі $\{A_n\}$ тізбек осы кеңістіктің $A_0(a_1, a_2,..., a_m)$ нүктеге жинақталады. Лемма дәлелденді.

Екінші лемманы қарамастан бұрын фундаменталды (іргелі) тізбектің анықтамасын берейік.

Анықтама. m өлшемді E евклид кеңістіктегі $\{A_n\}$ тізбек **фундаменталды (іргелі)** немесе **Коши тізбегі** деп аталады, егер әрбір $\varepsilon>0$ санына $N(\varepsilon)$ нөмірі табылып, барлық $n\ge N(\varepsilon)$ және кез келген натурал $p\ge 0$ үшін $\rho(A_n, A_{n+p})<\varepsilon$ теңсіздігі орындалса.

8.2-лемма. m өлшемді E евклид кеңістіктегі $\{A_n\}$ тізбек фундаменталды болу үшін A_n нүктенің координаттарынан анықталған $\{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\},..., \{x_m^{(n)}\}$ тізбектердің әрқайсысы фундаменталды болуы қажетті әрі жеткілікті.

8.2-лемманың дәлелдеуін жаттығу ретінде оқырмандарға ұсынамыз (лемманың дәлелденуі *8.1-лемманың* дәлелдеуіндей).

8.1-теорема (Коши критерийі). m өлшемді E евклид кеңістіктегі $\{A_n\}$ тізбегі жинақты болу үшін ол фундаменталды тізбек болуы қажетті әрі жеткілікті.

Жеткіліктілігі. $\{A_n\}$ тізбегі фундаменталды болсын деп ұйғарып, оның $A_0(a_1, a_2,..., a_m)$ нүктеге жинақты болатынын дәлелдейік. Ұйғаруымыз бойынша, $\{A_n\}$ нүктелер тізбегі фундаменталды, онда *8.2-лемма* бойынша A_n нүктенің әрбір $\{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\}, ..., \{x_m^{(n)}\}$ координаттары да фундаменталды тізбек болады. Сандар тізбегіндегі Коши критерийі ([1], *1.8-тақырып*) бойынша $\{x_1^{(n)}\}$,$\{x_2^{(n)}\},...,\{x_m^{(n)}\}$ тізбектері сәйкес $a_1, a_2, ..., a_m$ сандарына жинақталады. Олай болса, *8.1-лемма* бойынша $\{A_n\}$ нүктелер тізбегі $A_0(a_1, a_2, .., a_m)$ нүктеге жинақталады.

Қажеттілігі. $\{A_n\}$ нүктелер тізбегі m өлшемді E евклид кеңістіктегі A_0 нүктеге жинақты болсын деп ұйғарайық, онда *8.1-леммадан*: $\{A_n\}$ тізбектің нүктелерінің координаттарынан анықталған тізбектердің әрқайсысы да A_0 нүктенің сәйкес координаттарына жинақталады. Олай болса, сандар тізбегіндегі Коши критерийі ([1], *1.8-тақырып*) бойынша $\{A_n\}$ нүктелер тізбегінің координаттарынан анықталған санды тізбектері фундаменталды болады, демек, *8.2-лемма* бойынша $\{A_n\}$ тізбектің өзі де фундаменталды болады. Теорема дәлелденді.

Енді E кеңістігіндегі шектелген нүктелер тізбектің анықтамасын берейік.

Анықтама. m өлшемді E евклид кеңістіктегі $\{A_n\}$ нүктелер тізбегі **шектелген (шенелген)** деп аталады, егер барлық n үшін $R > 0$ саны табылып, $\rho(O, A_n) \le R$ теңсіздігі орындалса, мұндағы O барлық координаттары нөлге тең нүкте.

Осы анықтаманы геометриялық тұрғыда қарайық: егер $\{A_n\}$ тізбек шектелген болса, онда нүктелер тізбектің барлық A_n нүктелері центрі координат жүйенің бас нүктесі болатын, ал радиусы R-ге тең шардың ішінде немесе шекарасында жатады.

Анықтама. Егер $n_1, n_2, ..., n_k, ...$ оң бүтін қатаң өспелі кез келген $(n_1 < n_2 < \; < ... < n_k)$ тізбек болсын, онда $A_{n_1}, A_{n_2}, ..., A_{n_k}, ...$ нүктелер тізбегі $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ **нүктелер тізбегінің тізбекшесі** деп аталады және ол $\{A_{n_k}\}$ таңбамен белгіленеді.

8.2-теорема (Больцано-Вейерштрасс). m өлшемді E евклид кеңістігіндегі кез келген шектелген (шенелген) $\{A_n\}$ нүктелер тізбегінен жинақты тізбекше бөліп алуға болады.

Дәлелдеуі. Алдымен A_n нүктенің координаттарынан анықталған $\{x_1^{(n)}\}$ $\{x_2^{(n)}\},...,\{x_m^{(n)}\},...$ тізбектердің шектелетіндігін дәлелдейік. $\{A_n\}$ тізбектің өзі шектелгендіктен, барлық n үшін

$$\rho(O, A_n) = \sqrt{(x_1^{(n)})^2 + (x_2^{(n)})^2 + ... + (x_m^{(n)})^2} \le a$$

теңсіздігі орындалады, демек барлық n үшін $|x_1^{(n)}|\le a$, $|x_2^{(n)}|\le a,...,|x_m^{(n)}|\le\ \le a$ теңсіздіктері де орындалады, A_n нүктенің барлық координаттары да шектелген. Енді A_n нүктенің бірінші координатынан анықталған $\{x_1^{(n)}\}$ тізбекті қарастырайық. Санды тізбектегі Болцано-Вейерштрасс ([1], *1.7-тақырып*) теорема бойынша шектелген $\{x_1^{(n)}\}$ санды тізбектен жинақты $\{x_1^{(n_{k_1})}\}$ тізбекше бөліп алуға болады әрі ол a_1 санына жинақталсын. Енді A_n нүктенің екінші $\{x_2^{(n)}\}$ координатынан анықталған $\{x_2^{(n)}\}$ тізбектен $\{x_2^{(n_{k_1})}\}$ тізбекше бөліп алып, осы санды тізбекшеге Больцано-Вейерштрасс теоремасын қолданайық, онда $\{x_2^{(n_{k_1})}\}$ санды тізбекшеден a_2 санға жинақталатын $\{x_2^{(n_{k_2})}\}$ санды тізбекше бөліп алуға болады. Бұл жерде, $\{x_1^{(n_{k_1})}\}$ тізбекшеден бөлініп алынған $\{x_1^{(n_{k_2})}\}$ тізбекшеде a_1 санға жинақталатынын ескерте кетейік. Сонымен, $\{x_1^{(n_{k_2})}\}$ және $\{x_2^{(n_{k_2})}\}$ тізбекшелері сәйкес a_1 мен a_2 сандарға жинақталады. Егер A_n нүктенің $\{x_3^{(n)}\}$ координатынан бөлініп алынған $\{x_3^{(n_{k_2})}\}$ тізбекшеден a_3 санға жинақталатын $\{x_3^{(n_{k_3})}\}$ тізбекше бөліп алсақ, онда $\{x_1^{(n_{k_3})}\}$, $\{x_2^{(n_{k_3})}\}$, $\{x_3^{(n_{k_3})}\}$ тізбекшелері сәйкес a_1, a_2, a_3 сандарға жинақталады. Тізбекшелерді осылайша бөліп алуды жалғастырып, ең соңында, A_n нүктенің m-координатынан a_m санға жинақталатын $\{x_m^{(n_{k_m})}\}$ тізбекше бөліп аламыз. Сонымен, $\{x_1^{(n_{k_m})}\},\{x_2^{(n_{k_m})}\},...,$ $\{x_m^{(n_{k_m})}\}$ тізбекшелері сәйкес $a_1, a_2, \ ..., a_m$ сандарына жинақталады. Олай болса, *8.1-лемма* бойынша, $\{A_n\}$ нүктелер тізбектен бөлініп алынған $\{A_{n_{k_m}}\}$ тізбекше координаттары $a_1, a_2, ..., a_m$ сандары болатын A_0 нүктеге жинақталады. Теорема дәлелденді.

Осы теоремадағы A_0 нүкте жайлы мына тұжырымға келеміз: егер A_0 нүкте тұйық $\{A\}$ жиынына тиісті $\{A_n\}$ нүктелер тізбегінің шегі болса, онда ол нүкте $\{A\}$ жиынына да тиісті. Шынында да, A_0 нүктенің кез келген ε маңайында $\{A_n\}$ нүктелер тізбегінің нүктелері бар, яғни ол нүктелер $\{A\}$ жиынының да нүктелері. Сондықтан A_0 нүкте $\{A\}$ жиынның не ішкі, не шекаралық нүктесі болады, демек, A_0 нүкте $A_0(a_1, a_2, ..., a_m)$ жиынына да тиісті.

Мысал. A нүкте $\{A\}$ жиынының шектік нүктесі болсын. Онда A нүктеге жинақты $\{A'\}$ жиыны табылып, $\{A'\}$ жиынының әрбір нүктесі $\{A\}$ жиынға тиісті болатынын әрі ол нүктелер A нүктемен беттеспейтінін дәлелдейік.

Шешуі. Ол үшін A нүктенің ε_1 маңайын қарастырайық және $\varepsilon_1 = 1$ болсын. Жиынның шектік нүктесінің анықтамасы бойынша, A нүктенің ε_1 маңайында A нүктеден өзге $\{A\}$ жиынның шексіз көп элементтері орналасқан. ε_1 маңайындағы шексіз көп элементтердің бірін M_1 деп белгілейік және осы нүктеден A нүктеге дейінгі арақашықтық δ_1 болсын, яғни $\rho(M_1, A) = \delta_1$, онда $\delta_1 < \varepsilon = 1$. Енді $\varepsilon_2 = min(\delta_1, \frac{1}{2})$ болсын. Онда A нүктенің ε_2 маңайында A нүктеден өзге $\{A\}$ жиынның шексіз көп элементтері орналасқан. Сол элементтердің (нүктелердің) бірін M_2 деп белгілейік және $\rho(M_2, A) = \delta_2$ болсын. Онда $\delta_2 < \frac{1}{2}$. Осылайша жалғастырып, A нүктемен беттеспейтін шексіз көп нүктелер: M_1. $M_2, ..., M_n, ...$ жиын құрайды. Ол жиын $\delta > 0$ болсын. Онда $\rho(M_n, A) < \frac{1}{n}$ теңсіздігі орындалады, демек, $n \to \infty$ ұмтылғанда $\{M\}$ жиын A нүктеге жинақталады.

8.4. Көп айнымалы функцияның шегі

Біз m өлшемді E евклид кеңістігінің $\{A\}$ жиынында анықталған $u = f(A)$ функцияны және A_0 нүктені қарастырайық, мұндағы A_0 нүкте E жиынындағы нүкте әрі A_0 нүкте $\{A\}$ жиынына тиісті, тиісті емес болуы да мүмкін, бірақ осы нүктенің ε маңайында A_0 нүктеден өзге, кем дегенде бір нүкте бар болсын, демек A_0 нүкте $\{A\}$ жиынының шектік нүктесі болады.

Функция шегінің Коши мен Гейне ұсынған анықтамаларын келтірейік.

Анықтама (Коши). Егер кез келген $\varepsilon > 0$ санына $\delta > 0$ саны табылып, $0 < \rho(A, A_0) < \delta$ теңсіздікті қанағаттандыратын функцияның анықталу жиынындағы кез келген A нүкте үшін $| f(A) - b | < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда b саны $u = f(A)$ **функцияның** A_0 **нүктедегі шегі** деп аталады.

Анықтама (Гейне). Егер $u = f(A)$ функцияның анықталу $\{A\}$ жиынындағы A_0-ге тең емес $\{A_n\}$ нүктелер тізбегі A_0 нүктеге жинақты болса және осы нүктелер тізбегіне сәйкес келетін функция мәндерінің $\{f(A_n)\}$ тізбегі b-ға жинақты болса, онда b саны $u = f(A)$ **функцияның** A_0 **нүктедегі шегі** деп аталады. A_0 нүктедегі немесе $A \to A_0$ ұмтылғандағы $u = f(A)$ функцияның шегі

$$\lim_{A \to A_0} f(A) = b \quad \text{немесе} \quad \lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \dots \dots \dots \\ x_m \to a_m}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = b$$

немесе $A \to A_0, f(x) \to A$ таңбаларының бірімен белгіленеді, мұндағы $a_1, a_2, \dots, a_m$ сандар A_0 нүктенің координаттары. Анықтамадағы шек m **еселі шек** деп те аталады. Егер $m = 2$ болса, шек екі еселі шек, $m = 3$ болса, үші еселі шек деп аталады, т.с.с.

Жоғарыдағы Коши мен Гейне анықтамалары эквивалентті анықтамалар. Олардың эквиваленттілігін осы курстың III томында бір айнымалы функцияға дәлелдегендей дәлелдеуге болады ([1], *2.3-тақырып*). Ол үшін ондағы $\{x_n\}$ санды тізбекті $\{A_n\}$ нүктелер тізбегіне, a нүктені $A_0(a_1, a_2, \dots, a_m)$ нүктеге, $|x - a|$ мен $|x_n - a|$ модульдерін сәйкес $\rho(A, A_0)$ мен $\rho(A_n, A_0)$ арақашықтықтарына, ал $\{f(x_n)\}$ санды тізбекті $\{f(A_n)\}$ санды тізбекке алмастырсақ болғаны.

Енді $A \to \infty$ болғандағы $u = f(A)$ функция шегінің анықтамасына тоқталайық. Ол үшін $u = f(A)$ функциясы $\{A\}$ жиынында анықталсын және кез келген $\delta > 0$ саны үшін $\{A\}$ жиынының, кем дегенде бір A элементі, центрі $O(0,0,\dots,0)$ нүкте, радиусы δ болатын шардың сыртында жатсын.

Анықтама. b саны $A \to \infty$ болғандағы $u = f(A)$ **функцияның шегі** деп аталады, егер кез келген $\varepsilon > 0$ санына $a > 0$ саны табылып, функцияның анықталу облысында $\rho(O, A) > a$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық нүктелер үшін $|f(A) - b| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса және ол мына таңбамен белгіленеді:

$$\lim_{A \to \infty} f(A) = b.$$

Функция шегінің анықтамасындағы $A \to A_0$ белгіні бірайнымалы функциядағы $A \to A_0 + 0$, $A \to A_0 - 0$, $A \to +\infty$, $A \to -\infty$ белгілерінің бірі деп қарастыруға болады. Бір айнымалы функцияда орындалатын қасиеттер, яғни арифметикалық амалдар көп айнымалы функция үшін де орындалады.

8.3-теорема. $u=f(A)$ мен $v=\varphi(A)$ функциялары $\{A\}$ жиынында анықталсын және олардың A_0 нүктедегі шектері бар болсын, яғни $\lim\limits_{A\to A_0} f(A)=b$, $\lim\limits_{A\to A_0}\varphi(A)=c$, онда $f(A)\pm\varphi(A)$, $f(A)\cdot\varphi(A)$ және $\dfrac{f(A)}{\varphi(A)}$ функцияларының да A_0 нүктедегі шектер бар:

$$\lim_{A\to A_0}\big(f(a)\pm\varphi(A)\big)=b\pm c,$$

$$\lim_{A\to A_0}(f(A)\cdot\varphi(A))==b\cdot c,$$

$$\lim_{A\to A_0}\frac{f(A)}{\varphi(A)}=\frac{b}{c},\quad c\neq 0.$$

Теореманың дәлелдеуін оқырманға ұсынамыз ([1], *8.4-тақырып*). Бір айнымалы функциядағы шексіз аз функцияға орындалатын тұжырымдар көп айнымалы шексіз аз функцияға да орындалады, сондықтан біз оларды дәлелдеусіз қабыл алайық (бұл қасиет $A\to\infty$ болғанда орындалады).

Анықтама. $u=f(A)$ функция A_0 нүктеде **шексіз аз функция** деп аталады, егер

$$\lim_{A\to A_0} f(A)=0$$

теңдігі орындалса.

8.4-теорема. Егер b саны $u=f(A)$ функцияның A_0 нүктедегі шегі болса, онда $\alpha(A)=f(A)-b$ функция осы нүктеде шексіз аз функция болады, яғни

$$\lim_{A\to A_0}(f(A)-b)=0.$$

Осы теореманы ескеріп, A_0 нүктедегі шегі b-ға тең $u=f(A)$ функцияны $f(A)=b+\alpha(A)$, түрде өрнектеп жазуға болады, мұндағы $\lim\limits_{A\to A_0}\alpha(A)=0$. Егер $\lim\limits_{A\to A_0} f(A)=0$, $\lim\limits_{A\to A_0}\varphi(A)=0$ және $\lim\limits_{A\to A_0}\dfrac{f(A)}{\varphi(A)}=0$ болса, онда $f(A)$ **функцияның A_0 нүктеде нөлге ұмтылу реті $\varphi(A)$ функцияға қарағанда жоғары** деп аталады.

Біз осы тақырыпта функцияның нүктедегі шегі бар болсын деп қабылдадық, ал осы шектің бар болуын қамтамасыз ететін шартты қарастырған жоқпыз. Енді осы шектің бар болуын қамтамасыз ететін теореманы қарастырайық.

Анықтама. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ санына $\delta > 0$ саны табылып, $0 < \rho(A', \quad A_0) < \delta$, $0 < \rho(A'', A_0) < \delta$ теңсіздіктерді қанағаттандыратын функцияның анықталу $\{A\}$ жиындағы барлық A' және A'' нүктелерге $| f(A') - f(A'') | < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда $u = f(A)$ функция $A = A_0$ нүктеде ($A \to \infty$ болғанда да) **Коши шартын қанағаттандырады** деп аталады.

8.5-теорема (Коши критерийі). $u = f(A)$ функцияның $A = A_0$ нүктеде шектеулі шегі бар болу үшін функция осы нүктеде Коши шартын қанағаттандыруы қажетті әрі жеткілікті.

Теореманың дәлелденуі *III том 1-бөлімінің 2.3-тақырыбындағы* Коши критерийін дәлелдеу жолымен бірдей, тек x айнымалыны A нүктеге, a нүктені A_0 нүктеге, ал $|x - a|$ модулін $\rho(A, A_0)$ арақашықтығына алмастырсақ жеткілікті.

Тақырыптың соңында, көп айнымалы функцияның шегін есептеумен шектелейік. Ол үшін $u = f(x, y)$ екі айнымалы функцияны қарастырайық. A_0 нүктенің маңайында $u = f(x, y)$ функциясы берілсін, осы нүктенің өзінде функция анықталмауы да мүмкін. A_0 нүктенің маңайы $| x - x_0 | < d_1, | y - y_0 | < d_2$ тіктөртбұрыш болсын. Алдын ала тағайындалған y үшін $u = f(x, y)$ функцияның (x-ке тәуелді айнымалы функция) $x = x_0$ нүктедегі шегі бар болсын, яғни $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y = const}} f(x, y) = \varphi(y)$ және де $\varphi(y)$ функцияның да $y = y_0$ нүктеде шегі бар болсын, яғни $\lim\limits_{y \to y_0} \varphi(y) = b_1$. Онда бұл жағдайда $u = f(x, y)$ функцияның A_0 нүктедегі шегі b_1 санына тең дейміз және ол:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = b_1 \tag{8.3}$$

болып белгіленеді.

Осылайша, алдымен x-ті тағайындап y бойынша шекке көшіп, содан соң x бойынша шекке көшкендегі шектерді былай белгілейміз:

$$\lim_{\substack{y \to y_0 \\ x \to x_0}} f(x, y) = \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y) = b_2. \tag{8.4}$$

Демек, екі айнымалы функцияның шегі **қайталанған шек** деп аталатын шек арқылы есептеліне̧ді.

Жоғарыдағы (8.3) пен (8.4) қайталанған шектердің теңдігін қамтамасыз ететін жеткілікті белгіге тоқталайық.

8.6-теорема. $u = f(A)$ функция $A_0(x_0, y_0)$ нүктенің маңайында анықталып, осы нүктедегі шегі b санына тең және A_0 нүктенің маңайы $|x - x_0| < d_1$, $|y - y_0| < d_2$ тік төртбұрыш болсын. Егер тағайындалған кез келген x, $0 < |x - x_0| < d_1$ үшін $\lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) = \psi(x)$ шек бар болса және кез келген y, $0 < |y - y_0| < d_2$ үшін $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) = \varphi(x)$ шек бар болса, онда (8.3) пен (8.4) қайталанған шектер бар әрі олар b санына тең $(b_1 = b_2 = b)$, яғни $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) = \lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) = b$.

Дәлелдеуі. Теореманың шарты бойынша, $u = f(x, y)$ функцияның $A_0(x_0, y_0)$ нүктедегі шегі b-ге тең, онда функцияның $A_0(x_0, y_0)$ нүктедегі шегінің анықтамасынан: кез келген $\varepsilon > 0$ санына $\delta > 0$ саны табылып, $|f(x, y) - b| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалады. Демек, A_0 нүктенің тіктөртбұрышты $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$ маңайындағы нүктелерде $u = f(x, y)$ функцияның мәндері b санынан айырмашылығы ε-нан үлкен емес. Онда $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$ теңсіздіктерді қанағаттандыратын функцияның анықталу жиынындағы x, y үшін $\psi(x)$ пен $\varphi(y)$ функцияларының b санынан айырмашылығы ε-нан үлкен емес. Олай болса, $\psi(x)$ пен $\varphi(y)$ функцияларының сәйкес x_0 және y_0 нүктелердегі шектері бар әрі олар b санына тең. Теорема дәлелденді.

1-ескерту. Егер төмендегі қайталанған

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = b_1,$$

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y) = b_2$$

шектер бар болса, онда жалпы жағдайда $b_1 \neq b_2$ теңсіздігі орындалуы мүмкін (*4-мысалды қара*).

2-ескерту. *8.6-теореманың* кері теоремасы орындалмайды (*4-мысалды қара*).

3-ескерту. Қарастырып отырған нүктеде функция шегінің бар болуынан қайталанған шектің осы нүктедегі шегі бар болуы шықпайды және керісінше. Бұл жағдайларды төмендегі мысалдардан көруге болады.

Егер қайталанған шектер бар болып және олар тең болса, онда қарастырып отырған нүктеде функцияның шегі бар деп айтуға болмайды (*мысалдарды қара*).

1-мысал. $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$ функцияның

а) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=1,\quad \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=-1$ теңдіктері орындалатынын;

ә) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ шегі жоқ болатынын дәлелдейік.

Шешуі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x-y}{x+y}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{x}\right)=+1.\quad \lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-y}{x+y}\right)=\lim\limits_{y\to 0}\left(\dfrac{-y}{y}\right)=-1.$

ә) алдымен $n\to\infty$ болғанда $O(0,0)$-ге нүктеге ұмтылатын $\{x_n;y_n\}=\left\{\dfrac{1}{n};\dfrac{1}{n}\right\}$ және $\{x'_n;y'_n\}=\left\{\dfrac{2}{n};\dfrac{1}{n}\right\}$ нүктелер тізбегін қарастырайық.

Осы нүктелер тізбегіне сәйкес функцияның мәндер тізбегінің шектерін есептейік $n\to\infty$ болғанда:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n,y'_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{2}{n}+\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{3}{n}}=\frac{1}{3}.$$

Демек, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ шегі жоқ (Егер шек бар болса, онда ол тек біреу ғана болады).

2-мысал. $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ функция үшін

а) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$ теңдіктері орындалатынын;

ә) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ шегі жоқ болатынын дәлелдейік.

Шешуі. а) Алдымен мына шектерді есептейік:

$$\lim_{y\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=0,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=0,$$

яғни қайталанған шектердің теңдігі орындалады.

ә) Мына нүктелер тізбегін қарастырайық:

$$\{x_n, y_n\}=\left\{\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right\},\ \{x'_n, y'_n\}=\left\{\frac{1}{n};-\frac{1}{n}\right\}.$$

Егер $n\to\infty$ болғанда, олар $O(0,0)$ нүктеге ұмтылатынын оңай көз жеткізуге болады, ал осы нүктелердегі функция мәндерінің шегі әртүрлі шекке ұмтылады:

$$\lim_{n\to\infty} f(x,y)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n^2}+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n, y'_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n^2}+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)^2}=0.$$

Демек, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$-шек жоқ.

3-мысал. $f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ функцияның

а) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ және $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ шектері жоқ;

ә) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ шегі бар болатынын көрсетейік.

Шешуі. а) Егер $y\neq\frac{1}{n\pi}$ болса, онда $\left. y\sin\frac{1}{y}\right|\neq 0$, мұндағы $n=1,2,...$

Демек, $\{x_n\}=\left\{\frac{1}{n\pi}\right\}$ және $\{x'_n\}=\left\{\frac{2}{(4n+1)\pi}\right\}$ тізбектері $n\to\infty$ болғанда 0-ге ұмтылады, ал олардың сәйкес функция мәндерінің $\{f(x_n, y\}=\{0\}$, $\{f(x'_n, y\}= =\left\{y\sin\frac{1}{y}\right\}$ тізбектері әртүрлі шектерге ұмтылады. Сондықтан

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y)$$

шек жоқ. Олай болса, қайталанған екі шек те жоқ.

ә) Кез келген $x \neq 0$, $y \neq 0$ үшін

$$0 \leq \left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right| \leq |x+y| \leq |x|+|y|$$

теңсіздіктері орындалады. Онда $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} = 0$.

4-мысал. Мына шек бар ма: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{2xy}{x^2+y^2}$?

Шешуі. Алдымен төмендегі нүктелер тізбектерін қарастырайық: $\{x_n; y_n\} = \ = \left\{\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right\}$, $\{x'_n; y'_n\} = \left\{\frac{1}{n}; \frac{1}{n^2}\right\}$. Олар $n \to \infty$ болғанда $O(0,0)$ нүктеге жинақталады және оларға сәйкес функция мәндерінің тізбектері әртүрлі шекке ұмтылады:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = 1,$$

$$\lim_{n \to \infty} f(x'_n, y'_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{2}{n^3}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}} = 0.$$

Сонымен, берілген функцияның $O(0,0)$ нүктедегі шегі жоқ.

5-мысал. $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$ шекті есептейік.

Шешуі. Кез келген $x \neq 0, y \neq 0$ үшін

$$0 \leq \left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right| \leq \left|\frac{x+y}{xy}\right| < \frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|}.$$

теңсіздіктері орындалады. Осыдан:

$$0 \leq \lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right| \leq \lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|}\right) = 0, \quad \lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = 0.$$

6-мысал. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$ шегін есептейік.

Шешуі. $x^2+y^2 \geq 2xy$ теңсіздігінен $\dfrac{xy}{x^2+y^2} \leq \dfrac{1}{2}$. Онда

$$0 < \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}.$$

Осыдан $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2} = 0$. Демек $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} = 0$.

7-мысал. $\lim\limits_{x\to a}(\lim\limits_{y\to b} f(x,y))$ және $\lim\limits_{y\to b}(\lim\limits_{x\to a} f(x,y))$ шектерді есептейік, мұндағы

$$а)\ f(x,y) = \frac{x^y}{1+x^y},\ a=+\infty, b=+0;$$

$$ә)\ f(x,y) = \frac{1}{xy} tg\frac{xy}{1+xy},\ a=0, b=+\infty.$$

Шешуі. а) Егер $x = const$, онда барлық $y>0$ үшін x^y функциясы үзіліссіз, сондықтан: $\lim\limits_{y\to+0} x^y = 1$; ал егер $y>0$ тұрақты болса, онда барлық $x>0$ үшін x^y функциясы үзіліссіз, сондықтан: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^y = +\infty$. Осы шектерді пайдаланып, іздестіріп отырған шектерді есептейік:

а) $\lim\limits_{x\to a}(\lim\limits_{y\to b} f(x,y)) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\lim\limits_{y\to+0}\dfrac{x^y}{1+x^y}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$.

$$\lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x,y)) = \lim_{y\to+0}\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x^y}{1+x^y}\right) = \lim_{y\to+0}\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x^y}{x^y\left(\dfrac{1}{x^y}+1\right)}\right)$$

$$= \lim_{y\to+0}\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\dfrac{1}{x^y}+1}\right) = \lim_{y\to+0}(1) = 1.$$

ә) Егер $x \neq 0$ болса, онда:

$$\lim_{y\to\infty}\frac{xy}{1+xy}=\lim_{y\to\infty}\frac{xy}{xy\left(\frac{1}{yx}+1\right)}=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{yx}+1}=1\cdot$$

Осыдан және тангенс функцияның үзіліссіздігінен $\lim\limits_{y\to\infty}\frac{1}{xy}tg\frac{xy}{1+xy}=0$ болады. Енді $\lim\limits_{\alpha\to0}\frac{tg\alpha}{\alpha}=\lim\limits_{\alpha\to0}\frac{sin\alpha}{\alpha}\frac{1}{cos\alpha}=1$ теңдігін пайдаланып, $\lim\limits_{x\to0}f(x,y)$ шекті есептейік:

$$\lim_{x\to0}f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{1}{xy}tg\frac{xy}{1+xy}=\lim_{x\to0}\frac{tg\frac{xy}{1+xy}}{\frac{xy}{1+xy}}\frac{1}{1+xy}=1.$$

Жоғарыдағы теңдіктерді пайдаланып, іздестіріп отырған шектерді табайық:

$$\lim_{x\to a}(\lim_{y\to b}f(x,y))=\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to\infty}\frac{1}{xy}tg\frac{xy}{1+xy}\right)=\lim_{x\to0}(0)=0,$$

$$\lim_{y\to b}(\lim_{x\to a}f(x,y))=\lim_{y\to\infty}\left(\lim_{x\to0}\frac{1}{xy}tg\frac{xy}{1+xy}\right)=\lim_{y\to\infty}(1)=1.$$

8-мысал. Егер $x=\rho cos\varphi$, $y=\rho sin\varphi$ болғанда мына шек:

$$\lim_{\rho\to+0}e^{\frac{x}{x^2+y^2}}$$

φ-дің қандай мәндерінде бар болады?

Шешуі. Алдымен тікелей есептеуге көшейік:

$$\lim_{\rho\to+0}e^{\frac{x}{x^2+y^2}}=\lim_{\rho\to+0}e^{\frac{\rho cos\varphi}{\rho^2 cos^2\varphi+\rho^2 sin^2\varphi}}=\lim_{\rho\to+0}e^{\frac{cos\varphi}{\rho}}=\lim_{\substack{\rho\to0\\ \rho>0}}e^{\frac{cos\varphi}{\rho}}.$$

Соңғы шек бар болады, егер $cos\varphi\le0$, яғни $\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{3\pi}{2}$.

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Функцияның нүктедегі шегі.
2. Екі айнымалы функцияның қайталанған шегі.
3. Мына шек бар ма $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\frac{xy}{x^2+y^2}$?
4. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left(\frac{xy}{2x^2+4y^2}\right)^{x^2}$ шекті есептеңдер.

8.5. Көп айнымалы функцияның үзіліссіздігі

Евклид E кеңістіктегі $\{A\}$ жиынында анықталған m айнымалы $u = f(A)$ функцияны қарастырайық. A_0 нүкте E кеңістігіндегі $\{A\}$ жиынның нүктесі және оның ε маңайында A_0 нүктеден өзге $\{A\}$ жиынның нүктелері ғана тиісті болсын, яғни A_0 нүкте $\{A\}$ жиынның шектік нүктесі болады.

Анықтама. Егер функцияның A_0 нүктедегі шегі бар әрі ол функцияның $f(A_0)$ сандық мәніне тең болса, онда m айнымалы $u = f(A)$ **функция** A_0 **нүктеде үзіліссіз** деп аталады. A_0 нүкте $\{A\}$ жиынның шектік нүктесі болғандықтан, яғни $\lim\limits_{n \to \infty} A_n = A_0$ теңдік орындалатындықтан, функцияның A_0 нүктедегі үзіліссіздігін

$$\lim_{A \to A_0} f(A) = f(\lim_{A \to A_0} A) = f(A_0), \tag{8.5}$$

түрінде белгілеуге болады, мұндағы A нүкте – $\{A\}$ жиынның кез келген нүктесі.

(8.5) теңдік орындалмайтын E кеңістігінің нүктелері **функцияның үзілісті нүктелері** деп аталады.

Анықтама (Коши). Егер кез келген $\varepsilon > 0$ санына $\delta > 0$ саны табылып, $\rho(A, A_0) < \delta$ теңсіздікті қанағаттандыратын функцияның анықталу $\{A\}$ жиынындағы барлық A нүктелер үшін $|f(A) - f(A_0)| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда $u = f(A)$ функция A_0 **нүктеде үзіліссіз** деп аталады.

Анықтама (Гейне). Егер функцияның анықталу $\{A\}$ жиынындағы A_0 нүктеге жинақты $\{A_n\}$ нүктелер тізбегіне сәйкес функция мәндерінің $\{f(A_n)\}$ тізбегі $f(A)$ мәніне жинақты болса, онда $u = f(A)$ функция A_0 **нүктеде үзіліссіз** деп аталады.

Функция шегінің Коши анықтамасы функция үзіліссіздігінің Коши анқтамасынан айырмашылығы, соңғы анықтамада $\rho(A, A_0) > 0$ шарт қойылмаған, яғни $A \neq A_0$. $u = f(A)$ функция A нүктеде анықталған және $A = A_0$ болса, онда $|f(A) - f(A_0)| \leq \varepsilon$ теңсіздігі кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін орындалады.

Осы сияқты, функция шегінің Гейне анықтамасы функция үзіліссіздігінің Гейне анықтамасынан айырмашылығы, соңғы анықтамадағы $A \neq A_0$ шарт қойылмаған. Бұл шартқа жетуге болады, себебі функция A_0 нүктеде анықталған және де $f(A)$ мәнге жинақты $\{f(A)\}$ тізбекке кез келген мөлшерде жаңа $f(A)$ мәнді қосқаннан пайда болған тізбектің $f(A)$-ға жинақтылығы өзгермейді.

Егер $f(A)$ функциясы $\{A\}$ жиынының барлық нүктелерінде үзіліссіз болса, онда функция $\{A\}$ жиынында үзіліссіз болады.

Егер C_1 мен C_2 сандары табылып, барлық $A \in \{A\}$ үшін $C_1 \le f(A) \le C_2$ теңсіздік орындалса, онда $u = f(A)$ функция $\{A\}$ жиынында **шектелген (шенелген)** деп аталады.

Анықтама. A_0 нүктедегі $u = f(A)$ **функцияның толық өсімшесі** деп $f(A) - f(A_0)$ айырымын айтамыз және ол

$$\Delta u = f(A) - f(A_0) \tag{8.6}$$

таңбамен белгіленеді.

$a_1, a_2, ..., a_m$ және $x_1, x_2, ..., x_m$ сандары сәйкеес A_0 мен A нүктелердің координаттары, ал

$$\Delta x_1 = x_1 - a_1,\ \Delta x_2 = x_2 - a_2, ..., \Delta x_m = x_m - a_m$$

болсын. Онда $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функцияның $x_1, x_2, ..., x_m$ аргументтері сәйкес $\Delta x_1, \Delta x_2, ...,\ \Delta x_m$ өсімше алғанда (8.6) функцияның толық өсімшесін:

$$\Delta u = f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2, ..., a_m + \Delta x_m) - f(a_1, a_2, ..., a_m) \tag{8.7}$$

түрде жазуға болады.

Мына тұжырымға оңай көз жеткізуге болады: $u = f(A)$ **функция A_0 нүктеде үзіліссіз болу үшін функцияның Δu өсімшесі осы нүктеде шексіз аз шама болуы қажетті әрі жеткілікті, яғни функция аргументінің шексіз аз өсімшесіне функцияның шексіз аз өсімшесі сәйкес келсе:**

$$\lim_{A \to A_0} \Delta u = \lim_{A \to A_0} (f(A) - f(A_0)) = 0 \quad \text{немесе} \quad \lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0 \\ \dots \\ \Delta x_m \to 0}} \Delta u = 0 \tag{8.8}$$

Сонымен, функцияның A_0 нүктедегі үзіліссіздігінің $\lim\limits_{A \to A_0} f(A) = f(A_0)$ шарты (8.8) шартпен эквивалентті.

Көп айнымалы $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ фукнцияның аргументтерінің бірін айнымалы деп қабылдап, ал қалған айнымаларды тағайындап, осы функцияның нүктедегі үзіліссіздігі туралы түсінік берейік. Ол үшін $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функцияның $A(x_1, x_2, ..., x_m)$ нүктедегі дербес өсімшесі деп аталатын өсімшені қарастырайық, мұндағы A нүкте функцияның анықталу жиынындағы нүкте болсын.

Алдымен, функцияның x_1 аргументі Δx_1 өсімше алсын, ал қалған аргументтерін тағайындайық, бірақ координаттары $x_1+\Delta x_1, x_2,..., x_m$ болатын нүкте функцияның анықталу жиынына тиісті болатындай Δx_1 өсімшені аламыз. Осылайша анықталған өсімше **функцияның x_1 аргументі бойынша алынған дербес өсімше** деп аталады және ол $\Delta_{x_1} u$ таңбамен белгіленеді:

$$\Delta_{x_1} u = f(x_1+\Delta x_1, x_2,..., x_m) - f(x_1, x_2,..., x_m). \qquad (8.9)$$

Бұл жағдайда $\Delta_{x_1} u$ өсімше x_1-ге тәуелді бір айнымалы функция. Енді x_2 аргумент бойынша алынған дербес өсімшені анықтайық (x_2 – айнымалы, ал қалған аргументтерді тағайындаймыз):

$$\Delta_{x_2} u = f(x_1, x_2+\Delta x_2,..., x_m) - f(x_1, x_2,..., x_m).$$

Осылайша қалған аргументтер бойынша дербес өсімшелерді анықтаймыз:

$$\begin{cases} \Delta_{x_2} u = f(x_1, x_2, x_3+\Delta x_3,..., x_m) - f(x_1, x_2,..., x_m), \\ ... \qquad ... \qquad ... \qquad ... \\ \Delta_{x_m} u = f(x_1, x_2,..., x_m+\Delta x_m) - f(x_1, x_2,..., x_m). \end{cases} \qquad (8.10)$$

Енді көп айнымалы функцияның әрбір аргументі бойынша функция үзіліссіздігінің анықтамасын берейік.

Анықтама. Егер функцияның $A(x_1, x_2,..., x_m)$ нүктедегі $\Delta_{x_k} u$ дербес өсімшесі Δx_k өсімшеге тәуелді шексіз аз функция болса, $u = f(x_1, x_2,..., x_m)$ функциясы $A(x_1, x_2,..., x_m)$ нүктеде x_k **айнымалы бойынша үзіліссіз** деп аталады, яғни

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \Delta_{x_k} u = 0. \qquad (8.11)$$

Егер анықтамадағы $u = f(x_1, x_2,..., x_m)$ функция x_k айнымалыға ғана тәуелді, ал қалған айнымалар тағайындалған сан болса, онда бұл функцияның x_k айнымалы бойынша үзіліссіздігі туралы ұғым бір айнымалы функцияның үзіліссіздігі туралы ұғыммен бірдей. Сондықтан соңғы анықтамаға эквивалентті мына анықтаманы келтірейік: $u = f(x_1, x_2,..., x_m)$ функцияны $A(x_1, x_2,..., x_m)$ нүктеде x_k **айныма бойынша үзіліссіз** деп аталады, егер бір айнымалы $f(a_1, a_2,..., x_k,..., a_m)$ функция $x_k = a_k$ нүктеде үзіліссіз болса, мұндағы $f(a_1, a_2,..., x_k,..., a_m)$ функция x_k аргументке ғана тәуелді бір айнымалы функция.

Сонымен, көп айнымалы функцияның нүктедегі үзіліссіздігінің анықтамаларынан мынадай тұжырымға келеміз: **егер $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функция $A(x_1, x_2, ..., x_m)$ нүктеде үзіліссіз болса, онда функция осы нүктеде $x_1, x_2, ..., x_m$ айнымалыларының әрқайсысы бойынша үзіліссіз болады;** ал егер фунция $A(x_1, x_2, ..., x_m)$ нүктеде $x_1, x_2, ..., x_m$ айнымаларының әрқайсысы бойынша үзіліссіз болса, онда функция осы нүктеде үзіліссіз болады деп тұжырымдауға болмайды (*2-мысалды қара*).

Екі айнымалы функцияны үзіліссіздікке зерттегенде практикада жиі қолданылатын түзу бойындағы нүктедегі функция үзіліссіздігінің анықтамасын келтірейік.

Анықтама. Егер A нүктеге ұмтылатын осы түзудің бойында жатқан $\{A_n\}$ нүктелер тізбегіне сәйкес функция мәндер $\{f(A_n)\}$ тізбегінің шегі бар болып, ол шек A нүктедегі функцияның $f(A)$ мәніне тең болса, **түзу бойында жатқан A нүктеден өтетін**

$$u = f(x, y) = = f(A)$$

функция үзіліссіз деп аталады.

$u = f(x, y)$ функция түзудің бойында бір айнымалы функция болады, демек түзу бойындағы функцияның үзіліссіздігі туралы ұғым, жоғарыда айтылған бір айнымалы функцияның үзіліссіздігі туралы ұғыммен бірдей. Онда A нүктедегі функцияның x және y айнымалыларының әрқайсысы бойынша үзіліссіздігі, A нүкте арқылы өтетін және координат осьтеріне параллель болатын түзулердің бойындағы функция үзіліссіздігі болып табылады (*1-мысалды қара*).

1-мысал. Мына

$$u = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{2x^4 + y^4}, & x \neq 0, y \neq 0, \\ 0, & x = 0, \ y = 0. \end{cases}$$

функция үзіліссіз бола ма?

Шешуі. Функцияның анықталу жиыны бүкіл жазықтық. Берілген функция жазықтықтың $O(0,0)$ нүктесінен өзге нүктелерде үзіліссіз болатынын дәлелдейік. Ол үшін $O(0,0)$ нүктеден өзге жазықтықтың кез келген $A_0(x_0, y_0)$ нүктесін алайық және жазықтықтағы $A(x, y)$ нүкте $A_0(x_0, y_0)$ нүктеге ұмтылсын, онда

$$\lim_{A\to A_0} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\frac{x^3y}{2x^4+y^4}=\frac{\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right)^3 \lim\limits_{y\to y_0} y}{2\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right)^4+\left(\lim\limits_{y\to y_0} y\right)^4}=$$

$$=\frac{x_0^3 y_0}{2x_0^4+y_0^4}=f(x_0,y_0)=f(A_0).$$

Демек, $u=f(x,y)$ функция жазықтықтың $O(0,0)$ нүктеден өзге барлық нүктелерінде үзіліссіз. Енді функцияның $O(0,0)$ нүктеде үзілісті болатынын дәлелдейік. Ол үшін $A(x,y)$ нүктенің $O(0,0)$ нүктеге ұмтылғандағы функцияның шегін есептейік, яғни $x\to 0,\ y\to 0$ болғандағы функцияның шегінен $\frac{0}{0}$ анықталмағандығы шығады. Сондықтан функция шегінің тізбек тіліндегі Гейне анықтамасын пайдаланған тиімді. Ол үшін, $\left\{A_n\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}$ нүктелер тізбегін қарастырайық және тізбек $n\to\infty$ болғанда $O(0,0)$ нүктеге ұмтылады. Қарастырып отырған нүктелер тізбегіне сәйкес келетін $f(x,y)$ функция мәндерінің тізбегін қарастырайық:

$$\{f(A_n)\}=\left\{f\left(\frac{1}{n},\,0\right)\right\}=\left\{\frac{\frac{1}{n^3}\cdot 0}{\frac{2}{n^4}+0}\right\}=\{0\},$$

яғни $\{f(A)\}$ тізбегінің барлық элементтері нөлге тең, олай болса, оның шегі де нөлге тең.

Енді $O(0,0)$ нүктеге жинақты болатын $\left\{A_n\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}$ тізбектен өзге $\left\{A'_n\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}$ нүктелер тізбегін қарастырайық, онда:

$$\{f(A'_n)\}=\left\{f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}=\left\{\frac{\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{2}{n^4}+\frac{1}{n^4}}\right\}=\left\{\frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{3}{n^4}}\right\}=\left\{\frac{1}{3}\right\},$$

яғни $\{f(A'_n)\}$ тізбегінің барлық элементтері $\frac{1}{3}$-ке тең, олай болса, $\{f(A'_n)\}$ тізбектің де шегі $\frac{1}{3}$-ке тең. Сонымен, $O(0,0)$ нүктеге ұмтылатын әртүрлі $\left\{A_n\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}$ мен $\left\{A_n'\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}$ нүктелер тізбектеріне сәйкес келетін $\{f(A)\}$ мен $\{f(A_n')\}$ функция мәндер тізбектерінің шектері бар әрі олар әртүрлі (тең емес). Бірінші тізбек үшін Ox осі бойымен, ал екінші тізбек үшін бірінші шектегі биссектриса $(y=x,\ x>0)$ бойымен $O(0,0)$ нүктеге ұмтылады. Сондықтан $\lim\limits_{A\to A_0} f(A)=f(A_0)$ теңдігі орындалмайды, себебі теңдіктің сол жағындағы шек жоқ. Демек, қарастырып отырған функция $O(0,0)$ нүктеден өзге жазықтықтың барлық нүктелерінде үзіліссіз, ал $O(0,0)$ нүктеде үзілісті болады.

2-мысал. Мына функция

$$u=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x=0,y=0\end{cases}$$

$O(0,0)$ нүктеде x және y айнымаларының әрқайсысы бойынша үзіліссіз, ал осы нүктеде функция үзілісті болатынын дәлелдейік.

Шешуі. Функцияның $O(0,0)$ нүктедегі x аргументі бойынша алынған дербес өсімшесін қарастырайық, яғни x аргумент Δx өсімше қабылдасын:

$\Delta_x u = f(\Delta x,0)-f(0,0)=0-0=0$. Олай болса, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta_x u=0$, яғни $f(x,y)$ функция x аргументі бойынша $O(0,0)$ нүктеде үзіліссіз. Осы сияқты $\Delta_y u = f(0,\Delta y)-f(0,0)=0$. Сонымен, функция $O(0,0)$ нүктеде x және y аргументтерінің әрқайсысы бойынша үзіліссіз болады.

Енді функцияның $O(0,0)$ нүктеде үзілісті болатынын дәлелдейік. Ол үшін *8.4-тақырыптағы 4-мысалды ескерсек*, функцияның $O(0,0)$ нүктедегі $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ шегі жоқ. Олай болса, функция $O(0,0)$ нүктеде үзілісті.

3-мысал. Мына функция

$$u=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^4+y^2\neq 0,\\ 0, & x^4+y^2=0\end{cases}$$

$O(0,0)$ нүктеде өтетін $x = t\cos\alpha$, $y = t\sin\alpha$, $t \in [0, +\infty)$ сәуленің әрқайсысының бойында үзіліссіз, яғни

$$\lim_{t\to 0} f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = f(0,0),$$

бірақ $O(0,0)$ нүктеде үзілісті болатынын дәлелдейік.

Шешуі. $\alpha = \dfrac{k\pi}{2}$ мәндерінде $f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) \equiv 0$ болады, сондықтан α -ның осы мәндерінде $(k = 0,1,2,...)$:

$$\lim_{t\to 0} f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2\cos^2\alpha \cdot t\sin\alpha}{t^4\cos^4\alpha + t^2\sin^2\alpha} = \lim_{t\to 0} \frac{t\cos^2\alpha \cdot \sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha + \sin^2\alpha} = 0 = f(0,0).$$

Егер $0 < \alpha < 2\pi$, $\alpha \neq \dfrac{k\pi}{2}$, онда $t^2\cos^4\alpha + \sin^2\alpha > 0$ және $\lim\limits_{t\to\infty}\left(t^2\cos^4\alpha + +\sin^2\alpha\right) = \sin^2\alpha > 0$. Олай болса,

$$\lim_{t\to 0} \frac{t\cos^2\alpha \cdot \sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha + \sin^2\alpha} = 0 = f(0,0).$$

Сонымен, $u = f(x,y)$ функциясы $O(0,0)$ нүктеден өтетін сәуленің әрқайсысының бойында үзіліссіз болады.

Енді функцияның $O(0,0)$ нүктеде үзілісті болатынын дәлелдейік, ол үшін $n \to \infty$ болғанда $O(0,0)$ нүктеге жинақталатын $\{A_n\} = \left\{\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n^2}\right\}$ тізбекті қарастырайық. Сонда:

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{2}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq f(0,0).$$

Олай болса, функция $O(0,0)$ нүктеде үзілісті.

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Түзудің бойында жатқан A нүктеден өтетін $u = f(x,y) = f(A)$ функция үзіліссіздігінің анықтамасы.
2. Функцияның нүктедегі үзіліссіздігі және үзілісті нүкте.
3. Функцияның нүктедегі толық өсімшесі.
4. $u = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{3x^4 + 7y^4}, & x \neq 0, y \neq 0, \\ 0, & x = 0, \ y = 0. \end{cases}$

функция үзіліссіз бола ма?

$$5. \quad u=\begin{cases}\dfrac{xy}{2x^2+4y^2}, & x\neq 0,\ y\neq 0,\\ 0, & x=0,\ y=0.\end{cases}$$

функция үзіліссіз бола ма?

$$6. \quad u=\begin{cases}\dfrac{3x^2y^2}{2x^4+4y^4}, & x\neq 0,\ y\neq 0,\\ 0, & x=0,\ y=0.\end{cases}$$

функция үзіліссіз бола ма?

8.6. Көп айнымалы функцияның үзіліссіздігінің қасиеттері. Бірқалыпты үзіліссіздік

Біз бұл тақырыпта, *III томның 1-бөлімінде* ([1]) қарастырылған бір айнымалы функцияның үзіліссіздігінің қасиеттерін көп айнымалы функция үшін қарастырамыз. Ол қасиеттер көп айнымалы функцияға да орындалатын болғандықтан кейбір теоремалардың дәлелдеуін оқырмандарға ұсынамыз.

$\{A\}$ жиынында анықталған үзіліссіз функцияларға орындалатын арифметикалық амалдарды қарастырайық.

8.7-теорема. Егер $f(A)$ мен $\varphi(A)$ функциялары $A_0(a_1,a_2,...,a)$ нүктеде үзіліссіз болса, онда $c\cdot f(A)$, $f(A)\pm\varphi(A)$, $f(A)\cdot\varphi(A)$, $\dfrac{f(A)}{\varphi(A)}$ $(\varphi(A)\neq 0)$ функциялары да осы нүктеде үзіліссіз болады.

Дәлелдеуін ([1]) *2-қасиетті қара.*

Күрделі функция үзіліссіздігінің теоремасын келтірейік. Ол үшін көп айнымалы күрделі функцияның ұғымын берейік. Бізге

$$\begin{cases}x_1=\varphi_1(t_1,t_2,...,t_k),\\ x_2=\varphi_2(t_1,t_2,...,t_k),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ x_m=\varphi_m(t_1,t_2,...,t_k)\end{cases} \tag{8.12}$$

функциялары евклид E^k кеңістігінің $\{N\}$ жиынында берілсін, мұндағы $t_1,\ t_2,...,t_k$ кеңістіктегі нүктенің координаттары. Онда $\{N\}$ жиынындағы әрбір $N(t_1,t_2,...,t_k)$ нүктеге (8.12) формула арқылы евклид E кеңістігінен $A(x_1,x_2,...,x_m)$ нүкте сәйкес қойылады, осындай нүктелердің жиынын $\{A\}$ деп белгілейік. Бұл жағдайда, евклид E^k кеңістігінің $\{N\}$ жиынында анықталған күрделі

$u = f(x_1, x_2, ..., x_m) = f(\varphi_1(t_1, t_2, ..., t_m), \varphi_2(t_1, t_2, ..., t_k), ..., \varphi_m(t_1, t_2, ..., t_k))$ функциясы берілді дейміз, мұндағы $x_1, x_2, ..., x_m$ айнымалары $t_1, t_2, ..., t_k$ айнымаларына тәуелді функция және де олар (8.12.) формула арқылы анықталады.

8.8-теорема. (8.12) функциялары $A_0(a_1, a_2, ..., a_k)$ нүктеде үзіліссіз, ал $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функция $B(b_1, b_2, ..., b_m)$ нүктеде үзіліссіз болсын, мұндағы $b_i = \varphi_i(a_1, a_2, ..., a_k)$, $i = \overline{1,m}$, онда күрделі $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функция да $A_0(a_1, a_2, ..., a_k)$ нүктеде үзіліссіз болады, мұндағы $x_1, x_2, ..., x_m$ (8.12) формуладан анықталған $t_1, t_2, ..., t_k$ айнымалыларға тәуелді функция.

Дәлелдеуі. Дәлелдеу үшін, $\{N\}$ жиынынан A_0 нүктеге жинақталатын әрі $\varphi_i(t_1, t_2, ..., t_k)$ функциялары анықталатын $\{N_n\}$ нүктелер тізбегін қарастырайық, мұндағы $A_0 \neq N_n = (t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, ..., t_k^{(n)})$, ал $\{A_n\}$ нүктелер тізбегінің $x_i^{(n)}$ координаттары сәйкес $\varphi_i(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, ..., t_k^{(n)})$ функцияларына тең болсын, яғни $x_i^{(n)} = \varphi_i(N_n) = \varphi_i(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, ..., t_k^{(n)})$, $i = \overline{1,m}$. Теореманың шарты бойынша, φ_i функциялары A_0 нүктеде үзіліссіз және $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функция B нүктеде үзіліссіз, онда үзіліссіздіктің Гейне анықтамасы бойынша $\{A_n\}$ тізбегі $B(b_1, b_2, ..., b_m)$ нүктеге жинақты, мұнда A_n нүкте B нүктеге тең болуы да мүмкін және $\{f(A_n)\}$ тізбегі $f(A_0)$ санына жинақталады. Онда $\{f(\varphi_1(N_n), \varphi_2(N_n)), ..., \varphi_m(N_n))\}$ күрделі мәндер тізбегі $f(\varphi_1(A_0), (\varphi_2(A_0), ..., \varphi_m(A_0))$ күрделі мәнге жинақталады, демек күрделі $u = f(\varphi_1(t_1, t_2, ..., t_m), \varphi_2(t_1, t_2, ..., t_k), ..., \varphi_m(t_1, t_2, ..., t_k))$ функция $A_0(a_1, a_2, ..., a_k)$ нүктеде үзіліссіз болады. Теорема дәлелденді.

8.9-теорема (үзіліссіз функцияның таңбасының тұрақтылығы туралы). Егер евклид E кеңістігінің A_0 нүктесінде $u = f(A)$ функция үзіліссіз және $f(A_0) \neq 0$ болса, онда A_0 нүктесінің δ аймағы табылып, осы аймақта $u = f(A)$ нөлге тең емес әрі оның таңбасы $u = f(A)$-ның таңбасымен бірдей болады.

Дәлелдеуі. Дәлелдеу үшін $u = f(A)$ функцияның A_0 нүктедегі үзіліссіздігінің Коши анықтамасын пайдаланайық. Анықтама бойынша, кез келген $\varepsilon > 0$ санына $\delta > 0$ саны табылып, A_0 нүктенің δ маңайында $f(A_0)-\varepsilon < f(A) < \ < f(A_0)+\varepsilon$ теңсіздігі орындалады. Егер осы теңсіздіктегі $\varepsilon > 0$ саны ретінде $\frac{|f(A_0)|}{2}$ оң санын алсақ, онда $f(A_0)-\varepsilon, f(A_0)$ және $f(A_0)+\varepsilon$ сандарының таңбалары бірдей болады, сондықтан A_0 нүктенің δ маңайында $f(A_0)$-дің таңбасы қандай болса $f(A)$-ның да таңбасы сондай болады. Теорема дәлелденді.

8.10-теорема (үзіліссіз функцияның аралық мәндері туралы). Евклид E кеңістігіндегі байланысты $\{A\}$ жиынының барлық нүктелерінде $u = f(A)$ функция үзіліссіз және $\{A\}$ жиынындағы A_0 мен B_0 нүктелеріндегі мәні $f(A_0)$, $f(B_0)$ болсын. Егер C саны $f(A_0)$ мен $f(B_0)$ сандарының арасындағы кез келген сан болса, онда A_0 мен B_0 нүктелерді қосатын әрі $\{A\}$ жиынында толық жататын үзіліссіз L қисық сызығының бойынан N нүкте табылып, $f(N)=C$ теңдігі орындалады.

Дәлелдеуі. $\{A\}$ жиынындағы A_0 мен B_0 нүктелерді қосатын үзіліссіз L қисық сызық параметр теңдеулермен берілсін: $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t)$, $x_m = \varphi_m(t)$, мұндағы $t \in [\alpha, \beta]$ сегментте күрделі $u = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ \ldots, \varphi_m(t))$ функциясы анықталған, мұндағы $\varphi_i(t) = x_i$, $i = \overline{1,m}$, $t \in [\alpha, \beta]$. Күрделі функцияның $[\alpha, \beta]$ сегменттегі мәндері L сызық бойындағы $u = f(A)$ функциясының мәндерімен бірдей. *8.8-теорема* бойынша, t-ға тәуелді бір айнымалы күрделі функция $[\alpha, \beta]$ сегментте үзіліссіз болады және *III томдағы* ([1]) Больцано-Кошидің екінші теоремасынан сегменттің ξ нүктесінде C мәнін қабылдайды. Сондықтан L қисық сызығының $N(\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi), \ldots, \varphi_m(\xi))$ нүктесінде $f(N)=C$ теңдігі орындалады. Теорема дәлелденді.

8.11-теорема (Вейерштрастың бірінші теоремасы). Егер шектелген (шенелген) және тұйық $\{A\}$ жиынында $u = f(A)$ функциясы үзіліссіз болса, онда функция осы жиында шектелген (шенелген).

Дәлелдеуі. Кері жориық, ол үшін $\{A\}$ жиынынан $|f(A_n)| > n$ теңсіздігі орындалатын $\{A_n\}$ нүктелер тізбегін бөліп алайық. $\{A_n\}$ тізбектен Больцано-Вейерштрасс (*8.2-теорема*) теоремасы бойынша жинақты $\{A_{k_n}\}$ тізбекше бөліп алуға болады және ол жинақты тізбекшенің A_0 шегі $\{A\}$ жиынына тиісті. Демек, $\{f(A_{k_n})\}$

тізбегі шексіз үлкен тізбек, ал $u = f(A)$ функция A нүктеде үзіліссіз болғандықтан $\{f(A_{k_n})\}$ тізбегі $f(A_0)$-ге жинақты болуы керек. Осы қайшылық теореманы дәледейді.

Вейерштрастың екінші теоремасын келтірмес бұрын функцияның ең жоғарғы және ең төменгі шекарасы туралы ұғым алайық (*II-9.9-тақырып*).

Анықтама.$\{A\}$ жиынындағы $u = f(A)$ функцияның **ең жоғарғы (ең төменгі) шекарасы** деп мына шарттарды қанағаттандыратын $\bar{u}$ $(\underline{u})$ санын айтамыз:

1) $\{A\}$ жиынының кез келген A нүктесі үшін $f(A) \le \bar{u}$ $(f(A) \ge \underline{u})$ теңсіздігі орындалса;

2) Кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $\{A\}$ жиынынан, кем дегенде бір A нүкте табылып, $f(A) > \bar{u} - \varepsilon$ $(f(A) < \underline{u} + \varepsilon)$ теңсіздігі орындалса және ол $\bar{u} = = \sup\limits_{\{A\}} f(A) \left(\underline{u} = \inf\limits_{\{A\}} f(A) \right)$ таңбамен белгіленеді.

8.12-теорема (Вейерштрастың екінші теоремасы). Егер шектелген тұйық $\{A\}$ жиынында $u = f(A)$ функциясы үзіліссіз болса, онда функция осы жиында өзінің ең жоғарғы және ең төменгі шекара мәндерін қабылдайды.

Дәлелдеуін жаттығу ретінде оқырмандарға ұсынамыз ([1], *2.9-тақырып*, Вейерштрастың екінші теоремасы).

Енді көп айнымалы функцияның бірқалыпты үзіліссіздігін қарастырайық. $u = f(A)$ функциясы $\{A\}$ жиынында анықталсын және $\{A\}$ жиынының кез келген нүктесі оның шектік нүктесі болсын.

Анықтама. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ санына $\delta(\varepsilon)$ саны табылып, $\rho(A', A'') < \delta(\varepsilon)$ теңсіздігін қанағаттандыратын $\{A\}$ жиынындағы кез келген A' пен A'' нүктелер үшін $|f(A'') - f(A')| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, евклид E кеңістігінің $\{A\}$ жиынындағы $u = f(A)$ функция **бірқалыпты үзіліссіз** деп аталады.

8.13-теорема (Кантор). Егер $u = f(A)$ функциясы тұйық және шектелген $\{A\}$ жиынында үзіліссіз болса, онда ол осы жиында бірқалыпты үзіліссіз болады.

Дәлелдеуі. *III-томның* ([1]) *2.12-тақырыбындағы* теоремадағыдай дәлелденеді, ондағы $[a,b]$ сегментті $\{A\}$ жиынымен, x айнымалыны A нүктесімен, ал $|x'' - x'|$ модулін $\rho(A'', A')$ арақашықтықпен алмастырсақ жеткілікті.

1-ескерту. Бірқалыпты үзіліссіз функция үзіліссіз болады, ал үзіліссіз функция бірқалыпты үзіліссіз болмауы мүмкін. Демек, егер функция бірқалыпты үзіліссіз болса, онда функция аргументінің аз өсімшесіне сәйкес функцияның аз өсімшесі сәйкес келеді, ал егер функция үзіліссіз болса, онда жиындағы нүктеден нүктеге (осы жиындағы) көшкенде функция аз өсімше қабылдамауы мүмкін.

2-ескерту. Вейерштрастың екі және Кантор теоремалары тұйық және шектелген жиындардағы функция үшін орындалады. Демек, көп өлшемді жағдайда сегмент тұйық әрі шектелген жиын болады.

3-ескерту. $u = f(A)$ функциясының жазықтықтың барлық нүктелерінде бірқалыпты үзіліссіз болатынын Кантор теоремасын пайдаланып, дәлелдеуге болмайды. Себебі жазықтық шектелмеген жиын, олай болса, шектелмеген жиынға Кантор теоремасын қолдануға болмайды.

Анықтама. Шектелген $\{A\}$ **жиынның диаметрі** деп $\rho(A'', A')$ сандарының ең жоғарғы шекарасын айтамыз, мұндағы A' пен A'' нүктелері – $\{A\}$ жиынындағы мүмкін болатын барлық нүктелер.

Осы анықтаманы, тұйық және шектелген жиындағы функцияның төмендегі қасиетін келтірейік.

8.14-теорема. Егер $u = f(A)$ функция тұйық және шектелген $\{A\}$ жиында үзіліссіз болса, онда кез келген $\varepsilon > 0$ санына $\delta > 0$ саны табылып, $\{A\}$ жиынындағы диаметрі δ санынан кіші болатын әрбір тұйық $\{N\}$ жиыншада $f(A)$ функцияның ω тербелісі ε-нан кіші, мұндағы $\omega = \overline{u} - \underline{u}$, $\overline{u} = \sup\limits_{\{N\}} f(A)$, $\underline{u} = \inf\limits_{\{N\}} f(A)$.

1-мысал. $f(x, y) = 2x - 3y + 5$ функциясы $\{A\} = \{x, y : |x| < +\infty, |y| < +\infty\}$ жазықтығында бірқалыпты үзіліссіз болатынын дәлелдейік.

Шешуі. Берілген жазықтықтың кез келген $A_1(x_1, y_1)$ мен $A_2(x_2, y_2)$ нүктелері үшін

$$\begin{aligned}|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| &= |2x_1 - 3y_1 + 5 - 2x_2 + 3y_2 - 5| = \\ &= |2(x_1 - x_2) - 3(y_1 - y_2)| \le 2|x_1 - x_2| + 3|y_1 - y_2|\end{aligned}$$

теңсіздігі орындалады. Енді $\varepsilon > 0$ санын таңдап алайық, онда $|x_1 - x_2| < \frac{\varepsilon}{6} = \delta$, $|y_1 - y_2| < \frac{\varepsilon}{6} = \delta$ теңсіздіктері үшін мына теңсіздік орындалады:

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<2\frac{\varepsilon}{6}+3\frac{\varepsilon}{6}<\varepsilon.$$

Осыдан және бірқалыпты үзіліссіздіктің анықтамасынан $f(x,y)$ функция $\{A\}$ жазықтықта бірқалыпты үзіліссіз болады.

2-мысал. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ функциясы $\{A\}=\{x,y:|x|<+\infty,|y|<+\infty\}$ жазықтығында бірқалыпты үзіліссіз болатынын дәлелдейік.

Шешуі. Кез келген $\varepsilon>0$ саны үшін $\{A\}$ жазықтықтың кез келген $A_1(x_1,y_1)$ мен $A_2(x_2,y_2)$ нүктелер үшін мына теңсіздік орындалады:

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|=\left|\sqrt{x_1^2+y_1^2}-\sqrt{x_2^2+y_2^2}\right|\le$$

$$\le\frac{\left(\sqrt{x_1^2+y_1^2}-\sqrt{x_2^2+y_2^2}\right)\left(\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}\right)}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}}=$$

$$=\frac{x_1^2+y_1^2-\left(x_2^2+y_2^2\right)}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}}=\frac{\left|\left(x_1^2-x_2^2\right)+\left(y_1^2-y_2^2\right)\right|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}}=$$

$$=\frac{|(x_1-x_2)(x_1+x_2)+(y_1-y_2)(y_1+y_2)|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}}\le$$

$$\le\frac{|x_1-x_2|\cdot|x_1+x_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}}+\frac{|y_1-y_2|\cdot|y_1+y_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}}\le$$

$$\le|x_1-x_2|\frac{|x_1|+|x_2|}{\sqrt{x_1^2}+\sqrt{x_2^2}}+|y_1-y_2|\frac{|y_1|+|y_2|}{\sqrt{y_1^2}+\sqrt{y_2^2}}=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|.$$

Енді кез келген $\varepsilon>0$ саны үшін $|x_1-x_2|<\delta=\frac{\varepsilon}{2}$, $|y_1-y_2|<\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ болсын, онда $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\le|x_1-x_1|+|y_1-y_2|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

Осыдан және бірқалыпты үзіліссіздіктің анықтамасынан, $\{A\}$ жазықтығында берілген функцияның бірқалыпты үзіліссіздігі шығады.

3-мысал. $f(x,y)=sin\frac{\pi}{1-x^2-y^2}$ функциясы $x^2+y^2<1$ жиынында бірқалыпты үзіліссіз бола ма?

Шешуі. Функция аргументінің бөліміндегі $1-x^2-y^2$ көпмүшелік $x^2+\ +y^2<1$ жиынындағы x пен y-тің барлық мәндерінде үзіліссіз. Енді $x^2+\ +y^2<1$ теңсіздігін қанағаттандыратын екі нүктелер тізбегін алайық:

$$\{A_n(x_n, y_n)\} = \left\{\sqrt{1-\frac{1}{2n}\cos\alpha}; \sqrt{1-\frac{1}{2n}\sin\alpha}\right\},$$

$$\{A_n'(x_n, y_n)\} = \left\{\sqrt{1-\frac{2}{1+4n}\cos\alpha}; \sqrt{1-\frac{2}{1+4n}\sin\alpha}\right\},$$

$$n = 1, 2, \ldots, \quad 0 \le \alpha \le 2\pi.$$

Онда

$$\rho(A_n, A_n') = \sqrt{(x_n - x_n')^2 + (y_n - y_n')^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{1-\frac{1}{2n}}\cos\alpha - \sqrt{1-\frac{2}{1+4n}}\cos\alpha\right)^2 + \left(\sqrt{1-\frac{1}{2n}}\sin\alpha - \sqrt{1-\frac{2}{1+4n}}\sin\alpha\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\cos^2\alpha\left(\sqrt{1-\frac{1}{2n}} - \sqrt{1-\frac{2}{1+4n}}\right)^2 + \sin^2\alpha\left(\sqrt{1-\frac{1}{2n}} - \sqrt{1-\frac{2}{1+4n}}\right)^2} =$$

$$= \left|\sqrt{1-\frac{1}{2n}} - \sqrt{1-\frac{2}{1+4n}}\right|.$$

Онда $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(A_n, A_n') = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\sqrt{1-\frac{1}{2n}} - \sqrt{1-\frac{1}{1+4n}}\right| = 0$. Ал барлық n үшін мына теңдік орындалады:

$$|f(A_n) - f(A_n')| = \left|\sin\frac{\pi}{1-\left(1-\frac{1}{2n}\right)\cos^2\alpha - \left(1-\frac{1}{2n}\right)\sin^2\alpha} - \right.$$

$$\left. = \sin\frac{\pi}{1-\left(1-\frac{2}{1+4n}\right)\cos^2\alpha - \left(1-\frac{2}{1+4n}\right)\sin^2\alpha}\right| =$$

$$= \left|\sin 2n\pi - \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right| = |\sin 2n\pi - \cos 2n\pi| = 1.$$

Сондықтан $\varepsilon \in (0,1)$ санына бірқалыпты үзіліссіздіктің анықтамасындағы δ саны табылмайды, демек берілген функция бірқалыпты үзіліссіз бола алмайды.

4-мысал. $f(x, y) = \arcsin\frac{x}{y}$ функциясы өзінің $\{A\}$-анықталу жиынында үзіліссіз бола ала ма? Функция $\{A\}$ жиынында бірқалыпты үзіліссіз бола ма?

Шешуі. Функцияның анықталу жиыны $|x| \le |y|$, $y \ne 0$ теңсіздіктерді қанағаттандырады және осы жиында үзіліссіз. Бірақ берілген функция бірқалыпты үзіліссіз бола алмайды. Шынында да, функцияның анықталу жиынынан $\left\{A_n\left(\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right)\right\}$, $\left\{A_n'\left(\frac{1}{n};-\frac{1}{n}\right)\right\}$ нүктелер тізбегін қарастырайық $(n=1,2,...)$. Онда:

$$\rho(A_n,A_n')=\sqrt{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)^2}=\frac{2}{n}.$$

Осыдан $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(A_n,A_n')=0$. Осы нүктелердегі функциялардың мәндерінің арақашықтығын есептейік:

$$|f(A_n)-f(A_n')|=\left|arcsin\left(\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)-arcsin\left(\frac{\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}}\right)\right|=$$

$$=|arcsin\,1-arcsin(-1)|=2\,arcsin\,1=\pi,$$

яғни ол арақашықтық π-ден кіші болуы мүмкін емес. Сонымен, функция бірқалыпты үзіліссіз бола алмайды.

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. $f(x,y)=sin\dfrac{\pi}{4-x^2-y^2}$ функциясы $x^2+y^2<4$ жиынында бірқалыпты үзіліссіз бола ма?

2. $f(x,y)=sin\dfrac{\pi}{16-x^2-y^2}$ функциясы $x^2+y^2<16$ жиынында бірқалыпты үзіліссіз бола ма?

3. $f(x,y)=arcsin\dfrac{y+1}{x}$ функциясы өзінің $\{A\}$-анықталу жиынында үзіліссіз, функция $\{A\}$ жиынында бірқалыпты үзіліссіз бола ма?

8.7. Көп айнымалы функцияның дербес туындылары. Функцияның дифференциалдану белгісі

$A(x_1,x_2,...,x_m)$ нүкте $u=f(x_1,x_2,...,x_m)$ функцияның анықталу жиынының ішкі нүктесі болсын және функцияның x_k аргументіне Δx_k өсімше берейік, сонда $A(x_1,x_2,...,x_{k-1},x_k+\Delta x_k,x_{k+1},...,x_m)$ нүкте функцияның анықталу жиынына тиісті болсын. Функция аргументінің Δx_k өсімшесі мен осы өсімшеге сәйкес келетін функцияның $\Delta_{x_k}u$ өсімшесі арасындағы мына қатынасты қарастырайық:

$$\frac{\Delta x_k u}{\Delta x_k}=\frac{f(x_1,x_2,...,x_{k-1},x_k+\Delta x_k,x_{k+1},...,x_m)-f(x_1,x_2,...,x_m)}{\Delta x_k} \tag{8.13}$$

Анықтама. Егер (8.13) қатынастың $\Delta x_k \to 0$ болғандағы шегі бар болса, онда ол шек $u=f(x_1,x_2,...,x_m)$ функциядан x_k айнымалы бойынша алынған $A(x_1,x_2,...,x_m)$ нүктедегі **бірінші ретті** (қысқаша бірінші) **дербес туынды** деп аталады және ол мына таңбалардың бірімен белгіленеді:

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}(A)=\frac{\partial u}{\partial x_k}(x_1,x_2,...,x_m)=\frac{\partial u}{\partial x_k},\ \frac{\partial f}{\partial x_k},\ u'_{x_k},\ f'_{x_k},$$

$$\lim_{\Delta x_k\to 0}\frac{\Delta_{x_k}u}{\Delta x_k}=\frac{\partial u}{\partial x_k}(x_1,x_2,...,x_m)=\frac{\partial u}{\partial x_k}(A). \tag{8.14}$$

$\frac{\partial u}{\partial x_k}(A)$ дербес туындының физикалық мағынасы, Ox_k осінің бағыты бойындағы A нүктедегі функцияның өзгеру жылдамдығы болады.

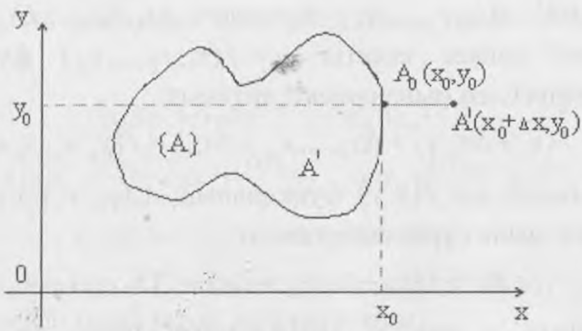
Екі айнымалы $u=f(A)$ функцияның $A(x,y)$ нүктедегі дербес туындылары мына түрде белгіленеді:

$$u'_x=\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x},$$

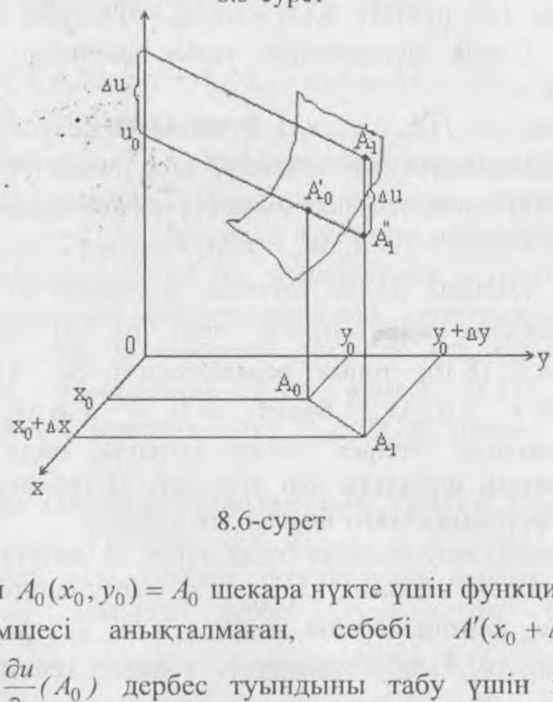
$$u'_y=\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_y u}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}.$$

$u=f(x_1,x_2,...,x_m)$ функцияның дербес туындысын табу үшін, бізге белгілі бір айнымалы функциядағыдай туынды табу ережелерін пайдалану керек, мысалы, x_k айныма бойынша дербес туынды табу үшін, x_k айнымалыдан өзге айнымалыларды тұрақты сан деп қарастырамыз, сонда $u=f(x_1,x_2,...,x_m)$ функция x_k-ға тәуелді бір айнымалы функция болады, енді осы функциядан бізге белгілі ережелерді пайдаланып, x_k айныма бойынша туынды тапсақ жеткілікті.

Жоғарыда келтірілген дербес туындының анықтамасын функцияның анықталу жиынындағы ішкі нүкте үшін ғана пайдалануға болады, ал бұл анықтаманы анықталу жиынының шекаралық үшін қолдануға болмайды, себебі жалпы жағдайда шекаралық нүктедегі функция өсімшесін есептей алмаймыз. Сондықтан функцияның дербес туындысын шекарадағы $A_0(x_0,y_0)$ нүктеде табу үшін функцияның анықталу жиынындағы $A(x,y)$ нүктеден дербес туынды тауып, осы туындыдан $A\to A_0$ болғандағы шекті тапсақ жеткілікті. Мысалы (*8.5-сурет*), $u=f(x,y)$ функция $\{A\}$



8.5-сурет



8.6-сурет

жиынындағы $A_0(x_0, y_0) = A_0$ шекара нүкте үшін функцияның $\Delta_x u$ дербес өсімшесі анықталмаған, себебі $A'(x_0+\Delta x, y_0) \notin \{A\}$. Сондықтан $\frac{\partial u}{\partial x}(A_0)$ дербес туындыны табу үшін жоғарыдағы анықтаманы пайдалануға болмайды. Бұл жағдайда, егер $\{A\}$ жиынның ішкі A нүктесінде $\frac{\partial u}{\partial x}(A)$ дербес туындысы бар болса, онда A_0 нүктедегі функцияның дербес туындысын табу үшін $\{A\}$ нүктедегі дербес туындысынан шекке көшу керек:

$$\lim_{A\to A_0} \frac{\partial u}{\partial x}(A) = \frac{\partial u}{\partial x}(A_0).$$

Анықтама. $A(x_1, x_2,..., x_m)$ нүктедегі $\Delta x_1, \Delta x_2,..., \Delta x_m$ аргумент өсімшелеріне сәйкес келетін $u = f(x_1, x_2,..., x_m)$ **функцияның толық өсімшесі** деп мына өрнекті айтамыз:

$$\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2,..., x_m + \Delta x_m) - f(x_1, x_2,..., x_m) \quad (8.15)$$

Екі айнымалы $u = f(x, y)$ функцияның $A_0(x_0, y_0)$ нүктедегі толық өсімшесі мына түрде анықталады:

$$\Delta u = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

Функцияның x пен y айнымалары сәйкес $\Delta x, \Delta y$ өсімше алғанда $A_0(x_0, y_0)$ нүктеге $A_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ нүкте сәйкес келеді (*8.6-сурет*). Сонда функцияның толық өсімшесі $\Delta u = A_1' - A_1''$ кесіндіге тең.

Анықтама. $u = f(x_1, x_2,..., x_m)$ функция $A(x_1, x_2,..., x_m)$ нүктеде **дифференциалданады** деп аталады, егер оның $A(x_1, x_2, ..., x_m)$ нүктедегі (8.15) толық өсімшесі мына түрге өрнектелсе:

$$\Delta u = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + ... + A_m\Delta x_m + \alpha_1\Delta x_1 + \alpha_2\Delta x_2 + ... + \alpha_m\Delta x_m, \quad (8.16)$$

мұндағы A_i сандары Δx_i-ге тәуелсіз, α_i шексіз аз функциялар $\Delta x_i \to 0$ болғанда және $\alpha_i = 0$, егер $\Delta x_i = 0$ болса, $i = \overline{1,m}$ (функцияның (8.16) толық өсімшесіндегі $\Delta x_i \to 0$ болғанда, $\alpha_1\Delta x_1 + \alpha_2\Delta x_2 + ... + \alpha_m\Delta x_m$ бөлігі $A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + ... + A_m\Delta x_m$ бөлігіне қарағанда "тезірек" нөлге ұмтылса, онда ол **дифференциалданатын функция** деп аталады). (8.16) формула функцияның **дифференциалдану белгісі** деп аталады.

Дифференциалдану белгісін басқа түрде де жазуға болады. Ол үшін функцияның барлық $x_1, x_2, ..., x_m$ аргументтеріне сәйкес $\Delta x_1, \Delta x_2,..., \Delta x_m$ өсімше берейік, сонда $x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2,..., x_m + \Delta x_m$ сандары $\Delta x_1, \Delta x_2,..., \Delta x_m$ өсімшеге сәйкес келетін нүктенің координаттары. Осы екі нүктенің

$$\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + ... + (\Delta x_m)^2}$$

арақашықтығы шексіз аз функция болады, егер $\Delta x_1 \to 0, \Delta x_2 \to 0,..., \Delta x_m \to 0$ болса және $\rho = 0$, егер барлық $\Delta x_i = 0$ болса, $i = \overline{1,m}$. Енді (8.16) формуланың оң жағындағы өрнекті ρ функциямен салыстырғанда ол өрнек жоғарғы ретті шексіз аз функция болатынын дәлелдейік, демек, (8.16) өрнегі $O(\rho)$ функция болады ([13]. *9.6-тақырып*). Егер $\rho \neq 0$ болса, онда $\frac{|\Delta x_i|}{\rho} \leq 1, i = \overline{1,m}$.

Осыдан:

$$|\alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + ... + \alpha_m \Delta x_m| \leq$$
$$\leq \left(|\alpha_1| \frac{|\Delta x_1|}{\rho} + |\alpha_2| \frac{|\Delta x_2|}{\rho} + ... + |\alpha_m| \frac{|\Delta x_m|}{\rho} \right) \rho \leq$$
$$\leq (|\alpha_1| + |\alpha_2| + ... + |\alpha_m|) \rho = O(\rho)$$

теңсіздік орындалады. Соныимен, функцияның (8.16) дифференциалдану белгісін мына түрде жазуға болады:

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + ... + A_m \Delta x_m + O(\rho) \tag{8.17}$$

немесе

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + ... + A_m \Delta x_m + \varepsilon(\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_m)\rho \tag{8.17'}$$

және егер $\rho = 0$ болса, онда $\Delta u = 0$.

Егер функцияның (8.17) дифференциалдану белгісін A_i сандарының кем дегенде біреуі нөлге тең болмаса, онда $A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + ... + A_m \Delta x_m$ қосынды **функция өсімшесінің негізгі бөлігі** деп аталады және ол Δx_i өсімшелеріне қатысты сызықты функция. Функцияның дифференциалдану анықтамасы бойынша A_i сандары – Δx_i өсімшелерге тәуелсіз кез келген сандар. Сондықтан $A_i = 0$ болғанда (8.16) немесе (8.17) теңдіктері орындалса, онда функция $A(x_1, x_2, ..., x_m)$ нүкте дифференциалданады.

8.15-теорема (дифференциалданудың қажетті белгісі). Егер $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функция $A(x_1, x_2, ..., x_m)$ нүктеде дифференциалданса, онда осы нүктеде функцияның барлық аргументтері бойынша алынған дербес туындылары бар және $\frac{\partial u}{\partial x_i}(A) = A_i$, $i = \overline{1,m}$, мұндағы A_i жоғарыдағы (8.16) немесе (8.17) дифференциалдану белгіден анықталады.

Дәлелдеуі. Функция $A(x_1, x_2, ..., x_m)$ нүктеде дифференциалданады, олай болса осы нүктеде x_i аргументіне сәйкес келетін өсімшені анықтайық:

$$\Delta_{x_i} u = A_i \Delta x_i + \alpha_i \Delta x_i .$$

Осыдан: $\frac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i} = A_i + \alpha_i$.

Онда

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i} = A_i = \frac{\partial u}{\partial xi}, \quad i = \overline{1,m}.$$

Теорема дәлелденді.

Ескерту. *8.15-теоремаға* кері теорема орындалмайды, яғни дербес туындылардың бар болуы функцияның дифференциалдануына жеткілікті шарт бола алмайды (*8.9-тақырыптағы 4-мысалды қара*). Осы теоремадан мына салдарды аламыз.

1-салдар. Функцияның (8.17) дифференциалдану белгісін мына түрде жазуға болады.

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\Delta x_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_m}\Delta x_m + \varepsilon\left(\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_m\right)\rho. \qquad (8.18)$$

2-салдар. Егер $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функция $A(x_1, x_2, ..., x_m)$ нүктеде дифференциалданса, онда оның Δu толық өсімшесінің (8.16) немесе (8.17) түрде жазылуы тек біреу ғана.

Шынында да, A_i сандары *8.15-теорема* бойынша $A(x_1, x_2, ..., x_m)$ нүктеде $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ дербес туындыларға тең, олай болса, Δu функция өсімшесінің жазылуы тек біреу ғана болады.

8.16-теорема. Егер $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функция $A(x_1, x_2, ..., x_m)$ нүктеде дифференциалданса, онда ол осы нүктеде үзіліссіз.

Дәлелдеуі. Функция $A(x_1, x_2, ..., x_m)$ нүктеде дифференциалданатын болғандықтан, функцияның осы нүктедегі (8.16) дифференциалдану белгісі бойынша

$$\lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \dots\dots \\ \Delta x_m \to 0}} \Delta u = 0$$

теңдік орындалады. Ал бұл шек функцияның $A(x_1, x_2, ..., x_m)$ нүктеде үзіліссіз болатынын айқындайды (*8.5-тақырып*). Теорема дәлелденді.

Ескерту. *8.16-теоремаға* кері теорема орындалмайды, яғни функцияның үзіліссіздігі тек қажетті ғана шарт, ал ол жеткілікті шарт бола алмайды. Мысалы, $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ функциясының дербес туындыларын табайық:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Анықталған дербес туындылардың $O(0,0,0)$ нүктеде мағынасы жоқ. Осы нүктеде функцияның дербес туындылары жоқ болатынына көз жеткізейік. Шынында да, $u(x,0,0)=\sqrt{x^2}=|x|$. Бұл функцияның (x-ке тәуелді) $x=0$ нүктеде туындысы жоқ. Олай болса, $O(0,0,0)$ нүктеде $\frac{\partial u}{\partial x}$ дербес туынды да жоқ. Осы сияқты, $O(0,0,0)$ нүктеде $\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}$ дербес туындылары да жоқ.

1-мысал. $u=\sqrt[3]{xy}$ функция $O(0,0)$ нүктеде дифференциалдана ма?

Шешуі. Алдымен функцияның $O(0,0,0)$ нүктедегі дербес туындыларын (8.14) формула бойынша есептейік:

$$u'_x(0,0)=\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\Delta x\cdot 0}-0}{\Delta x}=0,$$

$$u'_y(0,0)=\frac{\partial u}{\partial y}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\sqrt[3]{0\cdot\Delta y}-0}{\Delta y}=0.$$

Демек, берілген функцияның $O(0,0)$ нүктеде дербес туындылары бар. Енді функцияның $O(0,0)$ нүктедегі өсімшесін (8.17) формула түрінде өрнектеуге болатынын тексерейік (егер функцияның өсімшесі (8.17) түрінде өрнектелмесе, онда функция $O(0,0)$ нүктеде дифференциалданбайды). Функцияның $O(0,0)$ нүктедегі толық өсімшесін есептейік:

$$\Delta u=\sqrt[3]{\Delta x\Delta y}=\frac{\sqrt[3]{\Delta x\Delta y}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\varepsilon(\Delta x,\Delta y)\rho.$$

Осыдан, берілген функция $O(0, 0)$ нүктеде дифференциалдану үшін $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ болғанда $\varepsilon(\Delta x,\Delta y)$ шексіз аз функция болуы керек. Шексіз аз функция болатынын, не болмайтынын тексеру үшін 0-ге ұмтылатын тізбек алайық:

$$\Delta x=\frac{1}{n},\ \Delta y=\frac{1}{n}\ \ (n=1,2,\ldots),$$

яғни $n\to\infty$ болғанда $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ болады. Сонда $\left\{A_n\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}$ нүктелер тізбегі $n\to\infty$ болғанда $O(0,0)$ нүктеге ұмтылады, ал осы нүктеге сәйкес келетін функция өсімшесінің мәні $+\infty$-ке ұмтылады, егер $n\to\infty$ болғанда:

$$\varepsilon\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}}=\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}}{\frac{\sqrt{2}}{n}}=\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{2}}.$$

Осыдан:

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{2}}=+\infty.$$

Сонымен, $\Delta x\to 0, \Delta y\to 0$ болғанда $\varepsilon(\Delta x,\Delta y)$ функциясы шексіз аз функция болмайды, яғни $\varepsilon(\Delta x,\Delta y)\neq O(\rho)$, $\rho>0$. Олай болса, берілген функция $O(0,0)$ нүктеде дифференциалданбайды.

2-мысал. $u=e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$, $x^2+y^2>0$ және $u(0,0)=0$ функцияның $O(0,0)$ нүктеде дифференциалданатынын зерттейік.

Шешуі. Функцияның $O(0,0)$ нүктедегі дербес туындыларын есептейік:

$$u'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2}}}{\Delta x}=0,$$

$$u'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{(\Delta y)^2}}}{\Delta y}=0.$$

Функцияның $O(0,0)$ нүктедегі дербес туындылары бар. Енді функцияның өсімшесін есептейік:

$$\Delta u(0,0)=e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\varepsilon(\Delta x,\Delta y)\rho,$$

мұндағы, $\varepsilon(\Delta x,\Delta y)$ шексіз аз функция болса, $\Delta x\to 0, \Delta y\to 0$, онда $O(0,0)$ нүктеде функция дифференциалданады:

$$\varepsilon(\Delta x,\Delta y)=\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\frac{1}{\rho}e^{-\frac{1}{\rho^2}}.$$

Егер $\rho\to 0$ болса, $(\Delta x\to 0, \Delta y\to 0)$, онда $\varepsilon(\Delta x,\Delta y)\to 0$ болады. Демек, $\varepsilon(\Delta x,\Delta y)$ шексіз аз функция болғандықтан, берілген функция $O(0,0)$ нүктеде дифференциалданады.

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Бірінші ретті дербес туынды.
2. Нүктедегі функцияның толық өсімшесі.

3. Функцияның нүктеде дифференциалдануының қажетті белгісі.

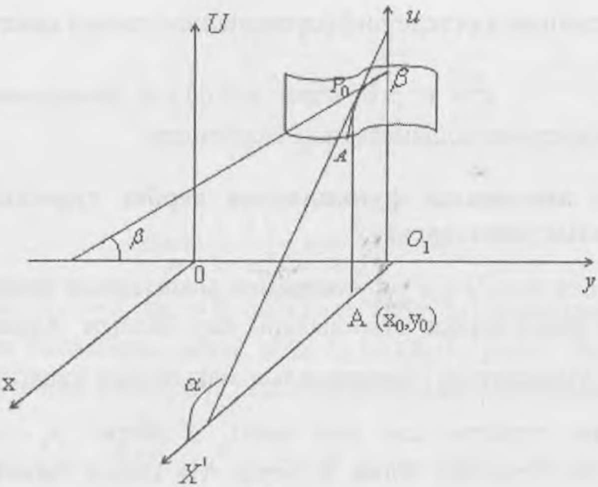
4. $u = e^{-\frac{7}{x^2+y^2}}$, $x^2 + y^2 > 0$ және $u(0,0) = 0$ функцияның $O(0,0)$ нүктеде дифференциалданатынын зерттеңдер.

8.8. Екі айнымалы функцияның дербес туындыларының геометриялық мағынасы

Бізге S бет $u = f(x, y)$ функциямен анықталсын және анықталу жиынында оның дербес туындылары бар болсын. Анықтық үшін, $\frac{\partial u}{\partial x}$ дербес туындының геометриялық мағынасын қарастырайық. y айнымалыны тұрақты сан деп алып, S бетке $y_0 - const$ қима жүргізейік (*8.7-сурет*). Қима S бетті АВ қисық сызық бойымен қияды. Тағайындалған $y_0 - const$ үшін функцияның анықталу жиынынан (XOY-жазықтығында) $A_0(x_0, y_0)$ нүктені қарастырайық, ал $A_0(x_0, y_0)$ нүктеге S беттегі АВ қисық сызығына тиісті $P_0(x_0, y_0, u_0)$ нүкте сәйкес келеді, мұндағы $u_0 = f(x_0, y_0)$. Онда AP_0B қисық сызығы толығымен S бетте жатады. AP_0B қисық сызығы $X'O_1U$ координат жазықтығының қисық сызығы деп қарастыруға болады және AP_0B қисық сызығының графигі бір айнымалы $u = f(x, y_0)$ функцияның графигі болады. Онда бір айнымалы функцияның туындысының геометриялық мағынасы бойынша: $\frac{du}{dx} = \frac{df(x, y_0)}{dx} = tg\alpha$, мұндағы α бұрыш AP_0B қисық сызықтың $P_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесіне жүргізілген жанама мен O_1X осінің арасындағы бұрыш және

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)$$

теңдігі орындалады. Сондықтан: $\frac{\partial u}{\partial x}(P_0) = tg\alpha$. Сонымен, $u = f(x, y)$ функциядан $A_0(x_0, y_0)$ нүктеде x бойынша (y-тұрақты) алынған $\frac{\partial u}{\partial x}$ дербес туынды, $u = f(x, y)$ бетті $y = y_0$ жазықтықпен қиғандағы қисық сызықтың $P_0(x_0, y_0)$ нүктесіне жүргізілген жанама мен OX осінің арасындағы бұрыштың тангенсіне тең болады. Осы



8.7-сурет

сияқты, $x - const\ \frac{\partial u}{\partial y}(P_0) = tg\beta$, мұндағы β бұрыш P_0 нүктеге жүргізілген жанама мен OY осі арасындағы бұрыш.

Сұрақтар

1. Бір айнымалы функция туындысының геометриялық мағынасы.
2. Екі айнымалы функцияның дербес туындыларының геометриялық мағынасы.

8.9. Көп айнымалы функцияның дифференциалдануының жеткілікті белгісі

Біз *8.7-тақырыптан* мынадай қорытындыға келеміз: функцияның дербес туындыларының бар болуы, осы функцияның дифференциалдануына ешқандай кепілдік бере алмайды. Енді осы тақырыпта, функцияның дифференциалдануына кепілдік бере алатын жеткілікті шартты қарастыратын боламыз.

Бір айнымалы $u = f(x)$ функцияның x_0 нүктедегі туындысы бар болуы үшін оның осы нүктеде дифференциалдануы қажетті әрі жеткілікті. Ал көп айнымалы функция үшін функцияның дербес туындысының бар болуы мен оның дифференциалдану ұғымдары эквивалентті бола алмайды.

8.17-теорема (дифференциалданудың жеткілікті белгісі). Егер $A_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ нүктенің белгілі бір маңайында $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$

функцияның барлық $x_1, x_2, ..., x_m$ аргументтері бойынша алынған $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ $i=\overline{1,m}$ дербес туындылары бар әрі олар осы нүктенің өзінде үзіліссіз болса, онда функция осы нүктеде дифференциалданады, демек, функцияның толық өсімшесін мына түрде жазуға болады:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\Delta x_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_m}\Delta x_m + \varepsilon(\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_m)\rho,$$

мұндағы

$$\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + ... + (\Delta x_m)^2}, \ \varepsilon(\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_m)$$

шексіз аз функция $\rho \to 0$ (немесе $\Delta x_i \to 0$, $i=\overline{1,m}$) болғанда.

Дәлелдеуі. Теореманың дәлелдеуін екі айнымалы $u = f(x,y)$ функция үшін дәлелдейік. Сонымен, $A_0(x_0, y_0)$ нүктенің белгілі бір маңайында $u = f(x,y)$ функцияның f_x' және f_y' дербес туындылары бар әрі олар осы нүктеде үзіліссіз болсын. Функцияның x, y аргументтеріне $A_0(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ нүкте A_0 нүктенің белгілі бір маңайына тиісті болатындай сәйкес $\Delta x, \Delta y$ өсімше берейік. Онда функцияның өсімшесін (8.15) формула бойынша түрлендірейік:

$$\begin{aligned}\Delta u &= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ &= [f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)] + \\ &+ [f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)].\end{aligned} \tag{8.19}$$

Мұндағы $[f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)]$ өрнекті $[x_0, x_0+\Delta x]$ сегментте $f(x_0, y_0+\Delta y)$ функцияның x аргументі бойынша алынған өсімше деп алуға болады. $u = f(x,y)$ функцияның дербес туындылары бар болғандықтан, $f(x, y_0+\Delta y)$ функция дифференциалданады және одан x бойынша алынған туынды f_x' дербес туынды болады.

Енді $\Delta u = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)$ өрнекке Лагранж формуласын ([1], *3.7-тақырып*) пайдалансақ, $0<\theta_1<1$ теңсіздікті қанағаттандыратын θ_1 саны табылып,

$$[f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)] = f_x'(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x$$

теңсіздігі орындалады. Осылайша $f(x_0+\Delta x, y)$ функция үшін жалғастырып, $f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)$ өрнекке Лагранж формуласын пайдалансақ,

$$[f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)]=f'_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y, \quad 0<\theta_2<1$$

теңдігі орындалады. Теореманың шарты бойынша, f'_x және f'_y дербес туындылары A_0 нүктеде үзіліссіз болғандықтан

$$f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x=(f'_x(x_0, y_0)+\alpha)\Delta x,$$
$$f'_y(x_0, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y=(f'_y(x_0, y_0)+\beta)\Delta y.$$

Мұндағы α, β шексіз аз функциялар $\Delta\to 0, \Delta y\to 0$ болғанда. Соңғы теңдіктерді (8.19) теңдікке қояйық, сонда дәлелдеу керек теңдікті аламыз:

$$\Delta u=f'_x(x_0, y_0)\Delta x+f'_y(x_0, y_0)\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y.$$

Сонымен, $u=f(x,y)$ функциясы $A_0(x_0, y_0)$ нүктеде дифференциалданады. Теорема дәлелденді.

Осы теоремадан мына салдарды аламыз. Егер $A_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ нүктенің кейбір маңайында $u=f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функцияның $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ $(i=\overline{1,m})$ дербес туындылары бар болса әрі олар $A_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ нүктенің өзінде үзіліссіз болса, онда функцияның өзі осы нүктеде үзіліссіз болады. Салдардың дәлелдеуі *8.16-теоремадан* шығады, яғни функцияның A_0 нүктеде дифференциалдануынан оның осы нүктедегі үзіліссіздігін аламыз.

Анықтама. Егер $A_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ нүктеде $u=f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функцияның үзіліссіз дербес туындылары бар болса, онда функция осы нүктеде **үзіліссіз дифференциалданады** деп аталады.

Енді осы тақырыптағы функцияның нүктеде **үзіліссіз дифференциалдану** анықтамасын [1], *3.2-тақырыптағы* функцияның нүктеде дифференциалдану анықтамасымен салыстырайық. Егер функция нүктеде дифференциалданса, онда оның осы нүктеде дифференциалы бар әрі ол (8.16), (8.17), (8.18) формулалардың бірімен анықталады; ал функция нүктеде үзіліссіз дифференциалданса, онда функцияның дербес туындылары осы нүктеде үзіліссіз болады. Демек, функцияның нүктедегі дифференциалдану ұғымы осы функцияның дифференциалы ұғымымен тікелей байланысты; ал фунцияның үзіліссіз дифференциалдану ұғымы осы функцияның дербес туындылар ұғымымен тікелей байланысты. Сонымен, функцияның нүктедегі үзіліссіз дифференциалдануынан осы функцияның сол нүктедегі дифференциалдануын аламыз. Демек, функцияның нүктеде үзіліссіз дифференциалдану ұғымы осы функцияның сол нүктеде дифференциалдану ұғымына қарағанда, «кең» ұғым.

Ескерту. Функцияның дербес туындыларының үзіліссіздігі оның дифференциалдануы үшін жеткілікті ғана шарт, ал ол қажетті шарт бола алмайды (3-*мысалды қара*).

1-мысал. $u\sqrt{|xy|}$ функция $O(0,0)$ нүктеде үзіліссіз, дербес туындылары бар болатынын және дифференциалданбайтынын дәлелдейік.

Шешуі. Алдымен функцияның $O(0,0)$ нүктеде дербес туындылары бар болатынын дәлелдейік. Ол үшін дербес туындының анықтамасын пайдаланайық:

$$f_x'(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{\Delta x 0}}{\Delta x}=0,$$

$$f_y'(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\sqrt{\Delta y 0}}{\Delta y}=0.$$

Демек, функцияның $O(0,0)$ нүктеде дербес туындылары бар, олар нөлге тең. Енді функцияның дифференциалданбайтынын дәледейік. Ол үшін функцияның $O(0,0)$ нүктедегі функция өсімшесін есептейік:

$$\Delta u(0,0)=\sqrt{|\Delta x\,\Delta y|}=\frac{\sqrt{|\Delta x\,\Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\varepsilon(\Delta x,\Delta y)\rho,$$

мұндағы

$$\varepsilon(\Delta x,\Delta y)=\frac{\sqrt{|\Delta x\,\Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}},\quad \rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}.$$

Функцияның дифференциалданбайтынын дәлелдеу үшін $\varepsilon(\Delta x,\Delta y)$ функция шексіз аз функция болмайтынын айқындасақ болғаны $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ болғанда. Ол үшін $O(0,0)$ нүктеге ұмтылатынын $\left\{A_n\left(\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right)\right\}$ нүктелер тізбегін $n\to\infty$ болғанда қарастырайық, мұнда $\frac{1}{n}=\Delta x$, $\frac{1}{n}=\Delta y$. Егер $n\to\infty$ болса, онда

$\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$ болады, демек, $\left\{A_n\left(\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right)\right\}$ нүктелер тізбегі $O(0,0)$ нүктеге ұмтылады. Осы нүктелер тізбегіне сәйкес келетін $\varepsilon(\Delta x,\delta y)$ функцияның шегін есептейік:

$$\varepsilon\left(\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right)=\frac{\sqrt{\frac{1}{n}\frac{1}{n}}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}}=\frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{\frac{2}{n^2}}}, \qquad \lim_{n\to\infty}\varepsilon\left(\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{\frac{2}{n^2}}}\neq 0\cdot$$

Сонымен, функция $O(0,0)$ нүктеде дифференциалданбайды.

Функцияның $O(0,0)$ нүктедегі үзіліссіздігін тексерейік. Ол үшін *8.5-тақырыптағы* анықтаманы пайдаланайық:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{|x\cdot y|}=0 \text{ және } f(0,0)=0.$$

Демек, функция $O(0,0)$ нүктеде үзіліссіз болады.

Енді функцияның дербес туындыларын $O(0,0)$ нүктеде зерттейік. Егер $x\neq 0$ болғанда, туынды табу ережесі бойынша: $u'_x(x,y)=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\frac{y}{x}\right|}\operatorname{sign}x$ болады. $O(0,0)$ нүктеге $\left\{A'_n\left(\frac{1}{n^2};\frac{1}{n}\right)\right\}$ нүктелер тізбегін қарастырайық және осы нүктеге сәйкес келетін $u'_x(x,y)$ функцияның шегін табайық. Онда $n\to\infty$ болғанда:

$$\lim_{n\to\infty}u'_x\left(\frac{1}{n^2};\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}=+\infty\cdot$$

Сонымен, функцияның $u'_x(x,y)$ дербес туындысы $O(0,0)$ нүктенің маңайында шектелмеген. Осы тұжырымды $u'_y(x,y)$ дербес туындыға да айтуға болады. Функцияның дербес туындылары $O(0,0)$ нүктеде үзілісті, себебі олар $O(0,0)$ нүктеде анықталмаған.

2-мысал. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x=0,\ y=0\end{cases}$

функция $O(0,0)$ нүктенің маңайында үзіліссіз, ал $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ дербес туындылары бар, бірақ олар осы нүктенің өзінде дифференциалданбайтынын көрсетейік.

Шешуі. $x^2+y^2\neq 0$ теңсіздікті қанағаттандыратын жиында функция үзіліссіз және мына теңсіздіктің орындалатынына оңай көз жеткізуге болады:

$$|f(x,y)|=\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leq\frac{\sqrt{|xy|}}{2},$$

онда $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{|xy|}}{2}=0$. Осыдан $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0=f(0,0)$.

Сонымен, $O(0,0)$ нүктеде функция үзіліссіз. Функцияның $x^2+y^2\neq 0$ жиынында дербес туындыларын туындының ережесін пайдаланып табайық, ал олардың $O(0,0)$ нүктедегі мәндерін туындының анықтамасы бойынша есептейік:

$$f'_x(x,y)=\frac{y\sqrt{x^2+y^2}-\dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^2y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}},$$

$$f'_y(x,y)=\frac{x\sqrt{x^2+y^2}-\dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{xy^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}},$$

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\sqrt{(\Delta x)^2}}=0,$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\sqrt{(\Delta y)^2}}=0.$$

Осылардан және $\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|<\frac{1}{2}$ теңсіздіктен мына теңсіздікті аламыз:

$$|f'_x(x,y)|=\left|\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{xy}{x^2+y^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leq$$

$$\leq\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{2}\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq\frac{3}{2}.$$

Осылайша, $|f'_y(x,y)|\leq\frac{3}{2}$ теңсіздікті де дәлелдейміз. Сонымен, $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ дербес туындылар $x^2+y^2\neq 0$ жиынында шектелген. Енді $u = f(x,y)$ функцияның $O(0,0)$ нүктедегі өсімшесін мына түрде жазайық:

$$\Delta f(0,0) = \frac{\Delta x\,\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\rho,$$

мұндағы $\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = \dfrac{\Delta x \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}, \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ функциясы $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ болғанда шексіз аз функция бола алмайды, олай болса, функция $O(0,0)$ нүктеде дифференциалданбайды.

Шешуі. Функцияның $x^2 + y^2 \neq 0$ анықталу жиынында оның дербес туындыларын, туындының ережелерін, ал олардың $O(0,0)$ нүктедегі мәнін туындының анықтамасын пайдаланып есептейік:

$$f'_x(x,y) = 2x\,sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}cos\frac{1}{x^2+y^2},$$

$$f'_y(x,y) = 2y\,sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2}cos\frac{1}{x^2+y^2},$$

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{(\Delta x)^2 sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\Delta x\,sin\frac{1}{(\Delta x)^2} = 0,$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0}\frac{f(0,\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = 0.$$

Енді $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ дербес туындылар $O(0,0)$ нүктеде үзілісті, ал осы нүктенің кез келген маңайында шектелмейтін функция болатынына көз жеткізейік. Ол үшін болғанда $O(0,0)$ нүктеге жинақталатын $\{A_n(x_n, y_n)\}$ нүктелер тізбегін қарастырайық және $cos\dfrac{1}{x_n^2+y_n^2} = 1$ теңдігі орындалсын, яғни $\dfrac{1}{x_n^2+y_n^2} = 2n\pi$, мысалы x_n мен y_n үшін

$$x_n = \frac{1}{2\sqrt{n\pi}},\ y_n = \frac{1}{2\sqrt{n\pi}}$$

болсын. $x_n \to 0$, $y_n \to 0\ (n \to \infty)$ болғандықтан $\{A_n(x_n, y_n)\}$ нүктелер тізбегі $O(0,0)$ нүктенің кез келген маңайына тиісті болады және x_n мен y_n-ге сәйкес $f'_x(x,y)$ дербес туындының мәні

$$f'_x(x_n, y_n) = f'_x\left(\frac{1}{2\sqrt{n\pi}}; \frac{1}{2\sqrt{n\pi}}\right) = -\sqrt{2n\pi}.$$

Онда $\lim f_x'(x_n, y_n) = -\infty$ болады. Олай болса, $f_x'(x,y)$ функция $O(0,0)$ нүктеде үзілісті және осы нүктенің кез келген маңайында шектелмеген. Осы сияқты, $f_y'(x,y)$ функциясы да $O(0,0)$ нүктеде үзілісті және осы нүктенің кез келген маңайында шектелмеген.

Дербес $f_x'(x,y)$, $f_y'(x,y)$ туындылардың $O(0,0)$ нүктедегі мәндері нөлге тең, ал осы нүктедегі функцияның өсімшесі мына формуладан анықтайық:

$$\Delta f(0,0) = \left((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2\right)\sin\frac{1}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \rho\varepsilon(\rho),$$

мұндағы $\varepsilon(\rho) = \rho\sin\dfrac{1}{\rho^2} \to 0$, егер $\rho \to 0$ болса, онда $f(x,y)$ функция $O(0,0)$ нүктеде дифференциалданады.

4-мысал. $O(0,0)$ нүктеде $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = 0, y = 0 \end{cases}$

функцияның дербес туындылары бар және осы нүктеде функция дифференциалданбайтынын дәлелдейік.

Шешуі. $y = 0$ болғанда

$$f(x,0) = \begin{cases} x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

яғни $f(x,0) = x$ болғанда $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{d}{dx}f(x,0)|_{x=0} = 1$. Осы сияқты $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$. Демек, $f(x,y)$ функциясының $O(0,0)$ нүктеде дербес туындылары бар.

Енді $f(x,y)$ функцияның $O(0,0)$ нүктеде дербес туындылары бар болғанмен де, оның осы нүктеде дифференциалданбайтынын дәлелдейік. Дәлелдеу үшін кері жорияқ, яғни функция $O(0,0)$ нүктеде дифференциалдансын. Онда функцияның $O(0,0)$ нүктедегі

$$\Delta f = f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) = \frac{(\Delta x)^3 + (\Delta y)^3}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

өсімшесін мына түрде жазуға болады:

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\Delta y + O(\rho)$$

мұндағы $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$. Функцияның $O(0,0)$ нүктедегі x және y бойынша алынған дербес туындылар 1-ге тең болғандықтан, функцияның дифференциалдану белгісімен келесі өрнекті аламыз:

$$\frac{(\Delta x)^3+(\Delta y)^3}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\Delta x+\Delta y+O(\rho)$$

немесе

$$-\frac{\Delta x(\Delta y)^2+(\Delta x)^2\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=O\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right).$$

Онда (егер бұл шек бар болса)

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x(\Delta y)^2+(\Delta x)^2\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=0.$$

Енді осы шектің бар болмайтынын көрсетейік. Ол үшін $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ болсын, яғни $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$. Онда:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x(\Delta y)^2+(\Delta x)^2\Delta y}{\left[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{(\Delta x)^3\left(k^2+k\right)}{(\Delta x)^3\left(1+k^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{k^2+k}{\left(1+k^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Мұндағы $\dfrac{k^2+k}{\left(1+k^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ мәні k-ның әртүрлі мәндерінде әртүрлі мәндерді қабылдайды, олай болса, бұл шектің шегі жоқ. Сондықтан біздің кері жоруымыз дұрыс емес, яғни $O(0,0)$ нүктеде функция дифференциалданбайды.

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Функцияның нүктеде дифференциалдануының жеткілікті белгісін айт.

2. $u=f(x,y)$ функция, яғни $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^4}}, & x^2+y^4\neq 0\\ 0, & x=0,\ y=0\end{cases}$

$O(0,0)$ нүктенің маңайында үзіліссіз, ал $f_x'(x,y), f_y'(x,y)$ дербес туындылары бар, бірақ олар осы нүктеде дифференциалданбайтынын дәлелде.

3. $O(0,0)$ нүктеде $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x=0,\ y=0\end{cases}$

функцияның дербес туындылары бар және осы нүктеде функция дифференциалданбайтынын дәлелде.

8.10. Функцияның дифференциалдану белгісінің геометриялық мағынасы

Екі айнымалы $u = f(x, y)$ функцияның дифференциалдану белгісінің геометриялық белгісін қарастырайық.

Анықтама. Егер беттің кез келген $N_1(x_1, y_1, u_1)$ нүктесі $N_0(x_0, y_0, u_0)$ нүктеге ұмтылғанда, осы екі нүктеден өтетін қиюшымен жанама жазықтықтың арасындағы бұрыш нөлге ұмтылса, беттің $N_0(x_0, y_0, u_0)$ нүктесінен өтетін жазықтық осы нүктедегі **жанама жазықтық** деп аталады (*8.8-сурет*).

Енді мына геометриялық тұжырымды дәлелдейік: $u = f(x, y)$ функциясының $A_0(x_0, y_0)$ нүктеде дифференциалдануы беттің $N_0(x_0, y_0, u_0)$ нүктесіне жүргізілетін жанама жазықтықтың бар болуын қамтамасыз етеді.

Функцияның анықталу жиынындағы x пен y-ке оның жиынына тиісті болатындай сәйкес Δx, Δy өсімше берейік; $\Delta x = x - y_0$, $\Delta y = y - y_0$, онда функция $\Delta u = u - u_0$ өсімше қабылдайды, мұндағы $u_0 = f(x_0, y_0)$, $u = f(x, y)$. Функцияның (8.16) дифференциалдану белгісін мына түрде жазуға болады:

$$u - u_0 = A_1(x - x_0) + A_2(y - y_0) + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y = A_1(x - x_0) + \\ + A_2(y - y_0) + O(\rho),$$

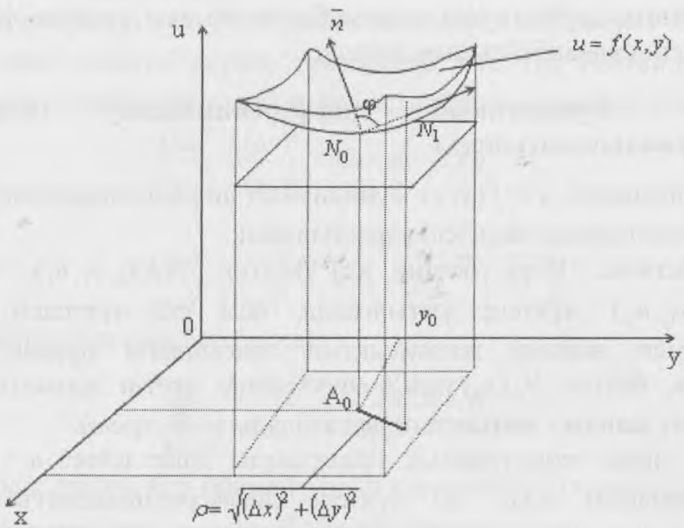
мұндағы A_1, A_2 тұрақты сандар сәйкес $A_0(x_0, y_0)$ нүктедегі $\frac{\partial u}{\partial x}(A_0)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(A_0)$ дербес туындыларға тең, $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, α_1 мен α_2 шексіз аз функциялар, егер $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$.

XYU декарт координат жүйесіндегі $N_0(x_0, y_0, u_0)$ нүктеден өтетін және нормаль векторы $\bar{n} = \{A_1; A_2; -1\}$ болатын аналитикалық геометриядағы жазықтықтың теңдеуін қарастырайық:

$$u - u_0 = A_1(x - x_0) + A_2(y - y_0). \tag{8.20}$$

Осы теңдеу S беттің N_0 нүктесінен өтетін жанама жазықтық теңдеуі болатынын дәлелдейік. Ол үшін:

(8.20) жазықтық $N_0(x_0, y_0, u_0)$ нүктеден өтетінін;



8.8-сурет

S беттегі кез келген N_1 нүкте N_0 нүктеге ұмтылғанда $\overrightarrow{N_0N_1}$ қиюшы вектор мен $\bar{n}$ нормаль вектордың арасындағы бұрыш нөлге ұмтылатынын дәлелдесек жеткілікті.

Пункт өзінен-өзі орындалады, себебі N_0 нүктенің координаттары (8.20) теңдеуді қанағаттандырады. Ал 2) пунктті дәлелдеу үшін $\overrightarrow{N_0N_1}$ мен $\bar{n}$ векторларының арасындағы φ бұрыштың косинусын қарастырайық ([11]. (9.60)-формула)

$$\cos\varphi=\frac{A_1(x-x_0)+A_2(y-y_0)-(u-u_0)}{\sqrt{A_1^2+A_2^2+1}\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(u-u_0)^2}}. \qquad (8.21)$$

$u=f(x,y)$ функция $A_0(x_0,y_0)$ нүктеде дифференциалданатын болғандықтан, (8.21) формуланың алымындағы өрнекке мына теңдік орындалады:

$$A_1(x-x_0)+A_2(y-y_0)-(u-u_0)=O(\rho).$$

Сондықтан

$$|\cos\varphi|\le\frac{|O(\rho)|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=\frac{|O(\rho)|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\frac{O(\rho)}{\rho}.$$

Осыдан $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{O(\rho)}{\rho}=0$, онда $\lim\limits_{\rho\to 0}\varphi=\dfrac{\pi}{2}$. Геометриялық тұжырым дәлелденді.

Сонымен, 8.15-теореманы пайдаланып, $N_0(x_0, y_0, u_0)$ нүктеге жүргізілген (8.20) жанама жазықтықтың теңдеуін мына түрде жазуға болады:

$$u-u_0=\frac{\partial u}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial u}{\partial y}(y-y_0). \tag{8.20'}$$

S беттің N_0 нүктесіндегі нормаль векторының теңдеуін табу үшін аналитикалық геометриядағы ([11]. *11.15-тақырып*) N_0N_1 түзі мен (8.20') жанама жазықтықтың перпендикулярлығының белгісін еске алып, нормаль вектордың теңдеуін мына түрде анықтаймыз:

$$\frac{x-x_0}{\dfrac{\partial u}{\partial x}}=\frac{y-y_0}{\dfrac{\partial u}{\partial y}}=\frac{u-u_0}{1}.$$

Егер кеңістіктегі қисық сызық $x=x(t), y=y(t), u=u(t)$ теңдеулерімен берілсе, онда қисық сызықтың $N_0(x_0, y_0, u_0)$ нүктесіне жүргізілген **жанама түзудің теңдеуі**

$$\frac{x-x_0}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{y-y_0}{\dfrac{dy}{dt}}=\frac{u-u_0}{\dfrac{du}{dt}}$$

теңдеуімен, ал нормаль жазықтықтың теңдеуі

$$\frac{dx}{dt}(x-x_0)+\frac{dy}{dt}(y-y_0)+\frac{du}{dt}(z-z_0)=0$$

теңдеуімен анықталады.

Сұрақтар

1. Жанама жазықтықтың теңдеуі.
2. Нормаль жазықтықтың теңдеуі.

8.11 Көп айнымалы функцияның дифференциалы

Анықтама. $u=f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функцияның $A(x_1, x_2, ..., x_m)$ нүктедегі **толық дифференциалы** (қысқаша **дифференциалы)** деп осы нүктедегі функцияның толық өсімшесінің аргументтеріне қатысты негізгі сызықты бөлігін айтамыз.

Егер (8.16) формуладағы барлық A_i коэффициенттері нөлге тең болса, онда $A(x_1, x_2,..., x_m)$ нүктедегі функцияның дифференциалы нөлге тең дейді және толық дифференциал du таңбамен белгіленеді, яғни

$$du = A_1\Delta x + A_2\Delta x_2 + ... + A_m\Delta x_m,$$

немесе *8.15-теорема* бойынша

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\Delta x_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_m}\Delta x_m.$$

Енді тәуелсіз x_i айнымалының dx_i дифференциалы туралы ұғымды енгізейік: **тәуелсіз x_i айнымалының dx_i дифференциалы** деп $x_1, x_2,..., x_m$ айнымаларға тәуелді емес кез келген санды айтамыз. Осы жаңа ұғымдағы кез келген сан тәуелсіз x_i айнымалының Δx_i өсімшесіне тең болсын деп қабылдайық. Онда осы келісім бойынша $A(x_1, x_2,..., x_m)$ нүктеде функцияның дифференциалын мына түрде өрнектеуге болады:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_m}dx_m, \tag{8.22}$$

мұндағы $x_1, x_2,..., x_m$ – тәуелсіз айнымалы шамалар.

Енді күрделі функцияның дифференциалын есептейік. Бізге $u = f(x_1, x_2,..., x_m)$ күрделі функциясы берілсін, мұндағы

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t_1, t_2,..., t_k), \\ x_2 = \varphi_2(t_1, t_2,..., t_k), \\ ... \quad ... \quad ... \\ x_m = \varphi_m(t_1, t_2,..., t_k). \end{cases} \tag{8.23}$$

Күрделі функция белгілі шартты қанағаттандырғанда, онда ол $t_1, t_2,..., t_k$ аргументтері бойынша дифференциалданатынын дәлелдейік. Функция дифференциалданса, онда күрделі функцияның $t_1, t_2, .., t_k$ аргументтері бойынша алынған дербес туындылары $u = f(x_1, x_2,..., x_m)$ функциясының және (8.23) функциялардың дербес туындылары арқылы анықталады, яғни

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t_1} = \dfrac{\partial u}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{dt_1} + \dfrac{\partial u}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{dt_1} + \ldots + \dfrac{\partial u}{\partial x_m}\dfrac{\partial x_m}{dt_1}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t_2} = \dfrac{\partial u}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{dt_2} + \dfrac{\partial u}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{dt_2} + \ldots + \dfrac{\partial u}{\partial x_m}\dfrac{\partial x_m}{dt_2}, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \dfrac{\partial u}{\partial t_k} = \dfrac{\partial u}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{dt_k} + \dfrac{\partial u}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{dt_k} + \ldots + \dfrac{\partial u}{\partial x_m}\dfrac{\partial x_m}{dt_k}. \end{cases} \tag{8.24}$$

8.18-теорема. (8.23) функциялар $A(t_1^0, t_2^0, ..., t_k^0)$ нүктеде, ал $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функциясы $N(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ нүктеде дифференциалдансын, мұндағы $x_i^0 = \varphi_i(t_1^0, t_2^0, ..., t_k^0)$, $i = \overline{1, m}$, онда (8.23) формуладан анықталатын күрделі $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функция $A(t_1^0, t_2^0, ..., t_k^0)$ нүктеде дифференциалданады.

Бұл жағдайда, күрделі функцияның $A(t_1^0, t_2^0, ..., t_k^0)$ нүктедегі дербес туындылары (1.24) формуладан анықталады, мұндағы барлық $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = \overline{1, m}$ дербес туындылар $N(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ нүктеде, ал (8.23) функциялардың $t_1, t_2, ..., t_k$ аргументтері бойынша алынған барлық $\dfrac{\partial x_i}{\partial t_j}$ дербес туындылары $A(t_1^0, t_2^0, ..., t_k^0)$ нүктеде алынады.

Дәлелдеуі. $A(t_1^0, t_2^0, ..., t_k^0)$ нүктеде күрделі функцияның $t_1, t_2, ..., t_k$ аргументтері бір мезгілде нөлге тең емес сәйкес $\Delta t_1, \Delta t_2, ..., \Delta t_k$ өсімше қабылдансын. Бұл өсімшелерге $A(t_1^0, t_2^0, ..., t_k^0)$ нүктеде $\Delta x_1, \Delta x_2, ... \Delta x_m$ өсімшелері сәйкеес келеді, онда $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функция $N(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ нүктеде Δx_1, $\Delta x_2, ... \Delta x_m$ өсімшелерге сәйкес Δu өсімше қабылдайды. Функция N нүктеде дифференциалданатын болғандықтан, Δu өсімше

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}\Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \ldots +$$

$$+ \alpha_m \Delta x_m = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_i}\Delta x_i + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \Delta x_i \tag{8.25}$$

түрінде анықталады, мұндағы $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ туындылары $N(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ нүктеде алынған дербес туындылар, α_i шексіз аз функциялар $\Delta x \to 0$ болғанда және $\alpha_i = 0$, егер $\Delta x = 0$ болса, $i = \overline{1, m}$.

(8.23) функциялары $A(t_1^0, t_2^0, ..., t_k^0)$ нүктеде дифференциалданатын болғандықтан (8.25) теңдіктегі Δx_i өсімшелерді мына түрде жазайық:

$$\Delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial t_1}\Delta t_1 + \frac{\partial x_i}{\partial t_2}\Delta t_2 + ... + \frac{\partial x_i}{\partial t_k}\Delta t_k + O(\rho) = \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial x_i}{\partial t_j}\Delta t_j + O(\rho), \qquad (8.26)$$

мұндағы $\frac{\partial x_1}{\partial t_1}, \frac{\partial x_i}{\partial t_2}, ..., \frac{\partial x_i}{\partial t_k}$ туындылары $A(t_1^0, t_2^0, ..., t_k^0)$ нүктедегі дербес туындылар, $\rho = \sqrt{(\Delta t_1)^2 + (\Delta t_2)^2 + ... + (\Delta t_k)^2}$.

(8.26) теңдікті (8.25) теңдікке қойғанда Δu өсімше мына түрге өрнектелетінін

$$\Delta u = A_1\Delta t_1 + A_2\Delta t_2 + ... + A_k\Delta t_k + O(\rho) \qquad (8.27)$$

дәлелдеуіміз керек, мұндағы

$$A_i = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + ... + \frac{\partial u}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial t_i}, \quad i = \overline{1, k}. \qquad (8.28)$$

(8.27) формула күрделі функцияның дифференциалданатынын, ал (8.28) формула күрделі функцияның t_i айнымалары бойынша алынған дербес туындылары бар болатынын дәлелдейді (*8.16-теорема*).

Енді (8.26) өсімшелерді (8.25) формулаға қояйық:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_i}\left[\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial x_i}{\partial t_j} + O(\rho)\right] + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\Delta x_i =$$

$$= \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t_j}\right)\Delta t_j + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_i}O(\rho) + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\Delta x_i =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}A_j\Delta t_j + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_i}O(\rho) + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\Delta x_i.$$

Соңғы теңдіктің екінші мүшесіндегі $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ туынды $N(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ нүктедегі дербес туынды, онда ол ρ-ға тәуелді емес сандар, демек $\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_i}O(\rho) = O(\rho)$, ал үшінші қосындыдағы Δx_i

өсімшелер (8.26) формула бойынша $|\Delta x_i| \le const \cdot \rho$ теңсіздігін қанағаттандырады, $i=\overline{1,m}$ және $\alpha_i = O(\rho)$, егер $\rho \to 0$ болса. $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, ..., t_k)$ функциялары A нүктеде дифференциалданатын болғандықтан, онда ол осы нүктеде үзіліссіз, олай болса, $\Delta x \to 0$, егер $\rho \to 0$ болса.

Сондықтан $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \Delta x_i = O(\rho)$. Теорема дәлелденді.

Егер (8.23) функциялар тек бір ғана t аргументіне тәуелді болса, онда бір t аргументке тәуелді $u = f(x_1, x_2, ... x_m)$ функциясын аламыз, мұндағы $x_i = \varphi_i(t)$, $i=\overline{1,m}$. Бір аргументке тәуелді күрделі функцияның $\frac{du}{dt}$ туындысы мына формуладан анықталады:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + ... + \frac{\partial u}{\partial x_m}\frac{dx_m}{dt}. \qquad (8.29)$$

(8.22) формуланы үш аргументті $u = f(x, y, z)$ функция үшін

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

түрінде жазуға болады, ал (8.29) формуланы мына түрде:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Төмендегі функциялардың дифференциалдарын табайық.

1-мысал. $u = x^3 - 2y^2 - 4xy^3$.

Шешуі. Алдымен дербес туындыларды табайық:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 4y^3, \frac{\partial u}{\partial y} = -4y - 12xy^2.$$

Сонда: $du = \left(3x^2 - 4y^3\right)dx + \left(-4y - 12xy^2\right)dy$.

2-мысал. $u = x^{y^2}$

Шешуі. $\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 x^{y^2-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2} 2y \ln x$, $du = y^2 x^{y^2-1}dx + 2yx^{y^2} \ln x$.

3-мысал. $u = x^2 + xy^2 + y^3$, мұндағы $x = t^2 + 1$, $y = 3t^2 + t$ күрделі функцияның дифференциалдарын табайық.

Шешуі. Екі айнымалы күрделі функцияның дифференциалын мына формуладан анықтаймыз:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Сонда $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y^2$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy + 3y^2$, $\frac{dx}{dt} = 2t$, $\frac{dy}{dt} = 6t + 1$. Осыдан

$$\frac{du}{dt} = \left(2x + y^2\right)2t + \left(2xy + 3y^2\right)(6t + 1) = \left[2t^2 + 2 + \left(3t^2 + t\right)^2\right]2t +$$
$$+\left[2\left(t^2 + 1\right)\left(3t^2 + t\right) + 3\left(3t^2 + t\right)^2\right](6t + 1).$$

Тапсырмалар

Төмендегі функциялардың дифференциалдарын табыңдар.

1. $u = \frac{x}{y} - 2y^2 - 4xy^3$. 2. $u = y^{x^{-3}}$. 3. $u = \sin e^{xy} + e^y$

4. $u = y^2 + yx^2 + x^3$, мұндағы $y = t^2 + 1, x = 3t^2 + 1$ күрделі функцияның дифференциалын табыңдар.

5. $u = 5y^2 - y^2x^2 + x^3$, мұндағы $y = t^2 + t, x = 4t^2 - 3t$ күрделі функцияның дифференциалын табыңдар.

6. $u = -y^2 - yx + x^2$, мұндағы $y = t^2 - t, x = t - 3t^2$ күрделі функцияның дифференциалын табыңдар.

8.12. Бірінші ретті дифференциалдың инварианттылығы

Көп айнымалы $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функцияның бірінші ретті дифференциалы (толық дифференциалы):

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_m}dx_m,$$

$x_1, x_2, ..., x_m$ айнымалылары тәуелсіз айнымалы немесе басқа аргументке тәуелді функция болса да ол өзінің түрін (пішінін) сақтайды.

Бірінші ретті дифференциалдың инварианттылығы деп аталатын мына қасиетті дәлелдейік: функцияның $x_1, x_2, ..., x_m$ аргументтері $t_1, t_2, ..., t_k$ тәуелсіз айнымаларға тәуелді дифференциалданатын функция болғанда да бірінші ретті дифференциалдың түрі сақталады.

$u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функцияның $x_1, x_2, ..., x_m$ аргументтері $A(t_1^0, t_2^0, ..., t_k^0)$ нүктеде дифференциалданатын $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, ..., t_k)$ функция болсын, ал $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функцияның өзі $B_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ нүктеде дифференциалдансын, мұндағы $x_i^0 = \varphi_i(t_1^0, t_2^0, ..., t_k^0), i = \overline{1, m}$. Бұл жағдайда $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функция $t_1, t_2, ..., t_k$ тәуелсіз айнымалыларға тәуелді күрделі функция болады, онда 8.18-теорема бойынша $u=f(x_1,x_2,...,x_m)$ функция $A(t_1^0,t_2^0,...,t_k^0)$ нүктеде дифференциалданады. Олай болса, du бірінші ретті дифференциал мына түрде анықталады:

$$du=\frac{\partial u}{\partial t_1}dt_1+\frac{\partial u}{\partial t_2}dt_2+...+\frac{\partial u}{\partial t_k}dt_k, \tag{8.30}$$

мұндағы $\dfrac{\partial u}{\partial t_i}$ дербес туындылар (8.24) формуладан анықталады. Осы дербес туындыларды (8.30) формулаға қояйық және $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ туындылардың коэффициенттері бойынша жинақтайық:

$$\begin{aligned}
du=&\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1}+...+\frac{\partial u}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial t_1}\right)dt_1+\\
&+\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_2}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_2}+...+\frac{\partial u}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial t_2}\right)dt_2+\\
&\quad ... \qquad ... \qquad ... \qquad ...\\
&+\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_k}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_k}+...+\frac{\partial u}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial t_k}\right)dt_k=\\
&=\frac{\partial u}{\partial x_1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial t_1}dt_1+\frac{\partial x_1}{\partial t_2}dt_2+...+\frac{\partial x_1}{\partial t_k}dt_k\right)+\\
&+\frac{\partial u}{\partial x_2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial t_1}dt_1+\frac{\partial x_2}{\partial t_2}dt_2+...+\frac{\partial x_2}{\partial t_k}dt_k\right)+\\
&\quad ... \qquad ... \qquad ... \qquad ...\\
&+\frac{\partial u}{\partial x_m}\left(\frac{\partial x_m}{\partial t_1}dt_1+\frac{\partial x_m}{\partial t_2}dt_2+...+\frac{\partial x_m}{\partial t_k}dt_k\right).
\end{aligned}$$

Осы теңдіктегі жақша ішіндегі өрнектер $x_i=\varphi_i(t_1,t_2,...,t_k)$ функцияның dx_i дифференциалына тең. Сонымен, бірінші ретті дифференциалдың инварианттылығы дәлелденді.

Бірінші ретті дифференциалдың инварианттылығын пайдаланып, дифференциалдау ережелерін дәлелдеуге болады:

$$d(cu)=cd(u), \quad c-const\,; \; d(u\pm v)=du\pm dv\,;$$

$$d(u\cdot v)=udv+vdu\,; \; d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2},$$

мұндағы u мен v – дифференциалданатын функциялар.

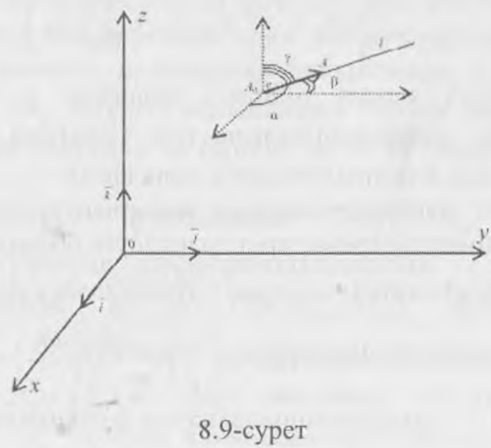
8.13 Функцияның бағыт бойынша туындысы

Біз тәуелсіз үш айнымалы $u = f(x,y,z)$ функцияны қарастырайық және ол үш өлшемді E кеңістігіндегі $A_0(x_0,y_0,z_0)$ нүктенің маңайында анықталсын әрі осы нүктеде дифференциалдансын. $A_0(x_0,y_0,z_0)$ нүктенің барлық сәулелерін қарастырайық. Әрбір сәуле координаттары $\bar{e} = \{cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ болатын бірлік $\bar{e}$ векторы арқылы анықталады, яғни $\bar{e} = \{cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, мұндағы α, β, γ бұрыштар $\bar{e}$ векторының сәйкес OX, OY, OZ осьтерімен түзейтін бұрыштар, ал $cos\alpha$, $cos\beta$, $cos\gamma$ сандары $\bar{e}$ векторының **бағыттауыш косинустары** деп аталады ([11], *2.11-тақырып*).

$A_0(x_0,y_0,z_0) = A_0$ нүктеден шығатын бір сәулені алайық және $\bar{e}$ векторы сол сәулені анықтасын.

Бірлік $\bar{e}$ векторымен беттескен жоғарыдағы сәуленің бойынан A_0 нүктеден өзге A нүкте алайық (*8.9-сурет*). $\overrightarrow{A_0A}$ векторын $\bar{l}$ деп белгілейік және $|A_0A| = |\bar{l}| = l$ болсын. Сонда $\overline{A_0A} = \{l\cos\alpha;\, l\cos\beta;\, l\cos\gamma\}$. Егер A нүктенің координаттары x,y,z болса, онда $x - x_0, y - y_0, z - z_0$ сандары $\overrightarrow{A_0A}$ векторының координаттары болады: $\overline{A_0A} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$. Тең векторлардың координаттарын теңестіріп, A нүкте мен $|\overrightarrow{A_0A}|$ кесіндінің арасындағы байланысты табамыз:

$$x = x_0 + l\,cos\alpha,\; y = y_0 + l\,cos\beta,\; z = z_0 + l\,cos\gamma. \tag{8.31}$$



8.9-сурет

Осы теңдіктерді $u = f(x, y, z)$ функцияның аргументтеріне қояйық:

$$u = f\left(x_0 + l\cos\alpha, y_0 + l\cos\beta, z_0 + l\cos\gamma\right). \qquad (8.32)$$

Осыдан $\bar{e} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ бірлік векторы анықталған және $A_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктеден өтетін түзуде $u = f(x, y, z)$ функция l-ге тәуелді бір айнымалы күрделі функция болатынын көреміз.

Анықтама. $u = f(x, y, z)$ функциясының $A_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктедегі $\bar{e} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ бірлік векторы арқылы анықталған l **бағыт бойынша туындысы** деп (8.32) күрделі функциядан $l = 0$ нүктеде l айныма бойынша алынған туындыны айтамыз және ол $\frac{\partial u}{\partial l}(A_0)$ таңбамен белгіленеді:

$$\frac{\partial u}{\partial l}(A_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(A_0)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(A_0)\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(A_0)\cos\gamma. \qquad (8.33)$$

Сонымен, $A_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктеде дифференциалданатын $u = f(x, y, z)$ функциясының осы нүктеде кез келген бағыт бойынша туындысы бар және ол туынды, біріншіден (8.33) формуладан анықталады, ал екіншіден, A_0 нүкте мен $\overrightarrow{A_0A}$ векторы арқылы анықталады.

Анықтама. $u = f(x, y, z)$ функциясының $A_0(x_0, y_0, z_0)$ **нүктедегі градиенті** деп координаттары

$$\frac{\partial u}{\partial x}(A_0),\ \frac{\partial u}{\partial y}(A_0),\ ,\frac{\partial u}{\partial z}(A_0)$$

сандар болатын векторды айтамыз және ол $grad u(A_0)$ (қысқаша $grad\, u$) таңбамен белгіленеді:

$$grad u(A_0) = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}(A_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(A_0) + \frac{\partial z}{\partial z}(A_0)\right\} =$$

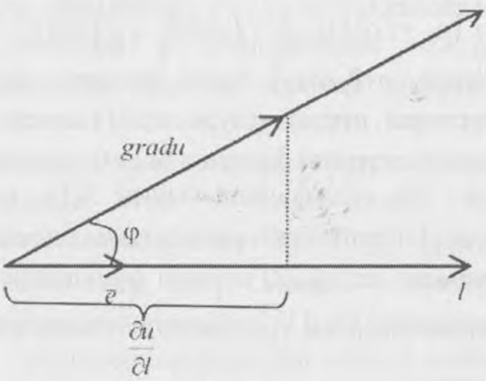
$$= \frac{\partial u}{\partial x}(A_0)\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}(A_0)\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}(A_0)\bar{k},$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(A_0)\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}(A_0)\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}(A_0)\bar{k}, \qquad (8.34)$$

мұнда $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – координат осьтері бойындағы бірлік векторлар.

Аналитикалық геометриядан екі вектордың скаляр көбейтіндісі олардың сәйкес координаттарының көбейтінділерінің қосындысына тең болатыны бізге белгілі ([11], *2.17-тақырып*). Сондықтан $u = f(x, y, z)$ функциядан l бағыт бойынша алынған туынды бірлік

$\bar{e}$ вектор мен (8.34) вектордың скаляр көбейтіндісіне тең (*8.10-сурет*), яғни



8.10-сурет

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \left(\bar{e};gradu\right), \tag{8.35}$$

мұндағы $\left(\bar{e}, grad\bar{u}\right) = \left|\bar{e}\right|\left|gradu\right|\cos\varphi$, $|\bar{e}|=1$. Осыдан $\frac{\partial u}{\partial l} = |grad\,u|\cos\varphi$.

Соңғы теңдіктің сол жағындағы өрнек $A_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ нүктеде максимум мәнді қабылдайды, егер $\cos\varphi = 1$ болса, яғни $gradu$ векторы l бағытпен беттессе, бұл жағдайда A нүктедегі $\frac{\partial u}{\partial l}$ өрнегі $gradu$ векторының модуліне тең:

$$max\frac{\partial u}{\partial l}(A) = \left|gradu(A)\right| =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}(A)\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}(A)\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}(A)\right)^2}. \tag{8.36}$$

Сонымен, $A(x, y, z)$ нүктедегі $u = f(x, y, z)$ функцияның градиентіне мына қасиеттер орындалады:

$$|grad\,u(A)| = max\frac{\partial u}{\partial l}(A);$$

егер $gradu(A) \neq 0$ болса, онда $gradu(A)$ векторы бағытымен бағыттас болады.

Анықтама. Егер беттің барлық нүктелерінде функцияның бір мәні сақталса, яғни $f\left(x, y, z\right) = C$, онда бұл бет **беттік деңгей** деп аталады, $C - const$, яғни $f(x,y,z)=C$ теңдеуін қанағаттандыратын нүктелердің жиыны беттік деңгейді анықтайды.

Егер анықтамадағы C тұрақты санның орнына басқа санды алсақ, онда біз басқа беттік деңгейді анықтаймыз, осындай беттер **беттік деңгейлер** деп аталады.

$f(x,y,z)=C$ беттік деңгейдің әрбір $A_0(x_0,y_0,z_0)$ нүктесіне жанама жазықтық жүргізсек, онда жанама жазықтықтың нормаль векторы $grad\,u$ векторы болады. Олай болса, $f(x,y,z)=C$ беттік деңгейдің әрбір $A(x,y,z)$ нүктесіндегі

$$grad u(A)=\left\{\frac{\partial u}{\partial x}(A);\frac{\partial u}{\partial y}(A);\frac{\partial u}{\partial z}(A)\right\}$$

вектор осы бетке ортогональ болады (*8.10-тақырып*).

1-мысал. $A_0(2,-1,1)$ нүктеде $u=xz+y+3$ функцияның $\bar{l}=\{1,-3,2\}$ векторы бағыт бойынша алынған туындыны табайық.

Шешуі. $\frac{\partial u}{\partial x}(A_0)=z(A_0)=1$, $\frac{\partial u}{\partial y}(A_0)=1$, $\frac{\partial u}{\partial z}(A_0)=x(A_0)=2$.

$$|\bar{l}|=\sqrt{1+9+4}=\sqrt{14},\ \cos\alpha=\frac{l_x}{|\bar{l}|}=\frac{1}{\sqrt{14}},$$

$$\cos\beta=\frac{l_y}{|\bar{l}|}=-\frac{3}{\sqrt{14}},\ \cos\gamma=\frac{l_z}{|\bar{l}|}=\frac{2}{\sqrt{14}}.$$

Осылардан

$$\frac{\partial u}{\partial l}(A_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(A_0)\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}(A_0)\cos\beta+$$

$$+\frac{\partial u}{\partial z}(A_0)\cos\gamma=1\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}-1\cdot\frac{3}{\sqrt{14}}+2\cdot\frac{2}{\sqrt{14}}=\frac{2}{\sqrt{14}}.$$

2-мысал. $u=2x^2y-3y^2+z$ функциясының $A_0(1,2,0)$ нүктеден $A_1(2,3,1)$ нүктеге бағытталған бағыт бойынша A_0 нүктедегі туындысын есептейік.

Шешуі. A_0 нүктедегі функцияның дербес туындыларының мәндерін есептейік:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(A_0)=4xy(A_0)=8,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(A_0)=(2x^2-6y)(A_0)=-10,\ \frac{\partial u}{\partial z}(A_0)=1,$$

$$\bar{l}=\overrightarrow{A_0A_1}=\{1;1;1\},|\bar{l}|=\sqrt{3},\quad \bar{l}=\overrightarrow{A_0A}=\{1;1;1\},\ |\bar{l}|=\sqrt{3},$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Сонда

$$\frac{\partial u}{\partial l}(A_0) = 8\frac{1}{\sqrt{3}} - 10\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

3-мысал. $u = x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz$ функцияның $A_0(1;2;1)$ нүктедегі градиентін, градиенттің модулін және градинет қай нүктеде OX осіне перпендикуляр, қай нүктеде нөлге тең болатынын есептейік.

Шешуі. A_0 нүктедегі дербес туындылардың мәндерін есептейік:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(A) = 2x - 3yz, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(A) = 2y - 3xz,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(A) = 2z - 3yx,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(A_0) = -4, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(A_0) = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial z}(A_0) = -4.$$

(8.34) формуладан:

$$grad u(A_0) = -4\bar{i} + \bar{j} - 4\bar{k} = \{-4;1;-4\},$$

$$|grad u(A_0)| = \sqrt{16+1+16} = \sqrt{33}.$$

OX осіне перпендикуляр вектордың бірінші координаты нөлге тең, яғни

$$\frac{\partial u}{\partial x}(A) = 0, \quad 2x - 3yz = 0, \quad x = \frac{3}{2}yz.$$

Сонымен, $x = \frac{3}{2}yz$ бетіне тиісті кез келген $A(x,y)$ нүктедегі $grad u(A)$ векторы OX осіне перпендикуляр болады.

Енді $grad u(A) = 0$ теңдеуін шешейік, яғни $2x - 3yz = 0$, $2y - 3xz = 0$, $2z - 3xy = 0$ теңдеулер жүйесін шешу керек. Жүйенің шешімдері мына нүктелер:

$$A_1(0,0,0), \; A_2\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right), \; A_3\left(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right), \; A_4\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right), \; A_5\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$$

болады. Осы нүктелердің координаттары $grad\, u = 0$ теңдеуін қанағаттандырады.

4-мысал. $u=\dfrac{8}{x^2+y^2+z^2+3}$ функция $A(x,y,z)$ нүктеден $A_0(1,-2,1)$, нүктеге өткенде қандай ең үлкен жылдамдықпен өседі?

Шешуі. Ең үлкен жылдамдықпен өсетінін табу үшін (8.36) формуланы пайдаланамыз, кез келген $A(x,y,z)$ нүктедегі

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-16x}{\left(x^2+y^2+z^2+3\right)^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-16y}{\left(x^2+y^2+z^2+3\right)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{-16z}{\left(x^2+y^2+z^2+3\right)^2}.$$

A нүктедегі функцияның градиентін (8.34) формуладан анықтаймыз:

$$gradu(A_0)=\frac{-16}{\left(x^2+y^2+z^2+3\right)^2}\{x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}\}.$$

Осыдан: $grad\,u(A_0)=-\frac{16}{81}\bar{i}+\frac{32}{81}\bar{j}-\frac{16}{81}\bar{k}$. $A(x,y,z)$ нүктеден $A_0(1,-2,1)$ нүктеге өткенде функцияның ең үлкен жылдамдықпен өтетін жылдамдығын (8.36) формуладан есептейміз:

$$\max\frac{\partial u}{\partial l}=|\,gard\,u(A_0)\,|=\frac{16\sqrt{6}}{81},\ \text{мұндағы}\ \bar{l}=\overrightarrow{A_0A}.$$

Тапсырмалар:

1. $A_0(2;-1;1)$ нүктеде $u=yz-x+4$ функцияның $\bar{l}=\{2,1,-4\}$ векторының бағыты бойынша алынған туындыны табыңдар.

2. $u=xy+x^2y+2z-xyz$ функцияның $A_0(1,2,1)$ нүктедегі градиентін, градиенттің модулін және градинет қай нүктеде OX осіне перпендикуляр, қай нүктеде нөлге тең болатынын есептеңдер.

3. $u=\dfrac{2}{xy+x^2z+y^2+1}$ функция $A(x,y,z)$ нүктеден $A_0(1,-2,1)$ нүктеге өткенде қандай ең үлкен жылдамдықпен өседі?

4. $u=xy^2-2x^2y+2z-xyz$ функциясының $A_0(1,2,0)$ нүктеден $A(2,3,1)$ нүктеге бағытталған бағыт бойынша A_0 нүктедегі туындысын есептеңдер.

8.14. Жоғарғы ретті дербес туындылар

Бізге $\{A\}$ жиынында анықталған $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функциясы берілсін және A нүктенің маңайындағы барлық нүктелерде функцияның x_i аргументі бойынша алынған $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ дербес туындысы (бірінші ретті дербес туындысы деп те аталады) бар болсын. Бірінші ретті $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ дербес туындының өзі $x_1, x_2, ..., x_m$ тәуелсіз айнымалыларға тәуелді функция болады. Егер A нүктеде $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ функцияның x_k аргумент бойынша дербес туындысы бар болса, онда ол туынды $u = = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функциядан A нүктеде x_i және x_k аргументтер бойынша алынған **екінші ретті дербес туынды** деп аталады әрі ол мына таңбалардың бірімен белгіленеді:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}(A), u^{(2)}{}_{x_k x_i}(A), \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(A), f^{(2)}_{x_k x_i}(A)$$

және былай анықталады: $\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)(A) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}(A)$, мұнда функциядан x_i аргумент бойынша, содан соң x_k аргумент бойынша туынды алынады. Егер, мұндағы $i \neq k$ болса, онда жоғарыдағы екінші ретті дербес туынды **екінші ретті аралас дербес туынды** деп аталады. Егер $i = k$ болса, онда ол екінші ретті дербес туынды деп аталады және ол былай белгіленеді:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(A),\ u^{(2)}_{x_i x_i}(A),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(A),\ f^{(2)}_{x_i x_i}(A).$$

Осы сияқты, екінші ретті дербес туындыдан алынған туынды **үшінші ретті дербес туынды** деп аталады, т.с.с. Егер A нүктеде $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функцияның $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-1}}$ аргументтері бойынша алынған $n-1$ ретті дербес туындысы бар болсын. Осы $n-1$ ретті дербес туындыдан A нүктеде x_{i_n} аргумент бойынша туынды бар болса, онда ол туынды n **ретті дербес туынды** деп аталады және ол $\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_n} \partial_{x_{n-1}}, ..., \partial x_{i_1}}$ таңбамен белгіленеді әрі ол былай анықталады:

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_n}}\left(\frac{\partial^{n-1}u}{\partial x_{i_{n-1}}\ldots\partial x_{i_1}}\right)=\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_n}\partial x_{i_{n-1}}\ldots\partial x_{i_1}}.$$

Егер $i_1, i_2, \ldots, i_n$ индекстерінің бәрі тең болмаса, онда ол n **ретті аралас дербес туынды** деп аталады, ал егер индекстердің бәрі тең болса, яғни $i_1 = i_2 = \ldots = i_n$, онда n ретті дербес туынды былай белгіленеді:

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_1}^n}=\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\frac{\partial^{n-1}u}{\partial x_{i_1}^{n-1}}\right).$$

Егер $i_1 = i_2 = \ldots i_m, i_{m+1} = \ldots = i_n$ болса, онда n ретті дербес туынды мына түрде таңбаланады:

$$\frac{\partial^{m+l}u}{\partial x_{i_1}^m \partial x_{i_{m+1}}^l}=\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_1}^m \partial x_{i_{m+1}}^l}, m+l=n.$$

Анықтама. Егер $A_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ нүктеде $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функцияның $n-1$ ретті барлық дербес туындылары дифференциалданса, онда функция осы нүктеде n **рет дифференциалданады** деп аталады.

Осы анықтамадан, егер $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функциясы A_0 нүктеде n рет дифференциалданса, онда $n > 1$ болғанда функцияның A_0 нүктедегі кез келген бірінші ретті дербес туындылары $n-1$ рет дифференциалданады, ал егер $n > 2$ болғанда, онда оның кез келген екінші ретті дербес туындысы осы нүктеде $n-2$ рет дифференциалданады.

Жоғарыдағы анықтамадан және *8.17-теоремадан* функцияның n рет дифференциалдануының жеткілікті белгісін дәлелдеуге болады.

8.19-теорема. $A_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ нүктеде $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функция n рет дифференциалдануы үшін, фукнцияның барлық n ретті дербес туындылары осы нүктеде үзіліссіз болуы жеткілікті.

Дәлелдеуін оқырмандарға ұсынамыз.

8.20-теорема. Егер $A_0(x_0, y_0) = A_0$ нүктеде $u = f(x, y)$ функция екі рет дифференциалданса, онда осы нүктеде $f_{xy}^{(2)}$ және $f_{yx}^{(2)}$ дербес туындылары тең, яғни

$$f_{xy}^{(2)}(A_0) = f_{yx}^{(2)}(A_0).$$

Дәлелдеуі. $u = f(x, y)$ функциясы $A_0(x_0, y_0)$ нүктеде екі рет дифференциалданатын болғандықтан $f_x'(x, y)$ және $f_y'(x, y)$ дербес туындылары бар және олар A_0 нүктенің δ маңайында анықталған әрі олар осы нүктеде дифференциалданатын функциялар.

Мына өрнекті қарастырайық:

$$f(x_0+h,y_0+h)-f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0+h)+$$
$$+f(x_0,y_0)=\Phi, \tag{8.37}$$

мұндағы h санын $A_0(x_0+h,y_0+h)$ нүкте A_0 нүктенің δ маңайына тиісті болатындай өте аз сан етіп аламыз. (8.35) формуладағы Φ өрнекті $[x_0,x_0+h]$ сегментте дифференциалданатын x-ке тәуелді бір айнымалы $\varphi(x)=f(x,y_0+h)-f(x,y_0)$ функцияның $\Delta\varphi=\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)$ өсімшесі ретінде қарастыруға болады. Сондықтан, Лагранж формуласы ([1]. *(3.10)-формула*) бойынша (8.37)-формуланы

$$\Phi-\Delta\varphi=\varphi(x_0+\theta h)h=\left[f_x'(x_0+\theta h,y_0+h)-f_x'(x_0+\theta h,y)\right]h=$$
$$=\{\left[f_x'(x_0+\theta h,y_0+h)-f_x'(x_0,y_0)\right]-$$
$$-\left[f_x'(x_0+\theta h,y_0)-f_x'(x_0,y_0)\right]\}h \tag{8.38}$$

түрінде жазайық, мұндағы $\theta\in(0,1)$, $f_x'(x,y)$ дербес туынды A_0 нүктеде дифференциалданатын болғандықтан:

$$f_x'(x_0+\theta h,y_0+h)-f_x'(x_0,y_0)=$$
$$=f_{xx}^{(2)}(x_0,y_0)\cdot\theta h+f_{xx}^{(2)}(x_0,y_0)h+\alpha_1\theta h+\beta_1 h,$$

$$f_x'(x_0+\theta h,y_0)-f_x'(x_0,y_0)=f_{xx}^{(2)}(x_0,y_0)\theta h+\alpha_2\theta h,$$

мұндағы $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$ шексіз аз функциялар, егер $h\to 0$. Осы өрнектерді (8.38) формулаға қояйық:

$$\Phi=\left[f_{xx}^{(2)}(x_0,y_0)\cdot\theta h+f_{x-}^{(2)}(x_0,y_0)h+\alpha_1\theta h+\beta_1 h-\right.$$
$$-f_{xx}^{(2)}(x_0,y_0)\theta\eta-\alpha_2\theta h]h=[f_{xy}^{(2)}(x_0,y_0)h+$$
$$+\alpha_1\theta h+\beta_1 h-\alpha_2\theta h]h=[f_{xy}^{(2)}(x_0,y_0)+\alpha]h^2, \tag{8.39}$$

мұндағы $\alpha=\alpha_1\theta+\beta_1+\alpha_2\theta$ шексіз аз функциялар, егер $h\to 0$.

Осылайша, (8.37) формуладағы Φ өрнекті $[y_0,y_0+h]$ сегментте дифференциалданатын $\psi(y)=f(x_0+h,y)-f(x_0,y)$ (y-ке тәуелді функция) функцияның $\Delta\psi=\psi(y_0+h)-\psi(y_0)$ өсімшесі ретінде қарастыруға болады. Жоғарыдағыдай Лагранж формуласын және $f_y'(x,y)$ функциясының A_0 нүктеде дифференциалданатынын пайдаланып, Φ өрнек үшін

$$\Phi=\left[f_{yx}^{(2)}(x_0,y_0)+\beta\right]h^2, \tag{8.40}$$

теңдігін аламыз, мұндағы β шексіз аз функция, егер $h \to 0$ (8.39) мен (8.40) теңдіктердің оң жағын теңестіріп, $f_{xy}^{(2)}(x_0, y_0) + \alpha = f_{yx}^{(2)}(x_0, y_0) + \beta$ теңдігін аламыз, мұндағы α мен β шексіз аз функциялар болғандықтан, осыдан дәлелдеу керек теңдікті аламыз. Теорема дәлелденді.

8.21-теорема. Егер $A_0(x_0, y_0)$ нүктенің кейбір маңайында $u = f(x, y)$ функцияның f_x', f_y', $f_{xy}^{(2)}, f_{yx}^{(2)}$ дербес туындылары бар болса және $f_{xy}^{(2)}$ мен $f_{yx}^{(2)}$ дербес туындылары осы нүктеде үзіліссіз болса, онда

$$f_{xy}^{(2)}(x_0, y_0) = f_{yx}^{(2)}(x_0, y_0)$$

теңдігі орындалады.

Дәлелдеуі. Дәлелдеу үшін (8.37) теңдікті пайдаланайық. Біріншіден, (8.38) теңдіктегі $[f_x'(x_0 + \theta h, y_0 + h) - f_x'(x_0 + \theta h, y_0)]h$ өрнек $f_x'(x, y)$ функцияның $(x_0 + \theta h, y_0 + h)$ және $(x_0 + \theta h, y_0)$ нүктелердегі айырымы. Сондықтан, осы айырымға $[y_0, y_0 + h]$ сегментте Лагранж формуласын y айнымалыға қолданайық: $\Phi = f_{xy}^{(2)}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta_1 h)h^2$, $\theta_1 \in (0,1)$, мұндағы $f_{xy}^{(2)}$ функциясы $A_0(x_0, y_0)$ нүктеде үзіліссіз болғандықтан соңғы теңдіктен $\Phi = [f_{xy}^{(2)}(x_0, y_0) + \alpha(h)]h^2$ теңдігін аламыз, мұндағы $\alpha(h) \to 0$, егер $h \to 0$. Екіншіден, (8.38) теңдіктегі $[f_x'(x_0 + \theta h, y_0 + h) - f_x'(x_0 + \theta h, y_0)]h$ өрнек $f_y'(x, y)$ функциясының $(x_0 + h, y_0 + \theta_2 h)$ және $(x_0, y_0 + \theta_2 h)$ нүктелердегі айырымы. Осы айырымға $[x_0, x_0 + h]$ сегментте Лагранж формуласын x айнымалыға қолданайық әрі $f_{yx}^{(2)}$ функциясының $A_0(x_0, y_0)$ нүктеде үзіліссіздігін пайдаланайық, сонда:

$$\Phi = [f_{yx}^{(2)}(x_0, y_0) + \beta]h^2, \ \beta(h) \to 0, \ егер \ h \to 0.$$

Соңғы екі теңдікті теңестіріп, дәлелдеу керек теңдікті аламыз, себебі

$$\alpha(h) \to 0, \ \beta(h) \to 0, \ егер \ h \to 0.$$

Енді функцияның кез келген дербес туындысы, оны айнымалы бойынша дифференциалдау кезегіне тәуелсіздігін тұжырымдайтын теореманы келтірейік.

8.22-теорема. Егер $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функция $A_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ нүктеде n-рет дифференциалданса, онда осы нүктеде функцияның барлық n ретті аралас туындылары функцияны дифференциалдау кезегіне тәуелсіз.

Теореманың дәлелдеуін оқырмандарға ұсынамыз.

1-мысал. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, \quad x=0, y=0 \end{cases}$

функцияның $O(0,0)$ нүктеде $f_{xy}^{(2)}(x,y)$ дербес туындысы бар ма?

Шешуі. $x^2+y^2 \neq 0$ теңсіздікті қанағаттандыратын жиында f_x' дербес туындыны табайық:

$$f_x' = \frac{2y(x^2+y^2) - 4x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Енді дербес туындының анықтамасын пайдаланып, $O(0,0)$ нүктеде $f_x'(0,0)$ туындыны есептейік:

$$f_x'(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0,$$

$$f_{xy}^{(2)}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_x'(0,\Delta y) - f_x'(0,0)}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\dfrac{2(\Delta y)^3}{(\Delta y)^4}}{\Delta y} = 2 \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{(\Delta y)^2}.$$

Соңғы шек жоқ, сондықтан $O(0,0)$ нүктеде $u = f(x,y)$ функцияның $f_{xy}^{(2)}$ дербес туындысы да жоқ.

2-мысал. $f_{xy}^{(2)}(0,0) = f_{yx}^{(2)}(0,0)$ теңдігі орындала ма, егер

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x=0,\ y=0 \end{cases}$$

Шешуі. $x^2+y^2 \neq 0$ жиынында функцияның бірінші дербес туындыларын табайық:

$$f_x'(x,y) = \frac{(3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - 2x(x^3y - xy^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f'_y(x,y)=\frac{\left(x^3-3xy^2\right)\left(x^2+y^2\right)-2y\left(x^3y-xy^3\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=$$

$$=\frac{x\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2}-\frac{4x^3y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Енді $x=0, y=0$ нүктеде $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$ дербес туындылардың мәндерін туындының анықтамасын пайдаланып есептейік:

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0,$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0.$$

Дербес туындылардың $O(0,0)$ нүктедегі мәндерін ескеріп, осы нүктедегі аралас туындыларды есептейік:

$$f^{(2)}_{xy}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f'_x(0,\Delta y)-f'_x(0,0)}{\Delta y}=$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-\frac{(\Delta y)^3}{(\Delta y)^2}}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-(\Delta y)^3}{(\Delta y)^3}=-1,$$

$$f^{(2)}_{yx}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'_y(\Delta x,0)-f'_y(0,0)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{(\Delta x)^3}{(\Delta x)^2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^3}{(\Delta x)^3}=1$$

Сонымен, $O(0,0)$ нүктеде $f^{(2)}_{xy}(0,0)\neq f^{(2)}_{yx}(0,0)$ теңсіздік орындалады. Бұл мысалда, екінші ретті аралас туынды $O(0,0)$ нүктеде үзілісті, яғни осы нүктеде функцияның дифференциалдануының жеткілікті шарты орындалмайды. Шынында да, $x^2+y^2\neq 0$ жиынында

$$f^{(2)}_{xy}(x,y)=f^{(2)}_{yx}(x,y)=\frac{\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2}\left(1-\frac{8x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right).$$

Енді $n\to\infty$ болғанда $O(0,0)$ нүктеге ұмтылатын $\left\{A_n\left(\frac{a}{n};\frac{1}{n}\right)\right\}$ нүктелер тізбегін қарастырайық:

$$\lim_{n\to\infty}f^{(2)}_{xy}(A_n)=\lim_{n\to\infty}f^{(2)}_{yx}(A_n)=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a^2}{n^2}-\frac{1}{n^2}}{\frac{a^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}\left(1+\frac{\frac{8a^2}{n^2}\frac{1}{n^2}}{\left(\frac{a^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right)^2}\right)=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a^2-1}{a^2+1}\left(1+\frac{8a^2}{a^2+1}\right)=\frac{a^2-1}{a^2+1}\left(1+\frac{8a^2}{a^2+1}\right).$$

Демек, $O(0,0)$ нүктеде аралас туынды үзілісті.

3-мысал. $u = x^{y^2}$ функция үшін $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ теңдігі орындалатынын тексер.

Шешуі. Біріншіден, u функциядан x бойынша туынды алайық, яғни онда $y - const$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 x^{y^2-1}.$$

Екіншіден, $\frac{\partial u}{\partial x}$ функциядан y бойынша туынды алайық, яғни $x - const$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 2yx^{y^2-1} + y^2 x^{y^2-1}\ln x \cdot 2y = 2y^3 x^{y^2-1}\ln x + 2yx^{y^2-1}.$$

Енді u функциядан y бойынша дербес туынды алайық, яғни $x - const$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2}\ln x\, 2y = 2yx^{y^2}\ln x.$$

Соңғы $\frac{\partial u}{\partial y}$ функциядан x бойынша дербес туынды алайық, яғни $y - const$:

$$(y - const)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2y\left(y^2 x^{y^2-1}\ln x + x^{y^2}\frac{1}{x}\right) = 2y^3 x^{y^2-1}\ln x + 2yx^{y^2-1}.$$

Демек, аралас туындылар өздерінің анықталу жиынында $x \in (0,\infty)$, $y \in (-\infty,+\infty)$ өзара тең.

4-мысал. Егер $u = f(x,y)$ функция D дөңес облыста дифференциалданса және оның $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ дербес туындылары осы облыста шектелсе, онда функция осы облыста бірқалыпты үзіліссіз болатынын дәлелдейік (D **облыс дөңес** деп аталады, егер оның кез келген A_1 және A_2 нүктелерін қосатын кесінді толығымен осы облысқа тиісті болса, мысалы, жазықтықтағы дөңгелек, тіктөртбұрыш дөңес облыс болады).

Дәлелдеуі. Есептің шарты бойынша D облыста $|f_x^{'}(x,y)| \le C$, $|f_y^{'}(x,y)| \le C$ теңдіктері орындалсын, мұндағы $C>0$. Кез келген $\varepsilon>0$ санын алайық және $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2C}$ болсын. $A_1(x_1,y_1)$ және $A_2(x_2,y_2)$ нүктелері D дөңес облыстың кез келген нүктелері болсын және $\rho(A_1,A_2)<\delta$ теңсіздігі орындалсын. A_1 мен A_2 нүктелерін қосатын кесінді толығымен D облыста жататын болғандықтан $f(A_1)-f(A_2)$ айырымға Лагранж формуласын қолдануға болады:

$$f(A_1)-f(A_2)=f_x'(N)(x_1-x_2)+f_y'(N)(y_1-y_2).$$

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Екінші ретті дербес аралас туындылардың тең болу шарты.
2. Мына функцияның

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3xy}{x^2+3y^2}, & x^2+3y^2\ne 0,\\ 0, & x=0, y=0\end{cases}$$

$O(0,0)$ нүктеде $f_{xy}^{(2)}$-дербес туындысы бар ма?

8.15. Жоғарғы ретті дифференциалдар

Біз жоғарыда функцияның дифференциалын (**бірінші ретті дифференциалы** деп те аталады) du таңбамен белгіледік, енді қолайлы болу үшін оны δu таңбамен де белгілейтін боламыз, мысалы,

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$$

дифференциалын $\delta u=\dfrac{\partial u}{\partial x}\delta x+\dfrac{\partial u}{\partial y}\delta y+\dfrac{\partial u}{\partial z}\delta z$ таңбамен белгілейміз және оны да функцияның бірінші ретті дифференциалы (толық дифференциалы немесе дифференциалы) дейміз.

Бізге $u=f(x_1,x_2,...,x_m)$ функцияның $A(x_1,x_2,...,x_m)$ нүктедегі дифференциалы берілсін, ескі белгілеу бойынша:

$$du=\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial u}{\partial x_m}dx_m=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_k}dx_k. \qquad (8.41)$$

(8.41) формуланың оң жағындағы өрнек, $x_1,x_2,...,x_m$ аргументтерге тәуелді және $A(x_1,x_2,...,x_m)$ нүктеде дифференциалданатын функция болсын. Бұл ұйғарым орындалу үшін $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функция $A(x_1, x_2, ..., x_m)$ нүктеде екі рет дифференциалдануы жеткілікті, ал $x_1, x_2, ..., x_m$ аргументтер: не тәуелсіз айнымалы, не $t_1, t_2, ..., t_k$ тәуелсіз айнымалар бойынша екі рет дифференциалданатын функциялар болуы керек. Онда екі айнымалы $u = f(x, y)$ функция үшін (8.41) формуладан мына өрнекті қарастырайық:

$$\delta(du) = \delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) = \left(\delta\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \left(\delta\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\delta x \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\delta y\right)dx + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\delta y\right)dy =$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx\delta x + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\left(dy\delta x + dx\delta y)\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy\delta y.$$

Демек, $A(x_1, x_2, ..., x_m)$ нүктеде $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_m}$ дербес туындылар үзіліссіз болғандықтан (8.17-теорема) $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функцияда осы нүктеде үзіліссіз болады. Сондықтан $A(x_1, x_2, ..., x_m)$ нүктеде функцияның бірінші du дифференциалы бар, ал функция осы нүктеде екі рет дифференциалданатын болғандықтан (*8.17-теорема, 8.14-тақырыптағы анықтама және 8.19-8.22 теоремалар*) $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_m}$ дербес туындылардың осы нүктеде дифференциалданады. Олай болса, du дифференциалы $x_1, x_2, ..., x_m$ аргументтер бойынша дифференциалданады.

Анықтама. $\delta x_1 = dx_1, \delta x_2 = dx_2, ..., \delta x_m = dx_m$ орындалғанда (8.41) бірінші дифференциалдан алынған $\delta(du)$ дифференциалдың $A(x_1, x_2, ..., x_m)$ нүктедегі мәні функцияның осы нүктедегі **екінші ретті дифференциалы** деп аталады және ол d^2u таңбамен белгіленеді.

$$d^2u = \{\delta(du)\}\Big|_{\substack{\delta x_1 = dx_1 \\ \dots \\ \delta x_m = dx_m}} = \left\{\delta\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_k}dx_k\right)\right\}\Bigg|_{\substack{\delta x_1 = dx_1 \\ \dots \\ \delta x_m = dx_m}}.$$

Функцияның n-дифференциалын индуктивті жолмен анықтауға болады. Функцияның n ретті дифференциалының анықтамасын келтірейік, ол үшін $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функцияның $n-1$ ретті дифференциалы анықталсын әрі ол $d^{n-1}u$ таңбамен белгіленсін және функция $A(x_1, x_2, ..., x_m)$ айнымалы, не $t_1, t_2, ..., t_k$ тәуелсіз айнымалылар бойынша n рет дифференциалданатын функция болсын.

Анықтама. $\delta x_1 = dx_1, \delta x_2 = dx_2, ..., \delta x_m = dx_m$ орындалғанда $d^{n-1}u$ дифференциалдан алынған $\delta(d^{n-1}u)$ дифференциалдың $A(x_1, x_2, ..., x_m)$ нүктедегі мәні функцияның осы нүктедегі n **ретті дифференциалы** (қысқаша: n-**дифференциалы**) деп аталады және ол $d^n u$ таңбамен белгіленеді:

$$d^n u = \delta\left(d^{n-1}u\right)\Big|_{\substack{\delta x_1 = dx_1 \\ \dots \\ \delta x_m = dx_m}}.$$

Функцияның бірінші дифференциалынан екінші дифференциалын, ал екінші дифференциалынан үшінші дифференциалын, т.с.с. табамыз. Функцияның дифференциалдарын есептеу үшін алдымен негізгі екі жағдайды ажыратып алу керек:

функцияның $x_1, x_2, ..., x_m$ аргументтері тәуелсіз;

функцияның $x_1, x_2, ..., x_m$ аргументтері $t_1, t_2, ..., t_k$ тәуелсіз айнымалары бойынша сәйкесінше ретті дифференциалданатын функциялар.

Алдымен 1) жағдайды қарастырайық, яғни $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функцияның $x_1, x_2, ..., x_m$ аргументтері тәуелсіз айнымалар болсын, онда $dx_1, dx_2, ..., dx_m$ дифференциалдары $x_1, x_2, ..., x_m$ айнымаларға тәуелсіз болады.

Кез келген $A(x_1, x_2, ..., x_m)$ нүктедегі әрбір dx_k дифференциалды бір Δx_k өсімшеге ғана тең деп алуға болады, онда:

$$\delta(dx_k) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(dx_k)}{\partial x_i}\delta x_i = 0 \quad \left(d(dx_i) = 0\right),\ i = \overline{1,m}$$

теңдігі орындалады. Осы теңдіктен және дифференциалдау ережелерден (*8.12-тақырып*) $A(x_1, x_2, ..., x_m)$ нүктеде екі рет дифференциалданатын $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функция үшін төмендегі теңдіктер орындалады:

$$d^2u = \delta(du)\Big|_{\substack{\delta x_1 = dx_1 \\ \dots \\ \delta x_m = dx_m}} = \delta\left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx_k\right)\Bigg|_{\substack{\delta x_1 = dx_1 \\ \dots \\ \delta x_m = dx_m}} = \sum_{k=1}^{m} \delta\left[\frac{\partial u}{\partial x_k} dx_k\right]\Bigg|_{\substack{\delta x_1 = dx_1 \\ \dots \\ \delta x_m = dx_m}} =$$

$$
=\sum_{k=1}^{m}\left\{dx_k\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+\frac{\partial u}{\partial x_k}\delta(dx_k)\right\}\Bigg|_{\substack{\delta x_1=dx_1\\ \dots\ \dots\ \dots\\ \delta x_m=dx_m}}=\sum_{k=1}^{m}\left\{dx_k\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)\delta x_i\right\}\Bigg|_{\substack{\delta x_1=dx_1\\ \dots\ \dots\ \dots\\ \delta x_m=dx_m}}=
$$

$$
=\left[\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_k}\delta x_i\delta x_k\right]_{\substack{\delta x_1=dx_1\\ \dots\ \dots\ \dots\\ \delta x_m=dx_m}}=\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_k}dx_i dx_k. \qquad (8.42)
$$

Сонымен, егер функцияның $x_1, x_2,...,x_m$ аргументтері тәуелсіз айнымалар болса, онда $A(x_1, x_2,..., x_m)$ нүктеде екі рет дифференциалданатын $u = f(x_1, x_2,..., x_m)$ функция үшін

$$
d^2u=\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_k}dx_i dx_k \qquad (8.43)
$$

теңдігі орындалады, мұнда біз екі рет дифференциалданатын функцияның аралас екінші туындысы дифференциалдау кезегіне тәуелсіз болатындығын ескердік.

Осы курстың *II томында* [12], $t_1, t_2,...,t_k$ айнымаларға тәуелді m айнымалы функция

$$
\Phi=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}a_{ik}t_i t_k
$$

квадрат пішін (форма) деп аталады, мұндағы a_{ik} нақты сандар (коэффициенттер) және ол **симметриялы** деп аталады, егер $a_{ik} = a_{ki}$ болса, $i=\overline{1,m}, k=\overline{1,m}$.

Демек, егер $u = f(x_1, x_2,..., x_m)$ функцияның $x_1, x_2,...,x_m$ аргументтері тәуелсіз айнымалар болса, ал $A(x_1, x_2,..., x_m)$ нүктеде функция екі рет дифференциалданса, онда A нүктеде екінші дифференциал $dx_1, dx_2,...,dx_m$ айнымаларға тәуелді симметриялы квадрат пішін арқылы анықталады, ал оның коэффициенттері сәйкес A нүктедегі екінші ретті дербес туындыларға тең.

(8.30)-бен (8.41) формулалар символды түрде былай белгіленеді:

$$
d=dx_1\frac{\partial}{\partial x_1}+dx_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\dots+dx_m\frac{\partial}{\partial x_m},
$$

$$
d^2=\left(dx_1\frac{\partial}{\partial x_1}+dx_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\dots+dx_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^2.
$$

Онда (8.43) формуланы мына түрде жазуға болады:

$$d^2u = \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + dx_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^2 u. \quad (8.44)$$

Екі айнымалы функция үшін жоғарыдағы анықтаманы мына түрде келтіруге болады: $A_0(x_0, y_0)$ нүктедегі функцияның **екінші ретті дифференциалы** (қысқаша **екінші дифференциалы)** деп осы нүктеде du дифференциалдан алынған дифференциалды айтамыз және оны есептегенде ол мына шарттарды қанағаттандыруы керек:

а) du дифференциалын тәуелсіз x, y айнымалыларға тәуелді функция деп қарастырамыз, яғни du дифференциалын есептегенде dx пен dy-ті тұрақты көбейткіш ретінде қарастырамыз:

ә) $\frac{\partial u}{\partial x} A(x, y)$ пен $\frac{\partial u}{\partial y} A(x, y)$ функциялардан дифференциал табу үшін тәуелсіз x пен y айнымалардың өсімшелерін du дифференциалды есептегендегі өсімшелерге тең етіп аламыз, яғни ол өсімшелер dx пен dy-ке тең.

Осы анықтамадан функцияның $A_0(x_0, y_0)$ нүктедегі екінші дифференциалы мына түрде анықталады:

$$d^2u|_{A_0} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(A_0)dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(A_0)dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(A_0)dy^2$$

мұндағы $dx^2 = (dx)^2,\ dy^2 = (dy)^2$.

Математикалық индукция әдісін пайдаланып, $A_1(x_1, x_2, ..., x_m)$ нүктеде n рет дифференциалданатын $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функцияның $x_1, x_2, ..., x_m$ аргументтері тәуелсіз болса, онда оның n-дифференциалын мына формуладан анықтаймыз:

$$d^n u = \sum_{i_1=1}^{m} \sum_{i_2=1}^{m} \ldots \sum_{i_n=1}^{m} \frac{\partial^n u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_n}} dx_{i_1} dx_{i_2} \ldots dx_{i_n},$$

ал оның символдық түрі былай жазылады:

$$d^n u = \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + dx_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^n u \quad (8.45)$$

Енді 2)-жағдайды қарастырайық, яғни $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функцияның $x_1, x_2, ..., x_m$ аргументтері $t_1, t_2, ..., t_k$ тәуелсіз айнымалылар бойынша $A_1(x_1, x_2,\ ..., x_m)$ нүктеде екі рет дифференциалдансын. Бұл жағдайда функцияның екінші дифференциалының жазылуы бірінші жағдайдағыдай емес басқаша болады. Шынында да, 1-жағдайдағы (8.42)-формуланы осы жағдай үшін жазайық:

$$d^2u=\delta(du)\Big|_{\substack{\delta x_1=dx_1\\ \dots\ \dots\ \dots\\ \delta x_m=dx_m}}=\sum_{k=1}^{m}\left\{dx_k\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+\frac{\partial u}{\partial x_k}\delta(dx_k)\right\}\Bigg|_{\substack{\delta x_1=dx_1\\ \dots\ \dots\ \dots\\ \delta x_m=dx_m}}=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\left\{dx_k\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)\delta x_i\right\}\Bigg|_{\substack{\delta x_1=dx_1\\ \dots\ \dots\ \dots\\ \delta x_m=dx_m}}+\sum_{k=1}^{m}\left\{\frac{\partial u}{\partial x_k}\delta(dx_k)\right\}\Bigg|_{\substack{\delta x_1=dx_1\\ \dots\ \dots\ \dots\\ \delta x_m=dx_m}}.$$

$u=x_k$ функцияның екінші дифференциалының анықтамасы бойынша мына теңдікті аламыз:

$$\delta(dx_k)\Big|_{\substack{\delta x_1=dx_1\\ \dots\ \dots\ \dots\\ \delta x_m=dx_m}}=d^2x_k,\qquad k=\overline{1,m}.$$

Осы теңдікті пайдаланып, функцияның екінші дифференциалын мына түрде жазуға болады:

$$d^2u=\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_k}dx_idx_k+\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial x_k}d^2x_k=$$

$$=\left(dx_1\frac{\partial}{\partial x_1}+dx_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\dots+dx_m\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^2u+$$

$$+\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}d^2x_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}d^2x_2+\dots+\frac{\partial u}{\partial x_m}d^2x_m\right)\qquad(8.46)$$

Енді функцияның (8.41) бірінші дифференциалын (8.46) екінші дифференциалымен салыстырсақ, онда екінші дифференциал инвариантты бола алмайтынын көреміз. Сондықтан функцияның басқа дифференциалдары инвариантты бола алмайды.

Дегенмен де, кейбір жағдайларда (2-жағдай үшін) функцияның n-дифференциалының (8.45) символдық түрі сақталады: егер $A_1(x_1,x_2,...,x_m)$ нүктеде $u=f(x_1,x_2,...,x_m)$ функция n-рет дифференциалданса, ал оның $x_1,x_2,...,x_m$ аргументтері $t_1,t_2,...,t_k$ тәуелсіз айнымалылар арқылы сызықты тәуелсіз болса, яғни

$$x_i=a_{i0}+a_{i1}t_1+a_{i2}t_2+\dots+a_{ik}t_k,\qquad k=\overline{1,m},$$

онда функцияның осы нүктедегі n дифференциалы үшін (8.45) символдық түрі сақталады. Бұл жағдайда, x_i функцияның n-дифференциалын мына формуладан анықтаймыз:

$$d^2x_i = \left(dt_1 \frac{\partial}{\partial t_1} + dt_2 \frac{\partial}{\partial t_2} + ... + dt_k \frac{\partial}{\partial t_k} \right)^n x_i .$$

Екі айнымалы $u = f(x, y)$ функция үшін математикалық индукция әдісті пайдаланып төмендегі теңдіктерді дәлелдеуге болады:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy,$$

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial u}{\partial x} d^2x + \frac{\partial u}{\partial y} d^2y =$$

$$= \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 u + \left(\frac{\partial u}{\partial x} d^2x + \frac{\partial u}{\partial y} d^2y \right).$$

$$d^nu = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} \right)^n u + \left(\frac{\partial u}{\partial x} d^nx + \frac{\partial u}{\partial y} d^ny \right).$$

Мысал. Төмендегі функциялардың бірінші және екінші дифференциалдарын табайық:

$$u = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right);$$

$$u = f(\xi, \eta), \quad \xi = x + y, \eta = x - y;$$

3) $\quad u = f(x, y, z), \ x = t, y = t^2, \ z = t^3.$

Шешімі. 1) $u = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ функцияны күрделі функция деп дифференциалдайық:

$$du = f' d\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) =$$

$$= f' \left(\frac{\partial\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)}{\partial x} dx + \frac{\partial\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)}{\partial y} dy \right) =$$

$$= f' \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} dy \right) = f' \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$d^2u = d(du) = d(f') \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + f' d\left(\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right),$$

$$d(f') = f'' d\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = f'' \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$d\left(\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \left(\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)'_x dx + \left(\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)'_y dy =$$

$$= \frac{dx\sqrt{x^2+y^2} - (xdx+ydy)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}dx +$$

$$+ \frac{dy\sqrt{x^2+y^2} - (xdx+ydy)\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}dy =$$

$$= \frac{(x^2+y^2)dx - x^2dx - xydy}{\sqrt{(x^2+y^2)}}dx + \frac{(x^2+y^2)dy - y^2dy - xydx}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\left(y^2dx^2 - 2xydxdy + x^2dy^2\right) = \frac{(ydx-xdy)^2}{\sqrt{(x^2+y^2)}}.$$

d^2u өрнектің оң жағына қояйық, сонда

$$d^2u = f''\frac{(xdx+ydy)^2}{x^2+y^2} + f'\frac{(ydx-xdy)^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, \quad x^2+y^2 \neq 0.$$

2) $u = f(\xi,\eta)$ функцияның аргументтері x пен y-ке тәуелді сызықты функция болғандықтан оның екінші дифференциалының символдық түрі сақталады. Сондықтан оның екінші дифференциалын мына формуладан есептейміз:

$$du = f_x' d\xi + f_y' d\eta.$$

$$d^2u = f_{xx}^{(2)}d\xi^2 + 2f_{xy}^{(2)}d\xi d\eta + f_{yy}^{(2)}d\eta^2,$$

$$d\xi = d(x+y) = (x+y)_x' dx + (x+y)_y' dy = dx + dy,$$

$$d\eta = d(x-y) = (x-y)_x' dx + (x-y)_y' dy = dx - dy.$$

Сонда:

$$d^2u = f_{xx}^{(2)}(dx+dy)^2 + 2f_{xy}^{(2)}\left(dx^2+dy^2\right) + f_{yy}^{(2)}(dx-dy)^2.$$

3) Бірінші және екінші дифференциалдарын мына формуладан анықтаймыз:

$$du = f_x' dx + f_y' dy + f_z' dz,$$

$$d^2u = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}dxdz + + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}dydz +$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2 + \frac{\partial f}{\partial x}d^2x + \frac{\partial f}{\partial y}d^2y + \frac{\partial f}{\partial z}d^2z,$$

мұндағы $dx = \frac{\partial x}{\partial t}dt$, $dy = \frac{\partial y}{\partial t}dt$, $dz = \frac{\partial z}{\partial t}dt$.

Сонда:

$$du = f_x^{'}dt + f_y^{'}2tdt + f_z^{'}3t^2dt,$$

$$d^2u = f_{xx}^{(2)}dt^2 + 4f_{yy}^{(2)}tdt^2 + 6f_{xz}^{(2)}t^2dt^2 +$$
$$+12f_{yz}^{(2)}t^3dt^2 + 4f_{yy}^{(2)}t^2dt^2 + 9f_{zz}^{(2)}t^4dt^2.$$

Тапсырмалар

Төмендегі функциялардың бірінші және екінші дифференциалдарын табыңдар:

1. $u = f\left(\sqrt{x^2 - 3y^2}\right)$;
2. $u = f(x, y, z)$, $x = t^2$, $y = t^3$, $z = t$.
3. $u = sin\frac{xz}{y}$, $x = t^2$, $y = t^3$, $z = t$.
4. $u = sin^2 xyz$, $x = t$, $y = t - 2$, $z = t^2$.

8.16. Тейлор формуласы

Нүктенің маңайында көп айнымалы функцияның $n+1$ ретке дейінгі барлық дербес туындылары үзіліссіз болса, онда функцияны бір айнымалы функция сияқты көпмүшелікке жіктеуге болады. $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функцияның $A_1(x_1, x_2, ..., x_m)$ нүктедегі n-дифференциалын $d^n u|_A$ таңбамен белгілейік.

8.23-теорема. Егер $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функция $A_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ нүктенің кейбір ε маңайында анықталса және ол осы маңайда $n+1\,(n \geq 0)$ рет дифференциалданса, онда функцияның $A(x_1, x_2, ..., x_m)$ нүктедегі $\Delta u = f(A) - f(A_0)$ толық өсімшесін мына түрде жазуға болады:

$$\Delta u = du|_{A_0} + \frac{1}{2!}d^2u|_{A_0} + ... + \frac{1}{n!}d^n u|_{A_0} + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}u|_N, \qquad (8.47)$$

мұндағы N нүкте A_0 нүктенің ε маңайындағы нүкте, ал dx_i өрнек x_i айнымалының дифференциалы және ол $\Delta x_i = x_i - x_i^0$ өсімшеге тең, $d^k u|_{A_0}$, $d^{k+1}u|_N$ өрнектері dx_i дифференциалдары арқылы өрнектеледі. (8.47) формула $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функцияның A_0 нүктедегі **Лагранж ұсынған қалдық мүше түріндегі Тейлор** (қысқаша: **Лагранж түрдегі Тейлор) формуласы** деп аталады, ал

$$\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}u\,|_N = r(\Delta x, \Delta y)$$

мүше **Лагранж ұсынған қалдық мүше** деп аталады. $u = f(x, y)$ екі айнымалы үшін (8.47)-Тейлор формуласы мына түрде жазылады (жіктелінеді):

$$\Delta u = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$

$$= \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}(\Delta y)^2\right] +$$

$$+\frac{1}{3!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(x_0, y_0) + \dots + \frac{1}{n!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0, y_0) +$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y),$$

мұндағы $\theta \in (0; 1)$, $x_0 = x_1^0$, $y_0 = y_2^0$.

Дәлелдеуі. $A_0(x_0, y_0)$ нүктенің ε маңайынан $N(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ нүктені алып, осы екі нүктені түзу сызықпен қосайық. Сонда, осы түзудің бойындағы кез келген нүктенің координаттары жаңа t айнымалыға тәуелді сызықты функция болады:

$$x = x_0 + t\Delta x, \; y = y_0 + t\Delta y \tag{8.48}$$

және NA_0 кесіндідегі кез келген нүктеге $[0; 1]$ сегменттен t айнымалының мәні сәйкес келеді. $t = 0$ мәнге NA_0 кесіндідегі N нүкте, ал $t = 1$ мәнге A_0 нүкте сәйкес келеді. Теореманың шарты бойынша $u = f(x, y)$ функция A_0 нүктенің ε маңайында $n+1$ рет дифференциалданатын болғандықтан, ол NA_0 кесіндінің бойында t айнымалыға тәуелді күрделі функция болады әрі $[0; 1]$ сегментте берілген осы функцияны $F(t)$ деп белгілейік, яғни $F(t) = = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$, онда:

$$\Delta u = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) - f(x_0, y_0) = F(t) - F(0), \quad t \in [0; 1]$$

$$F(t) - F(0) = F'(0)t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{F^n(0)}{n!}t^n + \frac{F^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}t^{n+1}. \tag{8.49}$$

Енді $F(t)$ функцияның n ретті туындыларын $f(x, y)$ функциясының туындылары арқылы өрнектейік және (8.49) функцияның Тейлор формуласын алайық. Ол үшін (8.48) формуланы $f(x, y)$

функцияға қойып, күрделі функцияны қарастырайық және (8.29) формуланы пайдаланып, бір аргументке тәуелді $F(t)$ күрделі функцияның туындыларын табамыз, мұнда (8.48) формуладағы функцияның сызықты функция болатындығын көреміз (*8.15-тақырып*):

$$F'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}=\frac{\partial f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)}{\partial x}\Delta x+$$

$$+\frac{\partial f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)}{\partial y}\Delta y,$$

$$F''(t)=\frac{\partial^2 f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)}{\partial x^2}\Delta x^2+2\frac{\partial^2 f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y+$$

$$+\frac{\partial^2 f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)}{\partial y^2}\Delta y^2=\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\left(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y\right).$$

Математикалық индукция әдісті пайдаланып:

$$F^{(n)}(t)=\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f\left(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y\right)$$

теңдікті дәлелдеуге болады. Осыдан, $t=0$ болғанда:

$$F'(0)=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y=\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)$$

$$F''(0)=\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0),$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$F^{(n)}(0)=\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0). \tag{8.50}$$

Осылайша жалғастырып және t айнымалыны θt-ға алмастырайық, сонда:

$$F^{(n+1)}(\theta t)=\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+t\theta\Delta x, y_0+t\theta\Delta y). \tag{8.51}$$

Енді (8.50), (8.51) формулаларды (8.49) формулаға қойып, ондағы $t=1$ деп алсақ дәлелдеу керек теңдікті аламыз:

$$\Delta u=F(1)-F(0)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0,y_0)+$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y), \quad \theta\in(0;1).$$

Теорема дәлелденді.

Біз жоғарыда Лагранж түрдегі Тейлор формуласымен таныстық, осы сияқты Пеано ұсынған және интеграл түрдегі Тейлор формулалары бар. Енді осы формулаларды атап өтейік.

8.24-теорема. Егер $u=f(x_1,x_2,...,x_m)$ функция $A_0(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)$ нүктенің ε маңайында анықталса және осы маңайда $n+1\,(n\geq 1)$ рет дифференциалданса, ал $A_0(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)$ нүктенің өзінде n рет дифференциалданса, онда ε маңайдың кез келген $A(x_1,x_2,...,x_m)$ нүктесінде мына теңдік орындалады:

$$f(x_1,x_2,...,x_m)=f(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left[\left(x-x_1^0\right)\frac{\partial}{\partial x_1}+\left(x-x_2^0\right)\frac{\partial}{\partial x_2}+...+\left(x-x_m^0\right)\frac{\partial}{\partial x_m}\right]^k\times \tag{8.52}$$

$$\times f(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)+O(\rho^n),$$

мұндағы

$$\rho=\sqrt{(\Delta x_1)^2+(\Delta x_2)^2+...+(\Delta x_m)^2},\ O(\rho^n)$$

шексіз аз функция, егер $\rho\to 0$ (немесе $\Delta x_i\to 0,\ i=\overline{1,m}$).

(8.52) формула **Пеано ұсынған қалдық мүше түріндегі Тейлор формуласы** деп аталады, ал $O(\rho^n)$**-Пеано ұсынған қалдық мүше** деп аталады.

1.25-теорема. Егер $u=f(x_1,x_2,...,x_m)$ функция *8.23-теореманың* барлық шарттарын қанағаттандырса және де $A_0(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)$ нүктенің ε маңайында функцияның барлық $n+1$ ретті туындылары үзіліссіз болса, онда (8.47) пен (8.52) Тейлор фоормулаларындағы қалдық мүшені мына түрде жазуға болады.

$$r_{n+1}=\frac{1}{n!}\int_0^1(1-t)^n\left[\sum\left(x_i-x_i^0\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\right]^{n+1}\times$$

$$\times f\left(x_1^0+t\left(x_1-x_1^0\right), x_2^0+t\left(x_2-x_2^0\right),..., x_m^0+\left(tx_m-x_m^0\right)\right)dt.$$

Бұл қалдық мүше **интеграл түрдегі қалдық мүше** деп аталады.

Мысал. $A_0(1;1;1)$ нүктеде $u=x^3+y^3+z^3-3xyz$ функцияны Тейлор формуласы бойынша жіктейік.

Шешуі. Функцияның дербес туындыларын табайық:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3yz\,,\ \frac{\partial u}{\partial y}=3y^2-3xz\,,\ \frac{\partial u}{\partial z}=3z^2-3xy\,,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6x\,,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6y\,,\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=6z\,,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=-3z\,,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=-3y\,,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=-3x\,,\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z\partial x}=-3,\ \frac{\partial^3 u}{\partial x\partial z\partial y}=-3,$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}=0\,,\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}=0\,,\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}=0\,,\ \frac{\partial^3 u}{\partial z^2\partial x}=0\,,\ \frac{\partial^3 u}{\partial z^2\partial y}=0,\ \frac{\partial^3 u}{\partial y^2\partial x}=0.$$

Функцияның қалған дербес туындылары $(n>3)$ нөлге тең, сондықтан берілген функция үшін Тейлор формуласын мына түрде жазуға болады:

$$u(x,y,z)=f(A_0)+\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)f(A_0)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left(dx\,\frac{\partial}{\partial x}+dy\,\frac{\partial}{\partial y}+dz\,\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f(A_0)+$$

$$+\frac{1}{3!}\left(dx\,\frac{\partial}{\partial x}+dy\,\frac{\partial}{\partial y}+dz\,\frac{\partial}{\partial z}\right)^3 f(A_0),$$

мұндағы $dx=x-1,\ f(A_0)=f(1;1;1)=0,$

$$df(A_0)=\left[\left(3x^2-3yz\right)+\left(3y^2-3xz\right)+\left(3z^2-3xy\right)\right]_{\substack{x=1\\y=1\\z=1}}=0,$$

$$d^2f(x_0,y_0)=6\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2-\right.$$
$$\left.-(x-1)(y-1)-(x-1)(z-1)-(y-1)(z-1)\right],$$

$$d^3f(A_0)=\frac{\partial^3 f(A_0)}{\partial x^3}dx^3+\frac{\partial^3 f(A_0)}{\partial y^3}dy^3+$$

$$+\frac{\partial^3 f(A_0)}{\partial z^3}dz^3+3\frac{\partial^3 f(A_0)}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+$$

$$+3\frac{\partial^3 f(A_0)}{\partial x^2\partial z}dx^2dz+3\frac{\partial^3 f(A_0)}{\partial y^2\partial x}dy^2dx+$$

$$+3\frac{\partial^3 f(A_0)}{\partial y^2\partial z}dy^2dz+3\frac{\partial^3 f(A_0)}{\partial z^2\partial x}dz^2dx+$$

$$+3\frac{\partial^3 f(A_0)}{\partial z^2\partial y}dz^2dy+6\frac{\partial^3 f(A_0)}{\partial x\partial y\partial z}dxdydz=$$

$$=6(x-1)^3+6(y-1)^3+6(z-1)^3-18(x-1)(y-1)(z-1).$$

Сонда іздестіріп отырған Тейлор формула мына түрде анықталады:

$$u = 3\left[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - (x-1)(y-1) - \right.$$
$$\left. -(x-1)(z-1) - (y-1)(z-1)\right] +$$
$$+(x-1)^3 + (y-1)^3 + (z-1)^3 - 3(x-1)(y-1)(z-1).$$

8.17. Функцияның локальды экстремумының қажетті белгісі

E кеңістігіндегі $A_0\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0\right)$ нүктенің кейбір маңайында анықталған $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функцияны қарастырайық.

Анықтама. Егер $A_0\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0\right)$ нүктенің ε маңайындағы кез келген $A(x_1, x_2, ..., x_m)$ нүкте үшін $f(A) < f(A_0)$ теңсіздігі орындалса, онда $A_0\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0\right)$ нүктеде $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функцияның **локальды максимумы бар** деп аталады; ал егер $f(A) > f(A_0)$ теңсіздігі орындалса, онда $A_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ нүктеде функцияның **локальды минимумы бар** деп аталады.

Демек, A_0 нүктеде функцияның локальды максимумы (минимумы) бар болса, онда A_0 нүктенің ε маңайында

$$f(A) - f(A_0) < 0 \; (f(A) - f(A_0) > 0)$$

теңсіздігі орындалады. Егер A_0 нүктенің ε маңайында функцияның локальды максимумы (минимумы) бар болса, онда A_0 нүкте функцияның **максимум (минимум) нүктесі** деп аталады.

Анықтама. $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функцияның $A_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ нүктеде не локальды максимумы, не локальды минимумы бар болса, онда A_0 нүктеде функцияның **локальды экстремумы бар** деп аталады, ал бұл жағдайда A_0 нүкте **функцияның экстремум нүктесі** деп аталады.

Енді нүктеде $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функцияның локальды экстремумының қажетті белгісін қарастырайық.

8.26-теорема (қажетті белгісі). Егер $A_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ нүктеде $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функцияның барлық $x_1, x_2, ..., x_m$ айнымалары бойынша алынған бірінші ретті дербес туындылары және осы нүктеде оның локальды экстремумы бар болса, онда функцияның $A_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ нүктедегі барлық бірінші ретті дербес туындылары нөлге тең, яғни

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(A_0) = \frac{\partial u}{\partial x_2}(A_1) = \ldots = \frac{\partial u}{\partial x_m}(A_m) = 0. \qquad (8.53)$$

Дәлелдеуі. Алдымен, $\frac{\partial u}{\partial x_1}(A_0) = 0$ теңдікті дәлелдейік, ал қалған теңдіктер осы сияқты дәлелденеді. $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функцияның $x_1, x_2, ..., x_m$ аргументтерін тағайындайық әрі олар A_0 нүктенің сәйкес координаттарына тең болсын, яғни $x_2 = x_2^0,\ x_3 = x_3^0, ..., x_m = x_m^0$. Онда $u = f(x_1, x_2^0, ..., x_m^0)$ функция x_1-ге тәуелді бір аргументті функция болады және оның $x_1 = x_1^0$ нүктедегі туындысы $\frac{\partial u}{\partial x_1}(A_0)$ дербес туындыға тең, яғни

$$u' = \frac{\partial u}{\partial x_1}(A_0).$$

Теореманың шарты бойынша, $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функцияның A_0 нүктеде локальды экстремумы бар болғандықтан $u = f(x_1, x_2^0, ..., x_m^0)$ бір айнымалы функцияның да x_0^1 нүктеде локальды экстремумы бар. Олай болса, Ферма теоремасы ([1], *3.6-тақырып*) бойынша, $u = f(x_1, x_2^0, ..., x_m^0)$ бір айнымалы функцияның $x = x_0^1$ нүктедегі туындысы нөлге тең, онда

$$u' = \frac{\partial u}{\partial x_1}(A_0)$$

дербес туынды да нөлге тең. Теорема дәлелденді.

Жоғарыдағы функцияның локальды экстремумының қажетті белгісін мына түрде тұжырымдауға болады: егер $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функция A_0 нүктеде дифференциалданса әрі осы нүктеде оның локальды экстремумы бар болса, онда A_0 нүктеде $du|_{A_0}$ дифференциалы нөлге тең. Шынында да,

$$du|_{A_0} = \frac{\partial u}{\partial x_1}(A_0)dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}(A_0)dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(A_0)dx$$

өрнегі (8.53) теңдіктер бойынша кез келген $dx_1, dx_2, .., dx_m$ үшін нөлге тең.

Ескерту. (8.53) формуладағы теңдіктер $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функцияның A_0 нүктеде локальды экстремумының тек қажетті белгісі ғана, ол функцияның жеткілікті белгісі бола алмайды (мысалды қара).

Анықтама. $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функцияның $x_1, x_2, ..., x_m$ аргументтері бойынша алынған барлық бірінші ретті дербес туындылары $A_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ нүктеде нөлге тең болса, онда A_0 нүкте **функцияның стационар нүктесі** деп аталады.

Жоғарыда айтылғандардан, $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функция дифференциалданатын $A_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ нүкте стационар нүкте болу үшін (8.53) формуладағы теңдіктер осы нүктеде орындалуы керек.

Демек, $u(x, y) = f(x, y)$ функция $A_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ экстремум нүктеде дифференциалданса, онда $A_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ нүкте функцияның стационар нүктесі болады, бірақ осы тұжырымның кері тұжырымы орындалмайды, яғни функция дифференциалданатын стационар A_0 нүкте осы функцияның экстремум нүктесі болуы да, болмауы да мүмкін.

Мысалы, $u(x, y) = xy$ функцияның $O(0,0)$ нүктеде дербес туындылары бар, бірақ осы нүктеде экстремумы жоқ. Шынында да, функцияның $O(0,0)$ нүктенің өзіндегі мәні нөлге тең, ал осы нүктенің маңайындағы нүктелерде функция әрі оң, әрі теріс мәндерді қабылдайды, ал

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

функцияның бірінші дифференциалын нөлге теңестіретін нүктелер, осы функцияның **локальды экстремумы бар болуы мүмкін нүктелер** деп аталады. Локальды экстремумы бар болуы мүмкін нүктелерді табу үшін төмендегі m белгісізі m теңдіктер жүйені шешсек жеткілікті:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_m)}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_m)}{\partial x_2} = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \dfrac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_m)}{\partial x_m} = 0. \end{cases}$$

8.18. Функцияның локальды экстремумының жеткілікті белгісі

Біз *8.15-тақырыпта* (1-жағдай) екі рет дифференциалданатын $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функцияның $x_1, x_2, ..., x_m$ аргументтері не тәуелсіз айнымалы, не басқа айнымалыға тәуелді сызықты функция болса, онда функцияның екінші дифференциалын $dx_1, dx_2, ..., dx_m$ аргументтерге тәуелді квадрат пішін (форма) арқылы өрнектеп жазуға болатыны белгілі:

$$d^2u(A_0) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}(A_0)dx_i dx_k, \tag{8.54}$$

мұндағы

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}(A_0) = a_{ik},\ dx_i = t_i, dx_k = t_k.$$

Функцияның локальды экстремумының жеткілікті белгісін келтірмес бұрын, сызықты алгебра курсындағы ([12], *VI тарау, II том*) анықтамалар мен теоремаға тоқталайық.

Анықтама. $h_1, h_2, ..., h_m$ айнымалыларға тәуелді

$$\Phi(h_1, h_2, ..., h_m) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} a_{ik} h_i h_k \tag{8.55}$$

квадрат пішін **оң анықталған (теріс анықталған)** деп аталады, егер бір мезгілде барлығы нөлге тең емес $h_1, h_2, ..., h_m$-ның мәндерінде квадрат пішіннің мәні **қатаң оң (қатаң теріс)** болса.

Егер (8.55) квадрат пішін не оң, не теріс анықталған болса, онда ол **анықталған (немесе таңбалы анықталған)** деп аталады.

Егер (8.55) квадрат пішін әрі оң мәнді, әрі теріс мәнді қабылдаса, онда ол **анықталмаған (таңбасы айнымалы)** деп аталады.

Квадрат матрицаны қарастырайық:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \tag{8.56}$$

Симметриялы $(a_{ik} = a_{ki})$ B матрицаның **негізгі миноры** деп мына анықтауыштарды айтамыз:

$$B_1 = a_{11},\quad B_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ B_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots,$$

$$B_m = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}. \qquad (8.57)$$

Сильвестр теоремасы. 1. (8.55) симметриялы квадрат форма оң анықталған квадрат пішін болу үшін (8.56) матрицаның барлық негізгі минорлары қатаң оң болуы қажетті әрі жеткілікті, яғни

$$B_1 > 0, B_2 > 0, \dots, B_m > 0;$$

2. (8.55) симметриялы квадрат форма теріс анықталған квадрат пішін болу үшін (8.56) матрицаның негізгі минорының таңбалары ауыспалы болуы қажетті әрі жеткілікті (мысалы, $B_1 < 0$ болсын), яғни $B_1 > 0, B_2 > 0, B_3 > 0, \dots$

8.27-теорема (экстремумның жеткілікті белгісі). $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $A_0\left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0\right)$ нүктенің кейбір маңайында бір рет дифференциалдансын, екі рет осы нүктенің өзінде дифференциалдансын және $A_0\left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0\right)$ стационар нүкте болсын. Егер функцияның екінші дифференциалы $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$ айнымалар бойынша оң анықталған (теріс анықталған) (8.52) квадрат формаға өрнектелсе, онда функцияның $A_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нүктеде локальды минимумы (максимумы) бар. Егер функцияның екінші дифференциалы таңбасы айнымалы квадрат пішінге өрнектелсе, онда функцияның $A_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нүктеде локальды экстремумы жоқ.

Дәлелдеуі. Алдымен теореманың бірінші тұжырымын дәлелдейік, яғни анықтық үшін, функцияның екінші (8.54) дифференциалы $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$ айнымалар арқылы оң анықталған квадрат пішінге өрнектелсе, онда $A_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нүктеде функцияның локальды минимумы бар болатынын дәлелдейік. $A_0(x_1^0 + dx_1, x_2^0 + dx_2, \dots, x_m^0 + dx_m)$ нүкте $A_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ стационар нүктенің маңайындағы нүкте болсын. Функцияны $A_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нүктенің маңайында қалдық мүшені Пеано ұсынған Тейлор формуласына жіктейік және $n = 2$ болсын:

$$\Delta u = f(\bar{A}) - f(A_0) = du(A_0) + \frac{1}{2} d^2 u(A_0) + O\left(\rho^2\right), \qquad (8.58)$$

мұндағы $du|_{A_0}, d^2u|_{A_0}$ өрнектер x_i айнымалының dx_i дифференциалы арқылы анықталады және $dx_i = x_i - x_i^0$, $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + ... + (\Delta x_m)^2}$. Теореманың шарты бойынша A_0 стационар нүкте, яғни $\frac{\partial u}{\partial x_i}(A_0) = 0$, $i = \overline{1,m}$, онда функцияның бірінші дифференциалы $A_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ нүктеде нөлге тең:

$$du|_{A_0} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_m} dx_m \right)\Bigg|_{A_0} = 0.$$

Онда (8.54) формуланы пайдаланып, (8.56) Тейлор формуланы мына түрде жазуға болады:

$$\Delta u = f(A) - f(A_0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} dx_i dx_k + O(\rho^2), \tag{8.59}$$

(8.57) теңдіктегі $\rho \to 0$ болғанда оның оң жағындағы өрнектің оң болатынын дәлелдесек жеткілікті, яғни $A_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ нүктенің жеткілікті аз маңайында $\Delta u = f(A) - f(A_0)$ айырымы оң болады, онда функцияның осы нүктеде локальды минимумы бар. Ол үшін (8.59) формуланы түрлендірейік:

$$\Delta u = \frac{\rho^2}{2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \frac{dx_i}{\rho} \frac{dx_k}{\rho} + O(\rho^2) =$$

$$= \rho^2 \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \frac{dx_i}{\rho} \frac{dx_k}{\rho} + \alpha(\rho) \right], \tag{8.60}$$

мұндағы $\alpha(\rho) = \frac{O(\rho^2)}{\rho}$ шексіз аз функция, егер $\rho \to 0$ және

$$\rho^2 = \left(\frac{dx_1}{\rho} \right)^2 \rho^2 + \left(\frac{dx_2}{\rho} \right)^2 \rho^2 + ... + \left(\frac{dx_m}{\rho} \right)^2 \rho^2,$$

$$\left(\frac{dx_1}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{dx_2}{\rho} \right)^2 + ... + \left(\frac{dx_m}{\rho} \right)^2 = 1,$$

$$\left| \frac{dx_i}{\rho} \right| < 1, i = \overline{1,m}. \tag{8.61}$$

Онда $\left(\frac{dx_1}{\rho}, \frac{dx_2}{\rho}, ..., \frac{dx_m}{\rho} \right)$ нүкте радиусы 1-ге тең центрі координат жүйенің бас нүктесі болатын сферада жатыр. Квадрат пішін

$$\Phi(dx_1, dx_2, ..., dx_m) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \tag{8.62}$$

радиусы 1-ге тең сфера бетінде анықталған әрі үзіліссіз функция және ол бет тұйық әрі шектелген. Онда Вейерштрасстың екінші теоремасы (*8.12-теорема*) бойынша, функция осы жиында өзінің дәл төменгі μ мәнін қабылдайды. (8.61) формуладан және (8.62) квадрат пішін оң анықталғандықтан дәл төменгі шекара μ мәні қатаң оң сан болады. $\alpha(\rho)$ шексіз аз функция, егер $\rho \to 0$, $(A \to A_0)$, онда жеткілікті аз ρ, үшін $|\alpha(\rho)| < \mu$ теңсіздігі орындалады, онда (8.61) квадрат пішіннің оң жағы барлық аз ρ үшін оң болады, яғни (8.60) формуланың оң жағындағы өрнектің таңбасы (8.60) квадрат пішіннің таңбасымен бірдей болады. Демек, егер $\Phi(dx_1, dx_2, ..., dx_m) > 0$ болса, онда $\Delta u > 0$; егер $\Phi(dx_1, dx_2, ..., dx_m) < 0$ болса, онда $\Delta u < 0$ болады. Сонымен, $u = \ = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функцияның $A_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ нүктеде локальды минимумы бар. Осылайша, егер екінші (8.54) дифференциал теріс анықталған (8.62) квадрат пішінге өрнектелсе, онда функцияның $A_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ нүктеде локальды максимумы бар болатынын дәлелдеуге болады.

Енді теореманың екінші тұжырымын дәлелдейік, яғни функцияның (8.54) екінші дифференциалы анықталмаған квадрат пішінге өрнектелсе, онда $A_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ нүктеде функцияның экстремумы жоқ болатынын дәлелдейік. Ол үшін анықталмаған квадрат пішіннің мына қасиетін дәлелдейік: егер $\Phi(h_1, h_2, ..., h_m)$ анықталмаған квадрат пішін болса, онда екі $(h_1', h_2', ..., h_m')$ мен $(h_1'', h_2'', ..., h_m'')$ айнымалар табылып, осы айнымалар үшін мына теңдіктер мен теңсіздіктер орындалады:

$$\left(h_1'\right)^2 + \left(h_2'\right)^2 + ... + \left(h_m'\right)^2 = 1,$$

$$\left(h_1''\right)^2 + \left(h_2''\right)^2 + ... + \left(h_m''\right)^2 = 1 \tag{8.63}$$

$$(h_1', h_2', ..., h_m') < 0, (h_1'', h_2'', ..., h_m'') < 0. \tag{8.64}$$

Таңбасы айнымалы квадрат пішіннің анықтамасы бойынша, барлығы бір мезгілде нөлге тең емес $t_1', t_2', ..., t_m'$ және $t_1'', t_2'', ..., t_m''$ екі аргумент табылып,

$$\Phi(dx_1, dx_2, ..., dx_m) > 0, \ \Phi(dx_1, dx_2, ..., dx_m) < 0$$

теңсіздіктері орындалады. Енді мына белгілеулерді енгізейік:

$$h_i' = \frac{t_i'}{\sqrt{(t_1')^2 + (t_2')^2 + \ldots + (t_m')^2}}, \; h_i'' = \frac{t_i''}{\sqrt{(t_1'')^2 + (t_2'')^2 + \ldots + (t_m'')^2}}.$$

Осыдан және (8.60) формуладағы квадрат пішіннің анықтамасынан

$$\Phi(h_1', h_2', \ldots, h_m') = \frac{1}{(t_1')^2 + (t_2')^2 + \ldots + (t_m')^2} \Phi(t_1', t_2', \ldots, t_m') \tag{8.65}$$

$$\Phi(h_1'', h_2'', \ldots, h_m'') = \frac{1}{(t_1'')^2 + (t_2'')^2 + \ldots + (t_m'')^2} \Phi(t_1'', t_2'', \ldots, t_m'')$$

болады және

$$(h_i')^2 = \frac{(t_i')^2}{(t_1')^2 + (t_2')^2 + \ldots + (t_m')^2}, \; (h_i'')^2 = \frac{(t_i'')^2}{(t_1'')^2 + (t_2'')^2 + \ldots + (t_m'')^2}. \tag{8.66}$$

(8.62) теңдікті ескеріп, (8.65) теңдіктен дәлелдеу керек (8.64) теңсіздіктерді, ал (8.66) теңдіктерден (8.63) теңдіктерді аламыз.

Енді (8.63) мен (8.64) формулаларды қанағаттандыратын $(h_1', h_2', \ldots, h_m')$ мен $(h_1'', h_2'', \ldots, h_m'')$ екі айнымалыны тағайындайық және кез келген $\rho > 0$ үшін E жиынында $A'(x_1', x_2', \ldots, x_m')$ пен $A''(x_1'', x_2'', \ldots, x_m'')$ нүктелері табылып

$$\rho(A', A_0) = \rho(A', A'') = \rho \tag{8.67}$$

теңдіктері орындалатынын дәлелдейік, мұндағы $\frac{dx'}{\rho} = \frac{x_i' - x_i^0}{\rho} = h_i'$,

$$\frac{dx''}{\rho} = \frac{x_i'' - x_i^0}{\rho} = h_i'', \quad i = \overline{1, m}.$$

Ол үшін кез келген $\rho > 0$ мен әрбір i нөмірі үшін

$$x_i' = x_i^0 + \rho h_i', \; x_i'' = x_i^0 + \rho h_i'', \; i = \overline{1, m}.$$

және (8.63) теңдіктерді пайдаланып (8.67) теңдіктерді аламыз:

$$\rho(A_1', A_0) = \sqrt{(x_1' - x_1^0)^2 + (x_2' - x_2^0)^2 + \ldots + (x_m' - x_m^0)^2} =$$

$$= \rho\sqrt{(h_1')^2 + (h_2')^2 + \ldots + (h_m')^2} = \rho,$$

$$\rho(A_1'', A_0) = \sqrt{(x_1'' - x_1^0)^2 + (x_2'' - x_2^0)^2 + \ldots + (x_m'' - x_m^0)^2} = \rho.$$

$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ функцияға $A_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$ нүктенің маңайында қалдық мүшені Пеано ұсынған Тейлор формуласын $A'(x_1', x_2', \ldots, x_m')$ пен $A''(x_1'', x_2'', \ldots, x_m'')$ нүктелерге пайдаланайық:

$$f(A') - f(A_0) =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}\left(x_i' - x_i^0\right)\left(x_k' - x_k^0\right) + O(\rho) =$$
$$= \rho^2\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}h_i' h_k' + \alpha(\rho)\right] = \rho^2\Phi\left(h_1', h_2', \dots, h_m'\right) +$$
$$+ \alpha(\rho)$$
$$f(A'') - f(A_0) =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}\left(x_i'' - x_i^0\right)\left(x_k'' - x_k^0\right) + O(\rho^2) =$$
$$= \rho^2\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}h_i'' h_k'' + \alpha(\rho)\right] =$$
$$= \rho^2\Phi\left(h_1'', h_2'', \dots, h_m''\right) + \alpha(\rho),$$

мұндағы $O(\rho^2) = \rho^2\alpha(\rho)$, $\alpha(\rho) \to 0$, егер $\rho \to 0$.

Жоғарыдағы (8.64) мен (8.67) теңдіктерді соңғы теңдіктерге пайдалансақ, жеткілікті аз $\rho > 0$ үшін мына теңсіздіктер орындалады: $F(A') > f(A_0)$ $F(A'') < f(A_0)$. Демек, функцияның $A_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нүктеде локальды экстремумы жоқ. Теорема дәлелденді.

8.27-теореманы екі айнымалы $u = f(x, y)$ функция үшін тұжырымдайық.

8.28-теорема (экстремумның жеткілікті белгісі). $u = f(x, y)$ функция $A_0(x_0, y_0)$ нүктенің маңайында бір рет дифференциалдансын, ал осы нүктенің өзінде екі рет дифференциалдансын және $A_0(x_0, y_0)$ стационар нүкте болсын, яғни

$$f_x'(A_0) = f_y'(A_0) = 0.$$

1. Егер $A_0(x_0, y_0)$ нүктеде

$$\Delta(x_0, y_0) = f_{xx}^{(2)}(A_0) f_{yy}^{(2)}(A_0) - \left(f_{xy}^{(2)}(A_0)\right)^2 > 0$$

болса, онда $A_0(x_0, y_0)$ нүктеде функцияның экстремумы бар:

а) егер $f_{xx}^{(2)}(A_0) < 0$ болса, онда функция $A_0(x_0, y_0)$ нүктеде максимум мәнін қабылдайды.

ә) егер $f_{xx}^{(2)}(A_0) > 0$ болса, онда функция $A_0(x_0, y_0)$ нүктеде минимум мәнін қабылдайды.

2. Егер $A_0(x_0, y_0)$ нүктеде

$$\Delta(x_0, y_0) = f_{xx}^{(2)}(A_0) f_{yy}^{(2)}(A_0) - \left(f_{xy}^{(2)}(A_0)\right)^2 < 0$$

болса, онда функцияның $A_0(x_0, y_0)$ нүктеде локальды экстремумы жоқ.

3. Егер $A_0(x_0, y_0)$ нүктеде

$$\Delta(x_0, y_0) = f_{xx}^{(2)}(A_0) f_{yy}^{(2)}(A_0) - \left(f_{xy}^{(2)}(A_0)\right)^2 = 0$$

болса, онда функцияның $A_0(x_0, y_0)$ нүктеде локальды экстремумы бар болуы да, болмауы да мүмкін.

1-мысал. $z = (x + y)^2$ функцияның $O(0,0)$ нүктедегі экстремумын табайық:

Шешуі. Стационар нүктелерді тауып, оларды нөлге теңестірейік:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2(x + y) = 0, \ \frac{\partial z}{\partial y} = 2(x + y) = 0.$$

Осыдан $y = -x$, яғни $y = -x$ түзудің бойында орналасқан барлық нүктелер функцияның стационар нүктелері болады. Онда $O(0,0)$ нүктеде стационар нүкте болады. $O(0,0)$ нүктедегі екінші ретті дербес туындыларды есептейік:

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} = 2, \ \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} = 2, \ \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} = 2.$$

Сонда $\Delta(0,0) = f_{xx}^{(2)}(0,0) f_{yy}^{(2)}(0,0) - \left(f_{xy}^{(2)}(0,0)\right)^2 = 0$.

Сонымен, кез келген x пен y үшін $z \geq 0$ және де $y = -x$ түзудің бойында жатқан барлық нүктелерде $z = 0$ болады. Демек, $O(0,0)$ нүкте функцияның экстремум нүктесі әрі ол нөлге тең (қатаң емес).

2-мысал. $u = x^3 y^5$ функцияның $O(0,0)$ нүктедегі локальды экстремумын табайық.

Шешуі. Стационар нүктелерді табайық:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 y^5 = 0, \ \frac{\partial u}{\partial y} = 5x^3 y^4 = 0,$$

яғни $O(0,0)$ нүкте стационар нүкте болады. Екінші ретті дербес туындылардың $O(0,0)$ нүктедегі мәндерін есептейік:

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} = 6xy^5, \ \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} = 20x^3 y^3,$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} = 15x^2y^4 .$$

Онда $\Delta(0,0) = f_{xx}^{(2)}(0,0) f_{yy}^{(2)}(0,0) - \left(f_{xy}^{(2)}(0,0)\right)^2 = 0$ теңдігі орындалады және $O(0,0)$ нүктенің кез келген маңайында функцияның таңбасы әртүрлі, сондықтан $O(0,0)$ нүкте функцияның экстремум нүктесі бола алмайды.

3-мысал. $u = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ функцияның экстремумын табайық.

Шешуі. $\frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3 - 2x - 2y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 4y^3 - 2x - 2y$.

Стационар нүктелерді табайық, ол үшін мына жүйені шешеміз:

$$\begin{cases} 4x^3 - 2x - 2y = 0, \\ 4y^3 - 2x - 2y = 0. \end{cases}$$

Сонымен, $A_1(-1;-1)$, $A_2(1;1)$, $A_3(0,0)$ стационар нүктелер болады. Функцияның екінші ретті дербес туындыларының мәндерін есептейік:

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=-1\\y=-1}} = 10, \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{\substack{x=-1\\y=-1}} = 10, \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{\substack{x=-1\\y=-1}} = -2,$$

$$\Delta(x,y) = \left(12x^2 - 2\right)\left(12y^2 - 2\right) - 4 .$$

Сонда $\Delta_1(-1;-1) = 96 > 0$, $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=-1\\y=-1}} = 10 > 0$, яғни функция $A_1(-1;-1)$ нүктеде минимум мәнді қабылдайды және ол: $u_{min}(-1,-1) = -2$. Осы сияқты, $\Delta_2(1;1) > 0$, $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=-1\\y=-1}} = 10$, яғни функция $A_2(1;1)$ нүктеде де функция минимум мәнді қабылдайды $u_{min}(1,1) = -2$.

Енді $O(0,0)$ нүктеде функция экстремумының бар болуын зерттейік. Бұл нүктеде $\Delta(0,0) = 0$ болады. Сондықтан функцияның $O(0,0)$ нүктедегі экстремумының бар болуын зерттеу үшін осы нүктедегі функцияның өсімшесін қарастырайық:

$$\Delta u(0,0) = u(0,0) = u(l,p) - u(0,0).$$

Егер $p = l$ болса, онда:

$$\Delta u(0,0)=u(l;l)-u(0,0)=l^4+l^4-l^2-2l^2-l^2=2l^2(l^2-2),$$

мұндағы $l\in(0;\sqrt{2})$. Егер $p=-l$ болса, онда $\Delta u(0,0)=2l^4$. Сонымен, егер $p=l$ болса, онда $\Delta u(0,0)=2l^4(l^2-2)<0$., $l\in(0;\sqrt{2})$; егер $p=-l$ болса, онда $\Delta u(0,0)=2l^4>0$. Демек, $\Delta u(0,0)$ өсімшесінің таңбасының мәні $O(0,0)$ нүктенің маңайында әртүрлі, олай болса, $O(0,0)$ нүктеде функцияның экстремумы жоқ.

4-мысал. $u=1-\sqrt{x^2+y^2}$ функцияның экстремумын табайық.

Шешуі. Бірінші ретті дербес туындыларды табайық:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Функцияның дербес туындылары жоқ және $O(0,0)$ нүктеде функцияның бірінші ретті дербес туындылары да жоқ, себебі

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(\Delta x,0)-u(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x},$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(0,\Delta y)-u(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{|\Delta y|}{\Delta y}$$

шектер жоқ. Сондықтан $O(0,0)$ нүкте функцияның экстремум нүктесі болып қалуы да мүмкін, ал $u(x,y)-u(0,0)=-\sqrt{x^2+y^2}$. Онда функцияның $O(0,0)$ нүктеде максимумы бар және ол $u_{max}(0,0)=1$.

5-мысал. $u=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ функцияның экстремумын табайық.

Шешуі. Бірінші ретті дербес туындыларды нөлге теңестіріп, стационар нүктелерді табайық:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=2xe^{-(x^2+y^2)}-2(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}x=0,\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=2ye^{-(x^2+y^2)}-2(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}y=0.\end{cases}$$

Осыдан:

$$\begin{cases}x(1-x^2-y^2)=0,\\ y(1-x^2-y^2)=0.\end{cases}$$

Онда $x=0, y=0$ және $x^2+y^2=1$. Сонымен, берілген функцияның стационар нүктелері радиусы 1-ге тең, центрі координат жүйенің бас нүктесі болатын шеңбердің бойындағы нүктелер мен координат жүйенің бас нүктесі болады.

Екінші ретті дербес туындыларды табайық:

$$u_{xx}^{(2)}(x,y)=-2xe^{-(x^2+y^2)}\left(2x-2x^3-2xy^2\right)+$$

$$+e^{-(x^2+y^2)}\left(2-6x^2-2y^2\right),$$

$$u_{yy}^{(2)}(x,y)=-2ye^{-(x^2+y^2)}\left(2y-2y^3-2yx^2\right)+$$

$$+e^{-(x^2+y^2)}\left(2-2x^2-6y^2\right),$$

$$u_{xy}^{(2)}(x,y)=-2ye^{-(x^2+y^2)}\left(2x-2x^3-2xy^2\right)-4xye^{-(x^2+y^2)}.$$

Сонда $u_{xx}^{(2)}(0,0)=2>0$, $u_{xy}^{(2)}(0,0)=0$. Онда $\Delta(0,0)=4>0$, яғни $O(0,0)$ нүкте функцияның минимум нүктесі болады, $u_{min}(0,0)=0$.

Енді функцияға жеткілікті белгінің $x^2+y^2=1$ шеңберінің бойындағы нүктелер үшін орындалатынын тексерейік. Ол үшін $u(x,y)$ функцияны t айнымалыға тәуелді функция деп қарастырайық, яғни $u(t)=te^{-t}$, мұндағы $t=x^2+y^2$. Бір айнымалы $u(t)$ функцияның стационар (кризистік) нүктесін анықтайық:

$$u'(t)=e^{-t}-te^{-t},\ e^{-t}(1-t)=0.$$

Онда $t=1$ нүкте бір айнымалы функцияның стационар нүктесі болады және осы нүкте функцияның максимум нүктесі:

$$u_{\max}(x,y)=16,\ \text{егер}\ x,y\in\{(x,y):x^2+y^2=1\}.$$

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Экстремумның жеткілікті белгісі.

2. $u=(2x+3y)^2$ функцияның $O(0,0)$ нүктедегі экстремумын табыңдар.

3. $u=x^3y^5+5$ функцияның $O(0,0)$ нүктедегі локальды экстремумын табыңдар.

4. $u=4+\sqrt{x^2+y^2}$ функцияның экстремумын табыңдар.

8.19. Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері

Бізге тұйық әрі шектелген $\{A\}$ жиынында үзіліссіз және дифференциалданатын $u=f(x_1,x_2,...,x_m)$ функциясы берілсін. Демек, функция $\{A\}$ жиынында шектелген әрі осы жиында өзінің максимум, минимум мәндерін қабылдайды және ол бірқалыпты үзіліссіз. Вейерштрасстың екінші теоремасы (*8.12-теорема*) бойынша функция өзінің ең жоғарғы және ең төменгі шекара мәндерін қабылдайды. Бұл нүктелер $\{A\}$ жиынының ішкі және шекара нүктелері болады. Егер де $A_0(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0)$ ішкі нүкте болса, онда $u=f(x_1,x_2,...,x_m)$ функцияның бұл нүктеде локалды экстремумы бар. Олай болса, *8.15-теорема* бойынша $A_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ нүктедегі функцияның бірінші дербес туындылары нөлге тең:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(A_0) = 0, \ \frac{\partial u}{\partial x_2}(A_0) = 0; \ ..., \ \frac{\partial u}{\partial x_m}(A_0) = 0.$$

Ал бұл теңдеулерді қанағаттандыратын нүктелер функцияның стационар нүктелері болады. Сонымен, функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табу үшін мына ережені пайдаланған тиімді:

Функцияның $\{A\}$ жиынындағы барлық стационар нүктелерін табу керек;

Стационар нүктелердегі функцияның мәндерін есептеу керек;

Функцияның шекарадағы мәндерін есептеу керек;

Соңғы екі пункттегі функцияның мәндерін салыстырып, функцияның тұйық $\{A\}$ жиынындағы ең үлкен, ең кіші мәндерін табамыз.

Егер функцияның стационар нүктесі жоқ болса, онда функцияның ең үлкен, ең кіші мәндерін табу үшін жоғарыдағы 3 және 4-пункттерді орындау керек.

1-мысал. $u = xy(1 - x - y)$ функцияның $x = 0$, $y + x = 2$, $y = 0$ түзулермен шектелген жиындағы ең үлкен, ең кіші мәндерін табайық (*9.8-тақырыптағы 5-мысалды қара*).

Шешуі. 1. Стационар нүктелерді табайық:

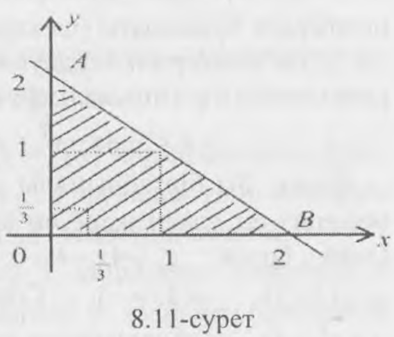
$$\begin{cases} y(1 - 2x - y) = 0, \\ x(1 - 2y - x) = 0. \end{cases}$$

Осы жүйені шешейік: $x_1 = 0$, $y_1 = 0$; $x_2 = \frac{1}{3}$, $y_2 = \frac{1}{3}$; $x_3 = 1$, $y_3 = 1$; $x_4 = 1$, $y_4 = 0$ – стационар нүктелер;

2. Стационар нүктелердегі функцияның мәндерін есептейік:

$$u(0,0) = 0, \ u\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27},$$

$$u(0,1) = 0, \ u(1,0) = 0.$$



8.11-сурет

3. Функцияның шекарадағы мәндерін есептейік (шекаралық нүктелер үш түзудің бойындағы нүктелердің жиындары). AOB үшбұрыштың $A(0,2)$, $A(2,0)$, $O(0,0)$ төбелеріндегі мәндері: $u(0,2) = 0$, $u(2,0) = 0$, $u(0,0) = 0$ болады; OA кесіндінің бойында, яғни $x = 0$: $u(y) = 0$, $0 \le y \le 2$. Демек, $y \in [0,2]$

сегментте $u(y)=0$, функцияның стационар нүктесі жоқ және $u(0)=0$, $u(2)=0$. Олай болса, $u(0,0)=0$, $u(2,0)=0$; OB кесіндінің бойында, яғни $y=0$: $u(x)=0$, $0 \le x \le 2$. Демек, $x \in [0,2]$ сегментте $u(x)=0$ функцияның стационар нүктесі жоқ және $u(0)=0$, $u(2)=0$. Олай болса, $u(0,0)=\ 0, u(2,0)=0$; AB кесіндінің бойында, яғни $x+y=2$. Осыдан $y=2-x$. Онда $u(x)=x(x-2)$, $x \in [0,2]$. Бір айнымалы функцияның $[0,2]$ сегменттегі ең үлкен, ең кіші мәндерін табайық: $u'_x=2x-2=0$, $x=1$ стационар нүкте. Онда $u(0)=0, u(0,2)=0$, ал $u(2)=0$, $u(2)=0$, яғни $u(2,0)=0$, $u(1)=-1$, яғни $u(1,1)=-1$;

4. $u(x,y)$ функцияның барлық мәндерін салыстырсақ, онда функция өзінің ең үлкен мәнін үшбұрыштың ішкі $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ нүктеде, ал ең кіші мәнін шекара $(1,1)$ нүктеде қабылдайды, яғни

$$u\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}=\frac{1}{27}\right),\ u(1;1)=-1.$$

2-мысал. $u=x^2-4x-y^2$ функцияның $x^2+y^2 \le 9$ дөңгелектегі ең үлкен ең кіші мәндерін табайық:

Шешуі. Функцияның дербес туындыларын анықтайық: $u'_x=2x-4$, $u'_y=-2y$. Дербес туындыларды нөлге теңестіріп, кризистік нүктелерді табамыз:

$$\begin{cases} x-2=0, \\ -2y=0 \end{cases}$$

Сонда D дөңгелек облысқа тиісті тек бір ғана нүкте бар, ол (2;0) $\in D$. Бұл нүктедегі функцияның мәні: $u(2,0)=-4$. Енді $x^2+y^2=9$ шеңбердің бойындағы (шекарадағы) кризистік нүктелерді табайық. Ол үшін шеңбердің теңдеуінен $-y^2$-ты тауып u функцияға қойып, x-ке тәуелді бір айнымалы функция аламыз:

$$u=x^2-4x-y^2=x^2-4x-\left(9-x^2\right)=2x^2-4x-9.$$

Демек, біз бір айнымалы $u=2x^2-4x-9$ функцияның $[-3,3]$ сегменттегі ең үлкен және ең кіші мәндерін табатын есепке келдік. Олай болса: $u'_x=4x-4=0$, $x=1$. Сонда $u(1)=2-4-9=-11$, $u(-3)=21$, $u(3)=-3$. Сонымен, D дөңгелек облыстағы $u=x^2-4x-y^2$ функцияның $\min\limits_D u=-11$, $\max\limits_D u=21$ болады.

IX ТАРАУ. АЙҚЫНДАЛМАҒАН ФУНКЦИЯ

9.1. Айқындалмаған функцияның бар болуы және оның дифференциалдануы

Алдымен айқындалмаған функция туралы түсінік берейік. Бізге функциялық теңдеу берілсін

$$F(x, y) = 0 \tag{9.1}$$

және X жиынындағы кез келген x элементке (9.1) теңдеудің y шешімі бар болсын. Онда X жиынындағы әрбір x-ке (9.1) теңдеудің анықталған y шешімі сәйкес келеді. (9.1) теңдеудің бірнеше шешімі болуы мүмкін. Бұл жағдайда, әрбір x-ке y мәнді сәйкес қоятын f заңдылық немесе ереже айқын түрде көрсетілмеген, ал ол (9.1) функциялық теңдеумен берілген.

Бізге x, y екі айнымалар бір-бірімен (9.1) теңдеумен берілсін. Мұндағы $F(x, y)$ функция XOY координат жазықтығының $\{A\}$ жиынында, ал бір айнымалы $y = f(x)$ функция $(a, b) \in R$ интервалда анықталсын, барлық $x \in (a, b) \in R$ үшін $(x, f(x)) \in \{A\}$ және $F(x, f(x)) \equiv 0$ болса, онда $y = f(x)$ айқын емес функция деп аталады. Кез келген $F(x, y) = 0$ функциялық теңдеуден не $y = f(x)$ не $x = \varphi(y)$ айқын түрде берілген функцияны таба алмаймыз, яғни y айныма элементар функция арқылы өрнектелмейді. Мысалы, айқын емес түрде берілген $xy + e^{xy} = 0$ теңдеуден не y-ті не x-ті элементар функция арқылы өрнектей алмаймыз.

Сонымен, қандай шарт орындалғанда (9.1) функциялық теңдеудің y бойынша тек бір ғана шешімі бар болады әрі ол үзіліссіз және дифференциалдана ма? деген сұрақтарға жауап іздестірейік.

(9.1) функциялық теңдеудің орнына көп айнымалы функциялық

$$F(x_1, x_2, \ldots,) = 0 \tag{9.1}$$

теңдеуді қарастыруға және жоғарыда $y = f(x)$ айқындалмаған функцияға айтылған түсініктерді $z = \varphi(x_1, x_2, \ldots)$ функция үшін келтіруге болады, мұндағы $(z, x_1, x_2, \ldots)$ берілген (9.1) теңдеудің шешімі.

Біз алдағы тақырыптарда $(z, x_1, x_2, \ldots)$ айнымалы кеңістікті R таңбамен, ал $(x_1, x_2, \ldots)$ айнымалы кеңістікті R' таңбамен белгілейтін боламыз және қысқаша жазылу әрі геометриялық түсініктеме келтіру үшін x, y екі айнымалыға тәуелді функцияны қарастырамыз.

9.1-теорема. R кеңістігіндегі $A_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктенің кейбір маңайында $F(x, y, z)$ функция дифференциалдансын әрі оның $\frac{\partial F}{\partial z}$-дербес туындысы осы нүктелерде үзіліссіз болсын.

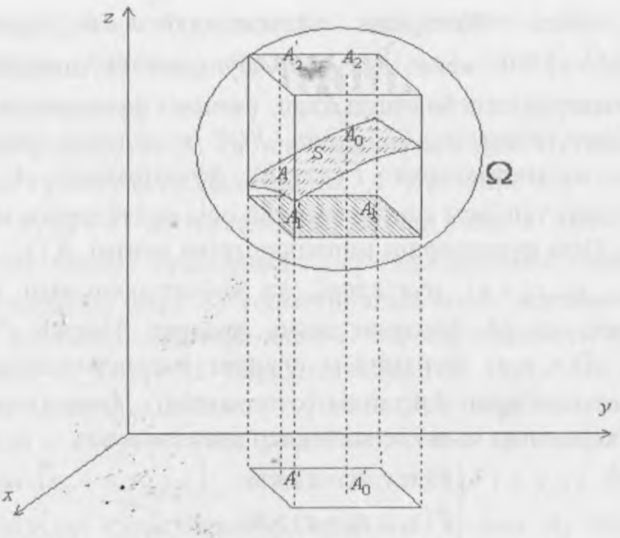
Егер $A_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктеде $F(x, y, z)$ функция нөлге тең, ал $\frac{\partial F}{\partial z}$ нөлге тең болмаса, онда жеткіліктігінше аз $\varepsilon > 0$ саны үшін R' кеңістігіндегі $A_0^{'}(x_0, y_0)$ нүктенің маңайы табылып, осы маңайдың барлық нүктелері үшін $| z - z_0 | < \varepsilon$ теңсіздікті қанағаттандыратын тек бір ғана $z = \varphi(x, y)$ функция табылады әрі ол

$$F(x, y, z) = 0 \tag{9.2}$$

теңдеудің шешімі болады және ол шешім жоғарыда айтылған $A_0^{'}(x_0, y_0)$ нүктенің маңайында үзіліссіз әрі дифференциалданады.

Дәлелдеуі. Теореманың дәлелдеуін үш бөлікке бөліп дәлелдейік. Алдымен жеткіліктілігінше аз $\varepsilon > 0$ саны үшін $A_0^{'}(x_0, y_0)$ нүктенің маңайында $| z - z_0 | < \varepsilon$ теңсіздікті қанағаттандыратын тек бір ғана $z = \varphi(x, y)$ функция табылатынын және ол (9.2) теңдікті қанағаттандыратынын дәлелдейік. (9.2) теңдеу R кеңістікте S бетті анықтайтыны бізге аналитикалық геометриядан (I. VIII тарау, 8.5-тақырып) белгілі және теореманың шарты бойынша $F(x_0, y_0, z_0) \equiv 0$ болғандықтан $A_0(x_0, y_0, z_0)$ нүкте S бетте жатыр. (9.2) теңдеудің z бойынша бір мәнді анықталуын геометриялық тұрғыдан қарағанда ол мынаны білдіреді: A_0 нүктеге жақын орналасқан S беттің бөлігін XOY жазықтығына бір мәнді проекциялауға болады (*9.1-сурет*).

Анықтық үшін $A_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктедегі $\frac{\partial F}{\partial z}$ дербес туындының таңбасы оң болсын. Онда, A_0 нүктеде $\frac{\partial F}{\partial z}$ дербес туынды үзіліссіз болғандықтан және үзіліссіз функцияның таңбасы тұрақты болу теорема (X,10.7-тақырып) бойынша $A_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктенің маңайы табылып, осы маңайдың барлық нүктелерінде функцияның $\frac{\partial F}{\partial z}$ дербес туындысы оң болады. Осы маңайды Ω шар деп алайық және оның центрі $A_0(x_0, y_0, z_0)$, ал радиусы жеткілігінше аз болсын. Енді $A_0(x_0, y_0, z_0 - \varepsilon)$ мен $A_0(x_0, y_0, z_0 + \varepsilon)$ нүктелер Ω шардың ішінде жататындай $\varepsilon > 0$ санын жеткілігінше аз сан етіп



9.1-сурет

тағайындайық. Ол үшін ε санды Ω шардың радиусынан кіші болатындай тағайындасақ жеткілікті. Бұл жағдайда ε саны төменнен нөлмен шектелген және оны біз көргемізше өте аз сан етіп алуымызға болады. Енді $z_0 - \varepsilon \le z \le z_0 + \varepsilon$ сегментте бір айнымалы $F(x_0, y_0, z)$ функцияны қарастырайық. Осы функцияға геометриялық тұрғыдан қарағанда мынаны білдіреді: біз негізінде үш айнымалы $F(x, y, z)$ функцияны A_1A_2 кесінді бойында қарастырамыз (9.1-сурет). $\dfrac{\partial F}{\partial z}$ функция $A_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктеде және оның Ω маңайында (шарда) оң болғандықтан, онда ол $[z_0 + \varepsilon, z_0 + \varepsilon]$ сегментте де оң болады. Олай болса, $F(x_0, y_0, z)$ осы сегментте өспелі функция. Теореманың шарты бойынша, $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, яғни $[z_0 + \varepsilon, z_0 + \varepsilon]$ сегменттің ортасында $F(x, y, z)$ функция нөлге тең болғандықтан, сегменттің сол жағындағы $z = z_0 - \varepsilon$ нүктеде функцияның мәні теріс, яғни $F(x_0, y_0, z_0 - \varepsilon) < 0$, ал оң жағындағы $z = z_0 + \varepsilon$ нүктеде функцияның мәні оң, яғни $F(x_0, y_0,\ z_0 - \varepsilon) > 0$. Енді екі айнымалы $F(x, y, z_0 - \varepsilon)$ және $F(x, y, z_0 + \varepsilon)$ функцияларын қарастырайық, яғни геометриялық тұрғыдан қарағанда, $F(x, y, z)$ функцияны XOY координат жазықтығына параллель болатын екі жазықтықта қарастырамыз, олардың біреуі $A_1(x_0, y_0, z_0 - \varepsilon)$ нүктеден, ал екінші $A_2(x_0, y_0, z_0 + \varepsilon)$

нүктеден өтеді. Жоғарыда айтылғандай $F(x_0, y_0, z_0 - \varepsilon) < 0$, $F(x_0, y_0, z_0 - \varepsilon) > 0$ және $F(x, y, z)$ функция Ω шардың барлық нүктелерінде үзіліссіз болғандықтан, үзіліссіз функцияның таңбасы тұрақты болу теоремасы бойынша, XOY координат жазықтығына параллель жазықтықтарда $F(x, y, z)$ функцияның A_1 мен A_2 нүктелеріндегі таңбасы сақталатындай осы нүктелердің маңайлары табылады. Осы нүктелердің маңайларының центрі $A_1(x_0, y_0, z_0 - \varepsilon)$ мен $A_2(x_0, y_0, z_0 + \varepsilon)$ нүктелері, ал қабырғаларының ұзындығы жеткілігінше аз 2δ болатын ашық квадрат болсын (9.1-сурет). Сонымен, $F(x, y, z)$ функциясы квадрат жазықтықтардың әрқайсысында өз таңбасын сақтайды (өзгертпейді), яғни аналитикалық тұрғыдан қарағанда мына теңсіздіктер орындалады:

$$\begin{cases} F(x, y, z_0 - \varepsilon) < 0, \\ F(x, y, z_0 + \varepsilon) > 0, \end{cases} \tag{9.3}$$

егер $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$. Жоғарыдағы квадраттың қабырғаларының ұзындығын таңдағанда, квадраттың екеуі де Ω шардың ішінде жататындай δ-ны мейлінше етіп таңдаймыз. Квадраттың қабырғасын жоғарыдағыдай таңдауға болады, себебі A_1 мен A_2 нүктелер Ω шардың ішкі нүктелері болғандықтан. Онда, осылайша таңдап алынған δ үшін

$$|x - x_0| < \delta, \; |y - y_0| < \delta, \; |z - z_0| < \delta \tag{9.4}$$

теңсіздіктерді қанағаттандыратын R кеңістіктің кез келген (x, y, z) нүктелері Ω шардың ішінде жатыр. (9.4) теңсіздікті геометриялық тұрғыдан қарастырсақ, онда ол центрі A_0 нүкте, қабырғалары OX, OY, OZ осьтеріне параллель, ұзындықтары сәйкес $2\varepsilon, 2\delta$-ға тең тік бұрышты ашық параллелепипед. Осы параллелепипедті Π таңбамен белгілейік. Параллелепипед Ω шардың ішінде орналасқандықтан, параллелепипедтің барлық нүктелері үшін $\frac{\partial F}{\partial z}$-дербес туынды оң болады және де (9.3) теңсіздік бойынша $F(x, y, z)$ функция параллелепипедтің жоғарғы табанының нүктелерінде оң, ал төменгі табанында теріс болады.

Енді $F(x, y, z)$ функцияны Π параллелепипедтің ішкі (x, y, z) мәндері (нүктелері) үшін қарастырып, (9.2) теңдеудің z бойынша бір мәнді шешілетінін дәлелдейік. Ол үшін R' кеңістігінен координаттары

$$|x - x_0| < \delta, \; |y - y_0| < \delta \tag{9.5}$$

теңсіздіктерді қанағаттандыратын кез келген $A'(x,y)$ нүктені қарастырайық. Басқаша айтқанда, $A'(x,y)$ нүкте XOY жазықтығында орналасқан центрі $A_0'(x_0,y_0)$ нүкте болатын, қабырғаларының ұзындығы 2δ-ға тең квадраттың ішкі нүктесі болсын. Енді мына тұжырымды дәлелдейік: A' нүктенің x,y координаты үшін $(z_0-\varepsilon, z_0+\varepsilon)$ интервалынан тек бір ғана z саны табылып, $F(x,y,z)=0$ теңдігі орындалады. Бұл тұжырымды геометриялық тұрғыдан қарасақ, онда ол геометриялық мына мағынаны береді: OZ осіне параллель болатын және П параллелепипедті қиятын кез келген түзу S бетті П параллелепипедтің ішкі тек бір ғана нүктесінде қияды. Дәлелдеу үшін, (9.5) теңсіздікті қанағаттандыратын x пен y-ті тағайындайық және z аргументті $F(x,y,z)$ функцияны $[z_0+\varepsilon, z_0+\varepsilon]$ сегментте, яғни $F(x,y,z)$ функцияны $A_1'A_2'$ кесінді де қарастырамыз, мұндағы A_1' пен A_2' нүктелер A' нүктеден өтіп әрі OZ осіне параллель болатын түзудің параллелепипед табандарымен қиылысатын нүктелері (9.1-сурет). Функцияның $[z_0-\varepsilon; z_0+\varepsilon]$ сегменттегі $\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}$ дербес туындысы оң болғандықтан, $F(x,y,z)$ осы сегментте өспелі функция болады, басқаша айтқанда, функция $A_1'A_2'$ кесіндіде өспелі. Олай болса, $F(A_1')<0$ мен $F(A_2')>0$ теңсіздіктерінен мынадай қорытындыға келеміз: $[z_0+\varepsilon, z_0+\varepsilon]$ сегменттің ішінен $F(x,y,z)=0$ теңдеуді қанағаттандыратын тек бір ғана z мәні табылады. Бұл қорытындының геометриялық мағынасы мынадай: $A_1'A_2'$ кесіндінің бойында S бетке тиісті тек бір ғана $A(x,y,z)$ нүкте табылады (9.1-сурет). $z=\varphi(x,y)$ функция (9.5) маңайдың әрбір $A'(x,y)$ нүктесіне $(z_0-\varepsilon; z_0+\varepsilon)$ интервалынан тек бір ғана z мәні сәйкес келетін және сол z үшін $F(x,y,z)=0$ теңдігі орындалатын функция болсын. Сонымен, біз мына тұжырымды дәлелдейік: (9.5) маңайда $|z-z_0|<\varepsilon$ теңсіздікті қанағаттандыратын тек бір ғана $z=\varphi(x,y)$ функция табылады және ол (9.2) теңдеуді қанағаттандырады. Теореманың бірінші бөлігі дәлелденді.

Енді теореманың екінші бөлігін дәлелдейік, яғни (9.5) **маңайдың кез келген** $A'(x,y)$ нүктесінде $z=\varphi(x,y)$ функция үзіліссіз болады. (9.5) маңайдың кез келген $A'(x,y)$ нүктесіне R кеңістіктен $A(x,y,z)$ нүкте сәйкес келеді және $A(x,y,z)$ нүктеде $F(x,y,z)=0$

болады әрі осы нүктенің маңайында дифференциалданады, ал функцияның осы нүктедегі $\frac{\partial F}{\partial z}$-дербес туындысы нөлге тең емес. Демек, (9.5) маңайдың кез келген $A'(x, y)$ нүктесіне орындалатын белгілер $A_0'(x_0, y_0)$ нүктеге де орындалады, онда теореманың екінші бөлігін дәлелдеу үшін $z = \varphi(x, y)$ функцияның $A_0'(x_0, y_0)$ нүктедегі үзіліссіздігін дәлелдесек жеткілікті, яғни жеткілікгінше аз $\varepsilon > 0$ саны үшін $\delta > 0$ саны табылып, $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$ теңсіздіктерді қанағаттандыратын кез келген x пен y үшін $|z - z_0| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, мұндағы $z = \varphi(x, y)$, $z_0 = \varphi(x_0, y_0)$.

Егер мұндағы ε санын теореманың бірінші бөлігін дәлелдегендей алсақ, онда (9.4) теңсіздік δ санының бар болуын қамтамасыз етеді, ал ε санын қажеттілігінше аз сан болатындай алуымызға болады. Олай болса, $z = \varphi(x, y)$ функцияның үзіліссіздігі дәлелденді. Енді осы функцияның $A_0'(x_0, y_0)$ нүктедегі үзіліссіздігін өсімше түрде келтірейік (8.5-тақырып). $z = \varphi(x, y)$ функцияның $A_0'(x_0, y_0)$ нүктедегі $\Delta x, \Delta y$ өсімшелеріне сәйкес келетін өсімшесін Δz таңбамен белгілейік, онда $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ болғанда $\Delta z \to 0$ болады.

Енді теореманың, ең соңғы, үшінші бөлігін дәлелдейік, яғни (9.5) **маңайдың кез келген** $A'(x, y)$ нүктесінде $z = \varphi(x, y)$ функция дифференциалданатынын дәлелдейік. Теореманың екінші бөлігін дәлелдегендей, $z = \varphi(x, y)$ функцияның $A_0'(x_0, y_0)$ нүктенің өзінде дифференциалданатынын дәлелдесек жеткілікті. Ол үшін функцияның $A_0'(x_0, y_0)$ нүктедегі Δx пен Δy өсімшелеріне сәйкес келетін функцияның толық өсімшесін есептейік.

Біріншіден, $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ және $F(x_0 + \Delta x, y_0 + y, z_0 + \Delta) = 0$ болған-дықтан, $F(x, y, z)$ функцияның $A_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктедегі $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ өсімшелерге сәйкес келетін толық өсімшесі нөлге тең:

$$\Delta F = F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0) = 0. \tag{9.6}$$

Екіншіден, $F(x, y, z)$ функция $A_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктеде дифференциалданатын болғандықтан оның толық өсімшесі мына формуладан анықталады:

$$\Delta F = \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \alpha\right)\Delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \beta\right)\Delta y + \left(\frac{\partial F}{\partial z} + \gamma\right)\Delta z\,, \tag{9.7}$$

мұндағы $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ – дербес туындылар $A_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктеде алынады және $\alpha \to 0, \beta \to 0, \gamma \to 0$ болады, егер $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0, \Delta z \to 0$ болса. (9.6) мен (9.7) формулаларды салыстырып,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \alpha\right)\Delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \beta\right)\Delta y + \left(\frac{\partial F}{\partial z} + \gamma\right)\Delta z = 0 \qquad (9.8)$$

теңдігін аламыз. $z = \varphi(x, y)$ функция $A_0'(x_0, y_0)$ нүктеде үзіліссіз болғандықтан (теорема дәлелдеуінің екінші бөлігінде дәлелденген), онда $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ болғанда, $\Delta u \to 0$ болады. Сондықтан $\alpha \to 0, \beta \to 0$ және де $\gamma \to 0$ болса, онда $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ болады. Теореманың шарты бойынша, $F(x, y, z)$ функцияның $A_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктеде z бойынша алынған дербес туындысы нөлге тең емес, яғни $\frac{\partial F}{\partial z}(A_0) \neq 0$ және егер $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ болса, жоғарыда айтылған $\gamma \to 0$ болады. Онда, жеткілікті аз Δx пен Δy үшін $\frac{\partial F}{\partial z} + \gamma \neq 0$ теңсіздік орындалады. Олай болса, (9.8) теңдіктің екі жағында нөлге тең емес $\frac{\partial F}{\partial z} + \gamma$ өрнегіне бөлейік, сонда

$$\Delta z = \left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x} + \alpha}{\frac{\partial F}{\partial z} + \gamma}\right)\Delta x + \left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial y} + \beta}{\frac{\partial F}{\partial z} + \gamma}\right)\Delta y \qquad (9.9)$$

Енді бөлшек функция шегінің теоремасын пайдаланайық:

$$-\frac{\frac{\partial F}{\partial x} + \alpha}{\frac{\partial F}{\partial z} + \gamma} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} + \mu, \quad -\frac{\frac{\partial F}{\partial y} + \beta}{\frac{\partial F}{\partial z} + \gamma} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} + \nu, \qquad (9.10)$$

мұндағы $\mu \to 0, \nu \to 0$ болады, егер $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ болса.

Жоғарыдағы (9.9) бен (9.10) формулаларды салыстырып,

$$\Delta z = \left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right)\Delta x + \left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right)\Delta y + \mu\Delta x + \nu\Delta y$$

теңдікті аламыз. Бұл формула, $z = \varphi(x, y)$ функцияның $A_0(x_0, y_0)$ нүктеде дифференциалданатынын дәлелдейді. Теорема дәлелденді.

Ескерту. Теореманың шартындағы $A_0(x_0, y_0)$ нүктеде $\frac{\partial F}{\partial z}$-дербес туындыға қойылған үзіліссіздік шартты қоймауға болады, бірақ бұл жағдайда дербес туынды мына шартты қанағаттандыруы керек: $\frac{\partial F}{\partial z}$ дербес туынды $A_0(x_0, y_0)$ нүктенің өзінде әрі оның кейбір маңайында нөлге тең емес болуы және осы маңайда оның таңбасы сақталынуы қажет.

Сұрақтар

1. Айқындалмаған функцияның анықтамасы.
2. Функцияның өзі айқындалмаған функция.
3. Функцияның берілу тәсілі айқындалмаған функция.

9.2. Айқындалмаған функцияның дербес туындылары

Айқындалмаған функцияның дербес туындыларын табу үшін *9.15-теорема* $F(x, y, z) = 0$ функциялық теңдеу үшін орындалсын. Онда $z = \varphi(x, y)$ функцияның толық өсімшесіне

$$\Delta z = \left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \right) \Delta x + \left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \right) \Delta y + \mu \Delta x + \nu \Delta y \tag{9.11}$$

теңдігі орындалады, мұндағы $\mu \to 0, \nu \to 0$, егер $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ болса. Онда $z = \varphi(x, y)$ функцияның дербес туындылары мына формуладан анықталады:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \tag{9.12}$$

Осы сияқты, егер айқындалмаған функция $x_1, x_2, \dots, x_m$ аргументке тәуелді болса, онда оның дербес туындылары мына формуладан анықталады:

$$\frac{\partial z}{\partial x_k} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \qquad k = \overline{1, m} \cdot \tag{9.13}$$

Егер де айқындалмаған функцияның нүктедегі екінші ретті дербес туындысы бар болуын қамтамасыз ету үшін *9.1-теоремада*

$F(x,y,z)$ функцияға қойылатын шартты толықтыруымыз (күшейтуіміз) керек, яғни функция, қарастырылып отырған нүктеде, екі рет дифференциалдануы керек. Осы толықтырған шарт орындалсын деп ұйғарып, екінші ретті дербес туындыларды табайық. Ол үшін дифференциалданатын үш аргументті $\Phi(x,y,z)$ функцияны қарастырайық және мұндағы, z айнымалының өзі x,y аргументтері бойынша дифференциалданатын функция болсын. Онда $\Phi(x,y,z)$ функцияны x пен y екі аргументті күрделі функция ретінде қарастыруға болады. Осы күрделі функциядан x пен y бойынша алынған дербес туындылары $\Phi(x,y,z)$ функцияның толық дербес туындылары деп аталады және ол $\frac{D\Phi}{Dx}$ және $\frac{D\Phi}{Dy}$ таңбаларымен белгіленеді. Күрделі функцияны дифференциалдау ережесі бойынша $\Phi(x,y,z)$ функцияның толық дербес туындыларын мына формуладан табамыз:

$$\frac{D\Phi}{Dx}=\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial x},\quad \frac{D\Phi}{Dy}=\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}.$$

Енді айқындалмаған функцияның екінші ретті дербес туындыларын есептейік. Анықтық үшін $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$-дербес туындыны есептейік, ол үшін (9.12) формуладағы $\frac{\partial z}{\partial x}$ бірінші дербес туындыны y бойынша дифференциалдайық әрі ондағы $\frac{\partial F}{\partial x}$ пен $\frac{\partial F}{\partial y}$-дербес туындылардың әрқайсысы да x,y,z аргументтерге тәуелді, ал z айнымалы x,y аргументтерге тәуелді функция болсын, онда

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{D\left[-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right]}{Dy}=\frac{-\dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{D\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]}{Dy}+\dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{D\left[\frac{\partial F}{\partial z}\right]}{Dy}}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2}=$$

$$=\frac{-\dfrac{\partial F}{\partial z}\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\right)+\dfrac{\partial F}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 F}{\partial z\partial y}\right)}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2}.$$

Осы екінші ретті туындыдағы $\frac{\partial z}{\partial y}$-дербес туындының орнына (9.12) формуладағы екінші дербес туындыны қояйық, сонда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z}}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^3} \qquad (9.14)$$

Осы сияқты қалған дербес туындыларды табуға болады.

1-ескерту. $F(x, y)$ функция үшін (9.12) формула мына түрде анықталады:

$$(y=f(x)): \quad f'(x)=-\left.\frac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}\right|_{y=f(x)}=-\frac{F_x'(x,f(x))}{F_y'(x,f(x))}.$$

Бұл жағдайда, мысалы, $F_x'(x,f(x))$ дербес туындыны есептеу үшін, алдымен $F(x,y)$ функциядан x бойынша туынды аламыз, содан соң y-тің орнына $y=f(x)$ функцияны қоямыз, кері орындауға болмайды. Ал екінші туындыны табу үшін осы функциядан тағы да бір рет туынды аламыз:

$$f''(x)=\frac{d}{dx}\left(-\frac{F_x'(x,f(x))}{F_y'(x,f(x))}\right).$$

2-ескерту. Егер $F_y'(x_0,y_0)\neq 0$ теңсіздігі орындалмаса, яғни $F_y'(x_0,y_0)=0$ теңдігі орындалса, онда A_0 нүктенің маңайында $F(x,y)=0$ теңдеуінің y бойынша бірнеше шешімі болуы мүмкін. Мысалы, $F(x,y)=x^2+y^2-1=0$ теңдеуіне $F(1{,}0)=0$, $F_y'(1{,}0)=0$ теңдіктері орындалады. A_0 (1,0) нүктенің маңайында $x>1$ үшін, $F(x,y)=0$ теңдеуінің y бойынша нақты шешімі жоқ, ал $x<1$ үшін теңдеудің үзіліссіз екі шешімі бар, олар $y=+\sqrt{1-x^2}$, $y= =-\sqrt{1-x^2}$. $F(x,y)=x^2+y^2=0$, $F(0,0)=F_y'(0,0)=0$ теңдеуінің y бойынша $x\neq 0$ үшін шешімі жоқ. 8.28-теоремадағы $F_y'(x_0,y_0)\neq 0$ шарт $A_0(x_0,y_0)$ нүктенің маңайында тек бір ғана $y=f(x)$ функцияның бар болуы үшін жеткілікті, бірақта ол қажетті шарт емес. Мысалы, $F(x,y)=x^3-y^3=0$ теңдеуі үшін $O(0{,}0)$ нүктеде $F(0,0)=F_y'(0,0)=0$ теңдіктері орындалады, бірақ дегенмен де, бұл теңдеу $O(0{,}0)$ нүктенің маңайында тек бір ғана $y=x$ $(y=f(x))$ функцияны анықтайды.

Мысал. $z^2+x^3+y^4-3=0$ функцияның $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ дербес туындысын есептейік.

Шешуі. (9.12) формуладан: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{3x^2}{2z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{2y^3}{z}$. Осыдан және (9.14) формуланы пайдаланып, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ дербес туындыны табамыз:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{D\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}{Dy}=\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{3x^2}{2z}\right)\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3x^2y^3}{z^3}.$$

Тапсырмалар

1. $z^2-x^2+2y^3+2=0$ функцияның $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ дербес туындысын есептеңдер.

2. $z^2+x+xy^4-3y=0$ функцияның $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ дербес туындысын есептеңдер.

9.3. Беттің және жазық қисық сызықтың ерекше нүктелері

Декарт координат жүйесінде $F(x,y,z)=0$ ($F(x,y)=0$) теңдеумен берілген S бетті (L жазық қисық сызықты) қарастырайық, мұндағы, функция $F(x,y,z)$ ($F(x,y)$) өзінің барлық аргументтері бойынша S беттің (L қисық сызықтың) кез келген нүктесінің белгілі бір маңайының барлық нүктелерінде бірінші ретті үзіліссіз дербес туындылары бар болсын. S беттің (L қисық сызықтың) осы нүктесі ерекше нүкте деп аталады, егер $F(x,y,z)$ ($F(x,y)$) функцияның осы нүктедегі бірінші ретті туындылары нөлге тең болса. Ерекше нүктенің маңайында $F(x,y,z)=0$ ($F(x,y)=0$) теңдеуге 9.1-теореманы қолдануға болмайды, яғни $F(x,y,z)=0$ ($F(x,y)=0$) теңдеуі $x,y,z\,(x,y)$ айнымалыларының кем дегенде біреуі бойынша шешіледі деп тұжырымдаған дұрыс емес. Сондықтан S беттегі (L қисық сызықтағы) ерекше нүктеге жапсарлас (мейлінше жақын) орналасқан беттің бөлігі координат жазықтықтардың (қисық сызықтардың бөлігі координат остердің) біреуінде бірмәнді проекцияланбауы мүмкін. S беттегі (L қисық сызықтағы) ерекше нүктенің маңайындағы бет (қисық сызық) бөлігінің құрылысы күрделі болады, сондықтан оны қосымша зерттеуге тура келеді.

S беттегі (L қисық сызықтағы) ерекше емес нүктелер қарапайым (жай) нүктелер деп аталады. Қарапайым нүктелердің маңайына 9.1-теореманы қолдануға болады, сондықтан қарапайым нүктеге жапсарлас орналасқан S беттің (L қисық сызықтың) бөлігін кем дегенде, бір координат жазықтығына (координат осіне) бір мәнді проекциялауға болады, демек беттің бұл бөлігін зерттеу оңайланады. Енді 9.1-теореманы пайдаланып, $y = f(x)$ функцияның кері функциясы бар болуын қамтамасыз ететін белгіге тоқталайық. $y = f(x)$ функцияны функциялық $F(x, y) = f(x) - y = 0$ теңдеу түрінде қарастырамыз. Онда кері функцияның бар болуы жайындағы сұрақ, жоғарыда айтылған функциялық теңдеудің x бойынша шешілуі туралы сұрақпен бірдей. Олай болса, 9.1-теореманы және осы теоремаға келтірілген ескертуді ескеріп, мынадай қорытындыға келеміз: егер x_0 нүктенің кейбір маңайында $y = f(x)$ функцияның туындысы нөлге тең болмаса әрі оның таңбасы сақталса, онда x_0 нүктенің маңайында, $y = f(x)$ функциянын, y_0 нүктенің маңайында анықталатын және дифференциалданатын

$$x = f^{-1}(y)$$

кері функциясы бар және кері функцияның y_0 нүктедегі туындысы (9.12) формуланың екінші формуласы бойынша $\left[f'(x_0)\right]^{-1}$-ге тең болады.

9.4. Функциялық теңдеулер жүйесінің шешімі туралы теорема

Өткен тақырыпта, бір ғана теңдеумен берілген функциялық теңдеу арқылы айқындалмаған функцияның бар болуын және оның дифференциалданатынын қарастырдық. Ал енді осы тақырыпта саны m айқындалмаған функциядан құралған функциялық теңдеулер жүйесін қарастырамыз:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, ..., x_n, z_1, z_2, ..., z_m) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, ..., x_n, z_1, z_2, ..., z_m) = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ F_m(x_1, x_2, ..., x_n, z_1, z_2, ..., z_m) = 0, \end{cases} \tag{9.15}$$

мұндағы m, n – натурал сандар.

Функциялық теңдеулер жүйесінің шешімін

$$\begin{cases} z_1 = \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n), \\ z_2 = \varphi_2(x_1, x_2, ..., x_n), \\ ... \quad ... \quad ... \\ z_m = \varphi_m(x_1, x_2, ..., x_m) \end{cases} \tag{9.16}$$

түрінде іздестірейік. Өткен тақырыпта қойылған негізгі сұраққа (9.15) функциялық теңдеулер жүйесіне қояйық, яғни (9.15) жүйенің $z_1, z_2, ..., z_m$ айнымалары бойынша өрнектелген (9.16) формула түріндегі шешімін іздестіру.

Анықтама. Егер (9.16) формуладағы $\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциялардың әрқайсысы өзінің $x_1, x_2, ..., x_n$ айнымаларының өзгеру облысында үзіліссіз әрі дифференциалданса, онда бұл шешім D облыста үзіліссіз әрі дифференциалданады деп аталады.

Енді мына белгілеулерді енгізейік: $x_1, x_2, ..., x_n$, $z_1, z_2, ..., z_m$ айнымалардан анықталған $n+m$ кеңістікті R таңбамен, ал $x_1, x_2, ..., x_n$ айнымалардан анықталған n кеңістікті R' таңбамен белгілейік. (9.15) жүйедегі $F_1, F_2, ..., F_m$ функцияларды және олардың бірінші ретті дербес туындыларынан анықталған Якоби анықтауышы (якобиан анықтауышы) деп аталатын мына анықтауышты қарастырайық және ол былай бегіленеді $\dfrac{D(F_1, F_2, ..., F_m)}{D(z_1, z_2, ..., z_m)}$:

$$\frac{D(F_1, F_2, ..., F_m)}{D(z_1, z_2, ..., z_m)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial z_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z_2} & ... & \dfrac{\partial F_1}{\partial z_m} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial z_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z_2} & ... & \dfrac{\partial F_2}{\partial z_m} \\ ... & ... & ... & ... \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial z_1} & \dfrac{\partial F_m}{\partial z_2} & ... & \dfrac{\partial F_m}{\partial z_m} \end{vmatrix} = \tag{9.17}$$

$$= J(z_1, z_2, ..., z_n).$$

9.2-теорема (9.1-теореманың жалпыламасы) R кеңістігіндегі $A_0(x_1^0, x_2^0, \quad ..., x_n^0, z_1^0, z_2^0, ..., z_m^0)$ нүктенің кейбір маңайында m функция

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, ..., x_n, z_1, z_2, ..., z_m) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, ..., x_n, z_1, z_2, ..., z_m) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_m(x_1, x_2, ..., x_n, z_1, z_2, ..., z_m) = 0, \end{cases} \tag{9.18}$$

дифференциалдансын әрі олардан $z_1, z_2, ..., z_m$ айнымалары бойынша алынған дербес туындылары A_0' нүктеде үзіліссіз болсын. Егер (9.18) функциялар A_0 нүктеде нөлге тең, ал $\dfrac{D(F_1, F_2, ..., F_m)}{D(z_1, z_2, ..., z_m)}$ якобиан анықтауышы нөлге тең болмаса, онда жеткіліктігінше аз $\varepsilon_1 > 0, \quad \varepsilon_2 > 0, ..., \varepsilon > 0$ сандары үшін R' кеңістігіндегі $A_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ нүктенің маңайы табылып, осы маңайда $|z_1 - z_1^0| < \varepsilon_1$, $|z_2 - z_2^0| < \varepsilon_2$,..., $|z_m - z_m^0| < \varepsilon_m$ теңсіздіктерді қанағаттандыратын тек бір ғана (9.16) функциялар табылады әрі олар (9.15) жүйенің шешімі болады және ол шешім жоғарыда айтылған A_0' нүктенің маңайында үзіліссіз әрі дифференциалданады. Теореманы дәлелдеусіз қабыл алып, (9.15) функциялық теңдеулер жүйенің дербес туындыларын есептейік. Бұл жағдайда 9.2-теорема орындалсын деп ұйғарайық. Онда, (9.16) функциялар (9.15) жүйенің шешімі. Осы шешімді (9.15) жүйеге қойып, тепе-теңдікті x_l бойынша дифференциалдайық, сонда

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial z_1}\dfrac{\partial z_1}{\partial x_l} + \dfrac{\partial F_1}{\partial z_2}\dfrac{\partial z_2}{\partial x_l} + ... + \dfrac{\partial F_1}{\partial z_m}\dfrac{\partial z_m}{\partial x_l} + \dfrac{\partial F_1}{\partial x_l} = 0, \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial z_1}\dfrac{\partial z_1}{\partial x_l} + \dfrac{\partial F_2}{\partial z_2}\dfrac{\partial z_2}{\partial x_l} + ... + \dfrac{\partial F_2}{\partial z_m}\dfrac{\partial z_m}{\partial x_l} + \dfrac{\partial F_2}{\partial x_l} = 0, \\ \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial z_1}\dfrac{\partial z_1}{\partial x_l} + \dfrac{\partial F_m}{\partial z_2}\dfrac{\partial z_2}{\partial x_l} + ... + \dfrac{\partial F_m}{\partial z_m}\dfrac{\partial z_m}{\partial x_l} + \dfrac{\partial F_m}{\partial x_l} = 0, \end{cases}$$

мұндағы $l = \overline{1, m}$. Соңғы жүйе $\dfrac{\partial z_1}{\partial x_l}, \dfrac{\partial z_2}{\partial x_l}, ..., \dfrac{\partial z_m}{\partial x_l}$ m белгісізі бар сызықты теңдеулер жүйе және бұл жүйенің анықтауышы якобиан анықтауышы әрі ол A_0 нүктеде нөлге тең емес. Олай болса, Крамер теоремасы бойынша ([1], 3.2-теорема) соңғы жүйенің тек бір ғана шешімі бар және ол шешім мына формуладан анықталады:

$$\frac{\partial z_k}{\partial x_l}=\frac{\dfrac{D(F_1,F_2,...,F_m)}{D(z_1,z_2,...,z_{k-1},x_l,z_{k+1},...,z_m)}}{\dfrac{D(F_1,F_2,...,F_m)}{D(z_1,z_2,...,z_m)}},$$

функциялық теңдеулер жүйенің екінші, үшінші, т.с.с. дербес туындыларын табу үшін (9.17) функцияларға қосымша шарт талап етеміз, мысалы, екінші ретті дербес туындыны табу үшін (9.17) функциялар қарастырылып отырған нүктеде екі рет дифференциалдануы жеткілікті.

1-мысал. $y+\frac{1}{2}\sin y-x=0$ функцияның тек бір ғана $y=\varphi(x)$ айқын түрдегі шешімі бар болатынын дәлелдейік, $x\in(-\infty;+\infty)$.

Шешуі. $F(x,y)=y+\frac{1}{2}\sin y-x$ болсын. Онда $F_y'=1+\frac{1}{2}\cos y>0$ болады. Демек, тағайындалған x-тің мәні үшін $F(x,y)$ функциясы y аргумент бойынша өспелі және кез келген тағайындалған x-тің мәні мен қажеттілігінше үлкен $|y|$ мәндері үшін мына теңсіздіктер орындалады:

$$F(x,y)<0,\ y<0,\ F(x,y)>0,\ y>0.$$

$F(x,y)$ үзіліссіз болғандықтан кез келген x үшін тек бір ғана y-табылып, осы мәндер үшін $F(x,y)=0$ теңдігі орындалады, яғни кез келген y үшін $y+\frac{1}{2}\sin y-x=0$ теңдеуі тек бір ғана $y=\varphi(x)$ функцияны анықтайды.

2-мысал. $z^3-xyz+y^2=16$ функциясы $A_0(1;4;2)$ нүктенің кейбір маңайында тек бір ғана $z=\varphi(x,y)$ функцияны анықтайды.

Шешуі. $F(x,y,z)=z^3-xyz+y^2-16$ функциясы $A_0(1;\ 4;2)$ нүктенің кез келген маңайында диффренциалданады, ал $F_z'=3z^2-xy$ дербес туынды A_0 нүктеде үзіліссіз әрі $F(1;4;2)=0$, $F_z'(1;4;2)=8\neq 0$, яғни $F(x,y,z)$ функциясы 9.1-теореманың барлық шарттарын қанағаттандырады. Сондықтан A_0 нүктенің кейбір маңайында $z^3-xyz+y^2=16$ теңдеуінің тек бір ғана $z=\varphi(x,y)$ шешімі бар және де $\varphi(1;4)=2$. $F(x,y,z)$ функциясы A_0 нүктенің маңайында екі рет дифференциалданатын болғандықтан $z=\varphi(x,y)$ функциясы $A_0'(1;4)$ нүктенің маңайында екі рет дифференциалданады.

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. $\Phi(x, y, z)$ функцияның толық дербес туындылары.

2. $y + \frac{1}{3} sin\, y - x = 0$ функцияның тек бір ғана $y = \varphi(x)$ түрдегі шешімі бар болатынын дәлелде, $x \in (-\infty; +\infty)$.

3. $z^3 - xyz + y^2 = 25$ функциясы $A_0(-1,4;3)$ нүктенің кейбір маңайында тек бір ғана $z = \varphi(x, y)$ функцияны анықтайтынын көрсет.

9.5. Тәуелді функциялар және функциялардың тәуелсіздігінің жеткілікті белгісі. Функциялық матрица

Біз m өлшемді ашық D облысында анықталған және дифференциалданатын бірдей n аргументті m функцияны қарастырайық:

$$\begin{cases} z_1 = \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_n), \\ z_2 = \varphi_2(x_1, x_2, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_n), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ z_m = \varphi_m(x_1, x_2, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_n), \end{cases} \tag{9.19}$$

мұндағы $n \geq m$.

Анықтама. (9.19) функциялардың біреуі, мысалы z_k қалған функцияларға D облысында тәуелді деп аталады, егер D' облысының барлық $(x_1, x_2, ..., x_n)$ нүктелеріне

$$z_k = \Phi(z_1, z_2, ..., z_{k-1}, z_{k+1}, ..., z_n) \tag{9.20}$$

теңдігі орындалса, мұндағы, $\Phi(z_1, z_2, ..., z_{k-1}, z_{k+1}, ..., z_n)$ функция өзінің аргументтерінің өзгеру облысында анықталған және дифференциалданатын функция.

(9.19) функциялар D **облысында тәуелді** деп аталады, егер осы функциялардың біреуі қалғандарына тәуелді болса.

Егер дифференциалданатын $\Phi(z_1, z_2, ..., z_{k-1}, z_{k+1}, ..., z_n)$ функция жоқ болып, D облысының барлық нүктелері үшін (9.20) теңдік орындалса, онда $z_1, z_2, ..., z_m$ функциялары D облысында тәуелсіз деп аталады. Басқаша айтқанда, егер (9.19) функциялардың кез келген біреуі қалғандарына тәуелді болмаса, онда (9.19) функциялар D облысында **тәуелсіз** деп аталады.

9.3-теорема. Егер (9.19) функциялар $A_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0, x_{m+1}^0, ..., x_n^0)$ нүктенің маңайында анықталса әрі дифференциалданса және осы функциялардың якобиан анықтауышы A_0 нүктеде m айнымалардың біреуі бойынша нөлге тең болмаса, онда (9.19) функциялар A_0 нүктенің маңайында тәуелсіз болады.

Дәлелдеуі. A_0 нүктеде $\frac{D(z_1, z_2, ..., z_m)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)}$-якобиан анықтауышы нөлге тең болмасын. Теореманы кері жориық, яғни A_0 нүктенің маңайында $z_1, z_2, ..., z_m$ функциялары тәуелді болсын. Демек, $z_1, z_2, ..., z_m$ функциялардың бірі, мысалы, z_k функция A_0 нүктенің маңайындағы барлық нүктелер үшін қалған функциялар арқылы өрнектеледі:

$$z_k = \Phi(z_1, z_2, ..., z_{k-1}, z_{k+1}, ..., z_m), \tag{9.21}$$

мұндағы Φ – дифференциалданатын функция. Күрделі функцияны дифференциалдау ережені пайдаланып, z_k функциядан кез келген x_l айныма бойынша туынды табайық:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_l} = \frac{\partial \Phi}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial x_l} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_2}\frac{\partial z_2}{\partial x_l} + ... + \frac{\partial \Phi}{\partial z_{k-1}}\frac{\partial z_{k-1}}{\partial x_l} +$$

$$+ \frac{\partial \Phi}{\partial z_{k+1}}\frac{\partial z_{k+1}}{\partial x_l} + .. + \frac{\partial \Phi}{\partial z_m}\frac{\partial z_m}{\partial x_l}, \tag{9.22}$$

мұндағы $l = \overline{1, m}$. Егер (9.22) формуладағы $l = 1, 2, ..., m$ мәндерінің кез келгенін A_0 нүктеде алсақ, онда (9.21) якобиан анықтауышының k жатық жолының сәйкес коэффициенттері $\frac{\partial \Phi}{\partial z_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial z_2}, ..., \frac{\partial \Phi}{\partial z_{k-1}}, \frac{\partial \Phi}{\partial z_{k+1}}, ..., \frac{\partial \Phi}{\partial z_m}$ болатын қалған жатық жолдарының сызықты комбинациясы арқылы өрнектелінеді дейміз. Олай болса, A_0 нүктеде (9.21) якобиан анықтауышы нөлге тең, ал бұл тұжырым теорема шартына қайшы келеді. Осы қайшылық теореманы дәлелдейді.

Енді (9.19) функциялар $A_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0)$ нүктенің кейбір маңайында анықталсын әрі дифференциалдансын және оның барлық бірінші ретті дербес туындылары A_0 нүктенің өзінде үзіліссіз болсын. (9.19) функциялардың дербес туындыларынан анықталған функциялық матрица деп аталатын m жатық, n тік жолдардан құралған мына матрицаны қарастырайық:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{9.23}$$

9.4-теорема. Егер (9.23) функциялық матрицаның: 1) r ретті миноры $A_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ нүктеде нөлге тең болмаса; 2) барлық $r+1$ ретті минорлары A_0 нүктенің кейбір маңайында нөлге тең болса, онда r ретті минордағы r функциялар A_0 нүктенің маңайында тәуелсіз, ал қалған функциялардың әрқайсысы осы r функцияларға A_0 нүктенің маңайында тәуелді, мұндағы $m > r$.

Дәлелдеуі. (9.23) функциялық матрицаның жоғарғы сол жағындағы r ретті миноры A_0 нүктеде нөлге тең болмасын, яғни

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(A_0) & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}(A_0) & \dots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_r}(A_0) \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}(A_0) & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}(A_0) & \dots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_r}(A_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\varphi_r}{\partial x_1}(A_0) & \frac{\partial\varphi_r}{\partial x_2}(A_0) & \dots & \frac{\partial\varphi_r}{\partial x_r}(A_0) \end{vmatrix} \neq 0 \quad . \tag{9.24}$$

Онда $z_1, z_2, ..., z_r$ функциялардың A_0 нүктенің маңайындағы тәуелсіздігін 9.3-теоремадан аламыз. Олай болса, $z_{r+1}, z_{r+2}, ..., z_m$ функциялардың кез келгені A_0 нүктенің маңайында $z_1, z_2, ..., z_r$ функцияларына тәуелді болатынын дәлелдесек жеткілікті. Дәлелдеу барысында (9.19) функциялардың алғашқы r функцияларына назар аударатын боламыз және $z_1^0, z_2^0, ..., z_r^0$ таңбалармен мына

$$\begin{aligned} z_1^0 &= \varphi_1(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0), \\ z_2^0 &= \varphi_2(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0), \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ z_r^0 &= \varphi_r(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0), \end{aligned}$$

сандарды белгілейік. Онда $n+r$ өлшемді $(z_1, z_2, ..., z_r, x_1, x_2, ..., x_n)$ айнымалы кеңістігі $N_0(z_1^0, z_2^0, ..., z_r^0, x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ нүктенің маңайында (9.19) функциялардың алғашқы r функциялары

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, ..., x_n, z_1, z_2, ..., z_r) \equiv \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n) - z_1 = 0, \\ F_2(x_1, x_2, ..., x_n, z_1, z_2, ..., z_r) \equiv \varphi_2(x_1, x_2, ..., x_n) - z_2 = 0, \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ F_r(x_1, x_2, ..., x_n, z_1, z_2, ..., z_r) \equiv \varphi_r(x_1, x_2, ..., x_n) - z_r = 0 \end{cases} \tag{9.25}$$

теңдеулер жүйенің тек бір ғана шешімі болады әрі ол дифференциалданады. Шынында да, $F_1, F_2, ..., F_r$ функцияларының бәрі де $N_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, z_1^0, z_2^0, ..., z_r^0)$ нүктеде нөлге тең, ал якобиан $\dfrac{D(F_1, F_2, ..., F_r)}{D(z_1, z_2, ..., z_r)} = (-1)^r \neq 0$ болатынына оңай көз жеткізуге болады. Онда, 9.2-теореманың шарттары орындалады. Демек, (9.21) функциялардың алғашқы r функциялары (9.25) функциялық теңдеулер жүйенің шешімі болады. Екінші жағынан, (9.24) минорға тең $\dfrac{D(F_1, F_2, ..., F_r)}{D(z_1, z_2, ..., z_r)}$ якобиан N_0 нүктеде нөлге тең емес, олай болса, осы нүктенің маңайында (9.25) теңдеулер жүйесі $x_1, x_2, ..., x_r$ айнымалылары бойынша бір мәнді шешіледі, яғни N_0 нүкте маңайының барлық нүктелерінде (9.25) жүйенің дифференциалданатын тек бір ғана шешімі бар және ол шешімді былай белгілейік:

$$\begin{cases} x_1 = \psi_1(x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n, z_1, z_2, ..., z_r), \\ x_2 = \psi_2(x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n, z_1, z_2, ..., z_r), \\ ... \quad ... \quad ... \\ x_r = \psi_r(x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n, z_1, z_2, ..., z_r). \end{cases} \tag{9.26}$$

(9.26) форрмуладағы теңдеулер мен (9.19) формуладағы теңдіктер $N_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, z_1^0, z_2^0, ..., z_r^0)$ нүктенің маңайында эквивалентті. Егер (9.26) формулада анықталған $x_1, x_2, ..., x_r$-ді (9.19) формуладағы алғашқы r теңдеудегі $x_1, x_2, ..., x_r$-ге қойсақ, онда (9.19) теңдеудің алғашқы r теңдеуі $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$, $z_1, z_2, ..., z_r$ айнымалар бойынша тепе-теңдікке айналады:

$$\begin{cases} z_1 \equiv \varphi_1(\psi_1(\cdot), \psi_2(\cdot), ..., \psi_r(\cdot)), \\ z_2 \equiv \varphi_2(\psi_1(\cdot), \psi_2(\cdot), ..., \psi_r(\cdot)), \\ ... \quad ... \quad ... \\ z_r \equiv \varphi_r(\psi_1(\cdot), \psi_2(\cdot), ..., \psi_r(\cdot)), \end{cases} \tag{9.27}$$

мұндағы $(\cdot)=(x_{r+1},x_{r+2},...,x_n,z_1,z_2,...,z_r)$. (9.27) тепе-теңдіктерді x_l айнымалар бойынша дифференциалдайық және $z_1,z_2,...,z_r$ айнымалары x_{r+1}, $x_{r+2},...,x_n$ айнымаларына тәуелді болмайтынын ескерсек ($l=\overline{r+1,n}$), онда

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_l}+\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\cdot\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_l}+...+\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_r}\cdot\dfrac{\partial\psi_r}{\partial x_l}+\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_l}=0, & (9.28_1)\\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_l}+\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\cdot\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_l}+...+\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_r}\cdot\dfrac{\partial\psi_r}{\partial x_l}+\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_l}=0, & (9.28_2)\\ ...\quad ...\quad ... & \\ \dfrac{\partial\varphi_r}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_l}+\dfrac{\partial\varphi_r}{\partial x_2}\cdot\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_l}+...+\dfrac{\partial\varphi_r}{\partial x_r}\cdot\dfrac{\partial\psi_r}{\partial x_l}+\dfrac{\partial\varphi_r}{\partial x_l}=0 & (9.28_r)\end{cases}$$

теңдіктері орындалады және олар $A_0(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$ нүктенің кейбір маңайындағы барлық $x_1,x_2,...,x_r,x_{r+1},...,x_n$ нүктелер үшін де орындалады.

Енді A_0 нүктенің кейбір маңайында z_{r+1} функциясы $z_1,z_2,...,z_r$ функцияларына тәуелді болатынына көз жеткізу үшін, (9.26) формуладан анықталған $x_1,x_2,...,x_r$ мәндерді (9.19) формуладағы $r+1$ теңдікке қояйық ($m>r$):

$$z_{r+1}=\varphi_{r+1}(\psi_1(\cdot),\psi_2(\cdot),...,\psi_r(\cdot))$$

және оны Φ әрпімен белгілейік:

$$z_{r+1}=\Phi(x_{r+1},x_{r+2},...,x_n,z_1,z_2,...,z_r) \qquad (9.29)$$

Осы белгілеуден соң, теореманы дәлелдеу үшін $A_0(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$ нүктенің жеткілікті аз маңайындағы $x_1,x_2,...,x_r,x_{r+1},...,x_n$ айнымалардың мәндері үшін Φ функция $x_{r+1},x_{r+2},...,x_n$ айнымаларына тәуелсіз болатынын дәлелдесек жеткілікті. Ол үшін A_0 нүктенің жеткілікті аз маңайындағы барлық $x_1,x_2,...,x_n$ мәндер үшін

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_l}=0,\qquad l=\overline{r+1,n} \qquad (9.30)$$

теңдігі орындалатынын дәлелдесек жеткілікті. Ол үшін (9.29) күрделі функцияны x_l айныма бойынша дифференциалдайық:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_l}=\frac{\partial\varphi_{r+1}}{\partial x_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial x_l}+\frac{\partial\varphi_{r+1}}{\partial x_2}\frac{\partial\psi_2}{\partial x_l}+...+\frac{\partial\varphi_{r+1}}{\partial x_r}\frac{\partial\psi_r}{\partial x_l}+\frac{\partial\varphi_{r+1}}{\partial x_l}. \qquad (9.31_{r+1})$$

Енді (9.23) матрицаның төмендегі $r+1$-ретті минорын қарастырайық:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_r} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_l} \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_r} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial\varphi_r}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi_r}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial\varphi_r}{\partial x_r} & \dfrac{\partial\varphi_r}{\partial x_l} \\ \dfrac{\partial\varphi_{r+1}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi_{r+1}}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial\varphi_{r+1}}{\partial x_r} & \dfrac{\partial\varphi_{r+1}}{\partial x_l} \end{vmatrix}. \qquad (9.32)$$

Теореманың шарты бойынша A_0 нүктенің маңайындағы барлық нүктелерде (9.32) минор нөлге тең. $(2.31_1),(2.31_2),\dots,$ (2.31_{r+1}) теңдіктерді (9.32) минордың соңғы тік жол элементтерінің сәйкес алгебралық толықтауышына ([12], 1.4-тақырып) көбейтейік және саны $r+1$-ге тең осы теңдіктерді мүшелеп қосайық. Анықтауыштың кез келген тік жолының элементтерін оның алгебралық толықтауыштарының көбейтінділерінің қосындысы осы анықтауыштың мәніне тең ([12], 1.4-теорема):

$$\Delta = \frac{\partial\Phi}{\partial x_l} A_{kr+1}, \qquad k = \overline{1, r+1},$$

мұндағы A_{kr+1} анықтауыштың $\dfrac{\partial\varphi_k}{\partial x_l}$ элементтерінің алгебралық толықтауышы және ол A_0 нүктенің маңайында нөлге тең емес (9.24) анықтауышқа тең. (9.23) матрицаның элементтеріндегі барлық дербес туындылар A_0 нүктеде үзіліссіз, сондықтан (9.24) анықтауышы A_0 нүктеде үзіліссіз. Олай болса, үзіліссіз функция таңбасының тұрақты болуы теорема бойынша, (9.23) матрицаның анықтауышы A_0 нүктенің маңайында да нөлге тең емес. Онда, соңғы теңдіктен дәлелдеу керек (9.30) теңдікті аламыз. Теорема дәлелденді.

1-мысал. $y_1 = x_1 + x_2$, $y_2 = x_1 \cdot x_2$ функциялары $O(0,0)$ нүктенің кез келген маңайында тәуелсіз болатынын дәлелдейік.

Шешуі. y_1 мен y_2 функциялар үшін x_1 мен x_2 айнымалары бойынша якобиан анықтауышын құрайық:

$$\frac{D(y_1, y_2)}{D(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_1 \end{vmatrix} = x_1 - x_2.$$

Осыдан якобиан анықтауышы $O(0,0)$ нүктеде нөлге тең. Бірақ $O(0,0)$ нүктенің кез келген маңайында $x_1 \neq x_2$ теңсіздігі орындалатын $A_0(x_1^0, x_2^0)$ нүкте табылады, яғни $\frac{D(y_1, y_2)}{D(x_1, x_2)}(A_0) \neq 0$.

$O(0,0)$ нүктенің $U(0)$ маңайы $A_0(x_1^0, x_2^0)$ нүктенің маңайы болады, онда $A_0(x_1^0, x_2^0)$ нүктенің $U(0)$ маңайы үшін 9.3-теореманың шарттары орындалады, олай болса, y_1 мен y_2 функциялары $U(0)$ маңайында үзіліссіз.

2-мысал. Егер $y_1 = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$ $\quad y_2 = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ 0, & -1 < x < 0, \\ (x+1)^2, & x \leq -1 \end{cases}$

Функциялары берілсе, онда сандар осінің кез келген нүктенің кейбір маңайында y_1 функциясы y_2 функциясына тәуелді болатынын, ал бүкіл сандар осінде y_1 функциясы y_2 функциясына тәуелді болмайтынын дәлелдейік.

Шешуі. $x > -1$ теңсіздікті қанағаттандыратын сандар осіндегі кез келген x нүктеге y_1 мен y_2 функциялардың арасындағы тәуелділікті $y_1 = \Phi_1(y_1) \equiv y_2$ фоормуласымен өрнектейтін маңайды, ал $x \leq -1$ үшін $y_1 = \Phi_2(y_2) = 0$ формуламен өрнектейтін маңайды табуға болады. Сондықтан y_1 функциясы y_2 функциясына x нүктенің кейбір маңайында тәуелді болады. Енді y_1 функциясы барлық сандар осінде y_2 функцияға тәуелсіз болатынын көрсетейік. Ол үшін кері жориық, яғни бүкіл сандар осінде y_1 функция y_2 функцияға тәуелді болсын. Онда барлық x үшін дифференциалданатын $\Phi(y_2)$ функция табылып, $y_1 = \Phi(y_2)$ теңдік орындалады, яғни $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ функцияларды $y_1 = \Phi(y_2)$ теңдікке қойғанда, бұл теңдік x айнымалы бойынша тепе-теңдікке айналады: $y_1(x) \equiv \Phi(y_2(x))$. Осы тепе-теңдіктегі $x = -2$ болсын делік және $y_1(-2) = 0$, $y_2(-2) = = 1$ теңдіктерді ескеріп, $\Phi(1) = 0$ теңдігін аламыз. Енді $x = 1$ болсын және $y_1(1) = 1$, $y_2(1) = 1$ теңдіктерін ескеріп, $\Phi(1) = 1$ теңдігін аламыз. Сонымен, $\Phi(1) = 0$ және $\Phi(1) = 1$ теңдіктері бір-біріне қарама-қайшы келеді. Демек, бүкіл сандар осінде $y_1(x)$ функция $y_2(x)$ функцияға тәуелді емес.

3-мысал. $y_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, $y_2 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4$, $y_3 = (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2$ функцияларын сызықты тәуелділікке зерттейік.

Шешуі. y_1, y_2, y_3 функциялардың функционалды матрицасын құрайық

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2(x_1 + x_2) & 2(x_2 + x_4) & 2(x_1 + x_3) & 2(x_2 + x_4) \end{pmatrix}$$

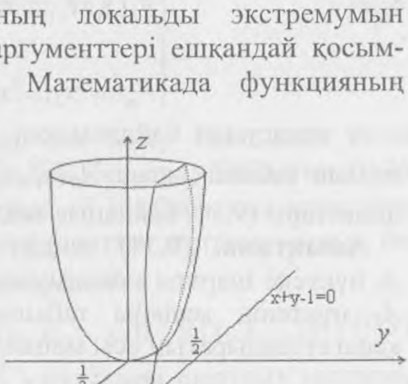
Бұл матрицаның нөлге тең емес екінші ретті миноры бар, мысалы

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

ал үшінші ретті барлық минорлар нөлге тең. Онда *9.4-теорема* бойынша y_1 мен y_2 функциялары $A(x_1, x_2, x_3, x_4)$ нүктенің маңайының әрбір нүктесінде тәуелсіз, яғни E^4 кеңістігінде олар тәуелсіз, ал y_3 функция $y_1(x)$ пен $y_2(x)$ функцияларына A нүктенің кейбір маңайының әрбір нүктесінде тәуелді. Дегенмен, осыдан y_3 функция y_1 мен y_2 функцияларға бүкіл E^4 кеңістігінде тәуелді деп айтуға болмайды (2-мысалды қара). Бірақ y_1, y_2, y_3 функциялары $y_3 = \frac{1}{2}\left(y_1^2 + y_2^2\right)$ өрнекпен түрленетініне оңай көз жеткізуге болады, яғни y_3 функция бүкіл E^4 кеңістікте y_1 мен y_2 функцияларына тәуелді. Сонымен, y_1, y_2, y_3 функциялары E^4 кеңістікте тәуелді болады.

9.6. Функцияның шартты экстремумы

Біз *8.18-тақырыпта* функцияның локальды экстремумын қарастырдық, мұнда функцияның аргументтері ешқандай қосымша шартқа байланыссыз болды. Математикада функцияның экстремумын іздестіргенде оның аргументтері қосымша шартқа байланысты болады. Осындай функцияның экстремумы **шартты экстремум** деп аталады.



9.2-сурет

Мысалы, $z = x^2 + y^2$ функцияның аргументтері $x + y - 1 = 0$ теңдеуге байланысты болатын $z(x, y) = x^2 + y^2$ функцияның экстремумын табу керек болсын, яғни $z(x, y)$ функцияның экстремумын бүкіл XOY жазықтығында емес $x+y-1=0$ түзуінің бойында ғана іздестіру керек. Ол үшін $z=x^2+y^2$ функциядағы y айнымалының орнына $x+y-1=0$ түзуден y-ті тауып қоямыз:

$$z(x)=2x^2-2x+1$$

Енді бір айнымалы $z(x)=2x^2-2x+1$ функцияның экстремумын табайық (9.2-сурет): $z'=4x-2$, $z''=4$, $x=\frac{1}{2}$. Онда $z(x)$ функциясының $x=\frac{1}{2}$ нүктеде $z\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ минимумы бар. Сонымен, $x+y-1=0$ түзумен байланысты $z(x,\ y)=x^2+y^2$ функциясының $A_2\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ нүктедегі шартты минимумы $u_{min}= \ =\frac{1}{2}$-ге тең болады. Ал $z(x,y)=x^2+y^2$ функцияның шартсыз минимумы $O(0,0)$ нүктеде қабылдайды және ол $z(0,0)=0$-ге тең. 9.2-суреттен $z(x,y)=x^2+y^2$ функцияның XOY жазықтықтағы минимумы осы функцияның $x+y-1=0$ түзуі бойындағы минимумымен бірдей емес екенін байқауға болады.

Енді $n+m$ айнымалы

$$z=f(x_1,x_2,...,x_n,y_1,y_2...,y_m) \tag{9.33}$$

функцияның аргументтері **байланыс шарттар (теңдеулер)** деп аталатын

$$\begin{cases} F_1(x_1,x_2,...,x_n,y_1,y_2,...,y_m)=0, \\ F_2(x_1,x_2,...,x_n,y_1,y_2,...,y_m)=0, \\ ... \qquad ... \qquad ... \\ F_m(x_1,x_2,...,x_n,y_1,y_2,...,y_m)=0 \end{cases} \tag{9.34}$$

m теңдеумен байланысқан (9.33) функцияның шартты экстремумын табайық және $A_0(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0,y_1^0,y_2^0,...,y_m^0)$ нүктенің координаттары (9.34) байланыс теңдеулерді қанағаттандырсын.

Анықтама. (9.34) теңдігі орындалғанда (9.34) функцияның A_0 нүктеде шартты максимумы (минимумы) бар деп аталады, егер A_0 нүктенің маңайы табылып, координаттары (9.34) теңдікті қанағаттандыратын осы маңайдың кез келген

$$A(x_1,x_2,...,x_n,y_1,y_2,...,\ y_m)\quad (A\neq A_0)$$

нүктесі үшін

$$f(A)>f(A_0)\ \left(f(A)<f(A_0)\right)$$

теңсіздігі орындалса.

Демек, координаттары (9.34) байланыс шарттарды қанағаттандыратын A_0 нүктедегі функцияның шартты максимумы (минимумы) дегеніміз – A_0 нүктенің кейбір маңайындағы барлық нүктелерге қатысы жоқ, тек координаттары (9.34) теңдіктерді қанағаттандыратын A_0 нүктенің маңайындағы нүктелердегі (9.33) функция мәндерінің ең үлкен (ең кіші) мәні.

Байланыс (9.34) шарттары бар (9.33) функцияның шартты экстремумын табу үшін (9.34) теңдеулердегі $F_i(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m)$ функциялар A_0 нүктенің кейбір маңайында дифференциалдансын және A_0 нүктенің өзінде $F_i(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m)$ функциядан $y_1, y_2, ..., y_m$ айнымалары бойынша алынған дербес туындылары үзіліссіз, ол якобиан анықтауышы

$$\frac{D(F_1, F_2, ..., F_m)}{D(y_1, y_2, ..., y_m)} \neq 0, \quad i \neq \overline{1, m} \tag{9.35}$$

болсын деп ұйғарайық. Онда, *9.2-теорема* бойынша жеткілікті аз $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_m$ оң сандары үшін $(x_1, x_2, ..., x_n)$ айнымалы кеңістігіндегі $A_0'(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ нүктенің маңайы табылып, осы маңайдың барлық нүктелерінде

$$|y_1 - y_1^0| < \varepsilon_1, \ |y_2 - y_2^0| < \varepsilon_2, ..., |y_m - y_m^0| < \varepsilon_m$$

теңсіздіктерді қанағаттандыратын

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_m), \\ y_2 = \varphi_2(x_1, x_2, ..., x_m), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m = \varphi_m(x_1, x_2, ..., x_m) \end{cases} \tag{9.36}$$

функциялары анықталады әрі олар тек біреу ғана және (9.34) жүйенің дифференциалданатын шешімі болады. Табылған (9.36) функцияларды (9.33) формулаға қойып, (9.34) байланыс теңдеулері бар (9.33) функцияның A_0 нүктедегі шартты экстремумының бар болуын табу есебінен, $x_1, x_2, ..., x_n$ аргументті

$$z = f(x_1, x_2, ..., x_n, \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n), ..., \varphi_m(x_1, x_2, ..., x_n)) = \Phi(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{9.37}$$

күрделі функцияның $A_0'(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ нүктедегі шартсыз экстремумының бар болуын табу есебіне келеміз ((9.37) функцияның шартсыз экстремумын табуды *8.17* мен *8.18-тақырыптарда* қарастырғанбыз).

Енді шартты экстремумды іздестіргенде (9.34) байланыс теңдеулерді шешпей-ақ, A_0 нүктедегі функцияның шартты экстремумы бар болуының ең болмағанда қажетті белгісін табу жолын қарастырайық. Ол үшін (9.33) функция A_0 нүктеде дифференциалдансын әрі осы нүктеде (9.34) байланыс шартттары бар (9.33) функцияның шартты экстремумы бар болсын (немесе (9.37) функцияның A_0' нүктеде шартсыз экстремумы бар болсын). $z = \Phi(x_1, x_2, ..., x_n)$ функция экстремумының A_0' нүктедегі қажетті белгісі бойынша, осы функцияның A_0 нүктедегі бірінші ретті дифференциалы кез келген $dx_1, dx_2, ..., dx_m$ бойынша нөлге тепе-тең:

$$dz = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(A_0')dx_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}(A_0')dx_2 + ... + \frac{\partial \Phi}{\partial x_m}(A_0')dx_m = 0. \tag{9.38}$$

Бірінші дифференциалдың инварианттылық қасиеті бойынша және (9.37) формуланы пайдаланып, (9.38) формуланы мына түрде жазайық:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x_1}(A_0)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(A_0)dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A_0)dx_n +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y_1}(A_0)dy_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial y_m}(A_0)dy_m = 0, \tag{9.39}$$

мұндағы $dy_1, dy_2, ..., dy_m$ дифференциалдар (9.36) функциялардың дифференциалдары. Олай болса, (9.39) теңдік $dy_1, dy_2, ..., dy_m$ бойынша нөлге тепе-тең емес. Енді (9.34) жүйенің шешімі болатын (9.36) функцияларды (9.34) байланыс шарттарға қойдық деп есептейік. Бұл жағдайда, (9.34) байланыс шарттар тепе-теңдіктерге айналады және оларды дифференциалдайық:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial F_1}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}dy_1 + ... + \frac{\partial F_1}{\partial y_m}dy_m = 0, \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial F_2}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial F_2}{\partial y_1}dy_1 + ... + \frac{\partial F_2}{\partial y_m}dy_m = 0, \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial F_m}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial F_m}{\partial y_1}dy_1 + ... + \frac{\partial F_m}{\partial y_m}dy_m = 0, \end{cases} \tag{9.40}$$

мұндағы дербес туындылар $A_0(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m)$ нүктеде алынған.

Ұйғаруымыз бойынша, (9.35) якобиан анықтауышы A_0 нүктеде нөлге тең емес, олай болса, (9.40) сызықты теңдеулер жүйедегі $dy_1, dy_2, ..., dy_m$ дифференциалдарын $dx_1, dx_2, ..., dx_m$ дифференциалдар арқылы сызықты функция ретінде өрнектеуге болады. Осы $dy_1, dy_2, ..., dy_m$ өрнектерді тауып, (9.39) теңдікке қояйық және оларды $dx_1, dx_2, ..., dx_m$ өрнектері бойынша жинақтап мына теңдікті аламыз: $A_1dx_1 + A_2dx_2 + ... + A_ndx_n = 0$, мұндағы, $A_1, A_2, ..., A_n$ таңбалары арқылы A_0 нүктедегі $f, F_1, F_2, ..., F_m$ функциялардың дербес туындылары белгіленген.

Соңғы теңдеуде тек қана тәуелсіз айнымалардың дифференциалдары ғана бар, олай болса, бұл теңдіктен

$$A_1 = 0, A_2 = 0, ..., A_n = 0 \tag{9.41}$$

теңдіктерін аламыз. (9.41) теңдіктермен) (9.34) байланыс шарттарды біріктіріп, (9.34) байланыс шарттары бар (9.33) **функция экстремумы бар болуының қажетті белгісін** табамыз:

$$A_1 = 0, A_2 = 0, ..., A_n = 0, \quad F_1 = 0, F_2 = 0, ..., F_m = 0. \tag{9.42}$$

Сонымен, функцияның шартты экстремумы бар болуы мүмкін болатын $A_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, y_1^0, y_2^0, ..., y_m^0)$ нүктені табу үшін $n+m$ белгісізі бар $n+m$ теңдеулер жүйесін шешу қажет:

$$\begin{cases} F_i(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m) = 0, & i = \overline{1, m}, \\ A_i(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m) = 0, & i = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Осы жүйені $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m$ белгісіздері арқылы шешіп, A нүктенің координатын табамыз.

Енді функцияның шартты экстремумын табу үшін A_0 нүктедегі $d^2\Phi$ екінші ретті дифференциалдың (квадрат пішіннің) таңбасын есептеу керек, яғни егер

$$d^2\Phi|_{A_0} > 0 \ \ (d^2\Phi|_{A_0} < 0)$$

болса, онда (9.33), (9.34) функцияның A_0 нүктеде шартты минимумы (максимумы) бар.

Біз жоғарыда функцияның шартты экстремумын **айнымаларды айыру әдісі** деп аталатын әдіспен анықтадық.

Енді функцияның шартты экстремумын табу үшін **Лагранж әдісі** деп аталатын әдісті қарастарайық.

9.7. Лагранждың белгісіз көбейткіштер әдісі

1. Біз жоғарыдағы тақырыпта $x_1, x_2, ..., x_n$ айнымаларды тәуелсіз, ал $y_1,\ y_2, ..., y_m$ айнымаларды $x_1, x_2, ..., x_n$ айнымаларға тәуелді функция ретінде қарастырдық. Көп жағдайда, осы айтылған есепті күрделендіре түседі. Сондықтан Лагранж ұсынған әдіспен таныcайық. Ол үшін (9.40) жүйені, әзірше белгісіз $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ тұрақты көбейткіштерге көбейтейік:

$$\begin{cases} \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} dx_1 + ... + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} dx_n + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} dy_1 + ... + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m} dy_m = 0, \\ \lambda_2 \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} dx_1 + ... + \lambda_2 \dfrac{\partial F_2}{\partial x_n} dx_n + \lambda_2 \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} dy_1 + ... + \lambda_2 \dfrac{\partial F_2}{\partial y_m} dy_m = 0, \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ \lambda_m \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1} dx_1 + ... + \lambda_m \dfrac{\partial F_m}{\partial x_n} dx_n + \lambda_m \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} dy_1 + ... + \lambda_m \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m} dy_m = 0. \end{cases}$$

Осы жүйеге (9.39) теңдікті мүшелеп қосайық және $dx_1, dx_2, ..., dx_n, dy_1,\ dy_2, ..., dy_m$ дифференциалдары арқылы жинақтап жазайық:

$$\left(\lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + ... + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_1 + ... +$$

$$+\left(\lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_n} + ... + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_n} + \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) dx_n +$$

$$+\left(\lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + ... + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial y_1} + \frac{\partial f}{\partial y_1}\right) dy_1 + ... +$$

$$+\left(\lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_m} + ... + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial y_m} + \frac{\partial f}{\partial y_m}\right) dy_m = 0.$$

Осыдан:

$$\frac{\partial(\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + ... + \lambda_m F_m + f)}{\partial y_1} dy_1 + ... +$$

$$+\frac{\partial(\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + ... + \lambda_m F_m + f)}{\partial y_m} dy_m +$$

$$+\frac{\partial(\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + ... + \lambda_m F_m + f)}{\partial x_1} dx_1 + ... +$$

$$+\frac{\partial(\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + ... + \lambda_m F_m + f)}{\partial x_n} dx_n = 0,$$

мұндағы

$$f+\lambda_1 F_1+\lambda_2 F_2+...+\lambda_m F_m$$

функцияны $\psi(x_1, x_2,...,x_n, y_1, y_2,... y_m)$ әрпімен белгілейік, онда:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial\psi}{\partial x_n}dx_n+$$

$$+\frac{\partial\psi}{\partial y_1}dy_1+\frac{\partial\psi}{\partial y_2}dy_2+...+\frac{\partial\psi}{\partial y_m}dy_n=0, \qquad (9.43)$$

мұндағы функция

$$\psi=f+\lambda_1 F_1+\lambda_2 F_2+...+\lambda_m F_m$$

Лагранж функциясы деп аталады. Өткен тақырыпта $F_i(x_1, x_2,...,x_n, y_1, \quad y_2,..., y_m)=F_i$ функцияға қойылған шарттар орындалсын деп ұйғарайық және белгісіз $\lambda_1, \lambda_2,...,\lambda_m$ тұрақты көбейткіштерді

$$\frac{\partial\psi}{\partial y_1}=0, \frac{\partial\psi}{\partial y_2}=0,..., \frac{\partial\psi}{\partial y_m}=0 \qquad (9.44)$$

теңдіктері орындалатындай етіп таңдап алайық. (9.44) теңдіктері орындалатындай λ_i $(i=\overline{1,m})$ көбейткіштерді таңдап алуға болады, себебі (9.44) теңдіктері мына сызықты жүйеге өрнектелінеді:

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial y_1}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial y_1}+...+\lambda_m\frac{\partial F_m}{\partial y_1}=0,\\ \frac{\partial f}{\partial y_2}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial y_2}+...+\lambda_m\frac{\partial F_m}{\partial y_2}=0,\\ ... \qquad ... \qquad ...\\ \frac{\partial f}{\partial y_m}+\lambda_1\frac{\partial F_1}{\partial y_m}+...+\lambda_m\frac{\partial F_m}{\partial y_m}=0\end{cases}$$

және ұйғаруымыз бойынша осы жүйенің якобианы нөлге тең емес. Енді (9.43) теңдікке (9.44) теңдіктерді пайдаланып, мына теңдікке келеміз:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial\psi}{\partial x_n}dx_n=0. \qquad (9.45)$$

Жоғарыда айтылғандай $x_1, x_2,...,x_n$ айнымалары тәуелсіз болғандықтан (9.45) теңдіктен мына теңдіктерді аламыз:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}=0, \frac{\partial\psi}{\partial x_2}=0,..., \frac{\partial\psi}{\partial x_n}=0. \qquad (9.46)$$

Енді (9.44) пен (9.46) теңдіктерге (9.33) функцияның (9.34) байланыс шарттарын біріктіріп, $n+2m$ теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi}{\partial x_1}=0, \frac{\partial\psi}{\partial x_2}=0,\ldots,\frac{\partial\psi}{\partial x_n}=0, \\ \frac{\partial\psi}{\partial y_1}=0, \frac{\partial\psi}{\partial y_2}=0,\ldots,\frac{\partial\psi}{\partial y_m}=0, \\ F_1=0,\ F_2=0,\ldots,F_m=0. \end{cases} \tag{9.47}$$

Бұл жүйеден функцияның шартты экстремумы бола алатын нүктенің $n+m$ $((x_1,x_2,\ldots,x_n,y_1,y_2,\ldots,y_m))$ координатын және саны m-ге тең $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ көбейткіштерді анықтаймыз.

Осы айтылғандарды қорыта келе мына тұжырымға келеміз (**шартты экстремумның қажетті белгісі**): Егер

1) $u=f(x_1,x_2,\ldots,x_n,y_1,y_2,\ldots,y_m)$ функция $A_0(x_1^0, x_2^0,\ldots,x_n^0,y_1^0,y_2^0,\ldots,y_m^0)$ нүктеде дифференциалданса әрі осы нүктеде функцияның (9.34) байланыс шарттары бойынша шартты экстремумы бар болса;

2) (9.34) байланыс шарттарына A_0 нүктенің кейбір маңайында 9.2-теореманың барлық шарттары (9.36) функцияларға орындалсын. Онда $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ сандары табылып, Лагранж функцияның барлық бірінші ретті дербес туындылары A_0 нүктеде нөлге тең, яғни (9.47) теңдіктер орындалады.

9.8. Шартты экстремумның жеткілікті белгісі

Функцияның шартты экстремумының A_0 нүктедегі (9.47) қажетті белгісі орындалсын деп ұйғарайық әрі осыған қосымша, (9.33) функциялардың екінші ретті дифференциалы A_0 нүктенің маңайында бар болсын және барлық екінші ретті дербес туындылары A_0 нүктенің өзінде үзіліссіз болсын. Енді (9.33) функцияның $A(x_1,x_2,\ldots,x_n,y_1,y_2,\ldots,y_m)$ мен $A_0(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0,y_1^0,y_2^0,\ldots,y_m^0)$ нүктелердегі айырымын қарастырайық:

$$f(A)-f(A_0)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n,y_1,y_2,\ldots,y_m)- \\ -f(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0,y_1^0,y_2^0,\ldots,y_m^0). \tag{9.48}$$

Осы сияқты Лагранж функцияның осы нүктелердегі айырымын қарастырайық:

$$\psi(A)-\psi(A_0)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n,y_1,y_2,\ldots,y_m)+ \\ +\lambda_1F_1(x_1,x_2,\ldots,x_n,y_1,y_2,\ldots,y_m)+\ldots+$$

$$+\lambda_m F_m(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m) - f(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, y_1^0, y_2^0, ..., y_m^0) -$$
$$-\lambda_1 F_1(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m) - ... -$$
$$-\lambda_m F_m(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m).$$

Осыдан (9.34) теңдіктерді ескеріп,

$$\psi(A) - \psi(A_0) = f(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m) +$$
$$+\lambda_1 F_1(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m) \qquad (9.49)$$

теңдікті аламыз. (9.48) бен (9.49) салыстырсақ, онда (9.33) функция мен Лагранж функцияның экстремумдары бірдей. Олай болса, 8.17 мен 8.18-тақырыптарды пайдаланып, (9.34) байланыс шарттары бар (9.33) функцияның A_0 нүктедегі шартты экстремумының жеткілікті белгісін табу үшін (9.47) теңдеулерге қосымша Лагранж функцияның A_0 нүктедегі екінші ретті дифференциалының таңбасын анықтау керек. Егер $d^2\psi|_{A_0} > 0$ ($d^2\psi|_{A_0} < 0$) теңсіздігі орындалса, онда, 8.17 мен 8.18-тақырыптардан (9.34) байланыс шарттары бар (9.33) функцияның A_0 нүктедегі минимумы (максимумы) бар.

Функцияның экстремумы бар болуы мүмкін $A_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, y_1^0, y_2^0, ..., y_m^0)$ нүктедегі Лагранж функцияның осы нүктедегі екінші ретті дифференциалын $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m$ айнымалардың барлығы тәуелсіз деп қарастырғанда да есептей аламыз. Шынында да, жалпы жағдайда $d^2\psi$ дифференциалы инвариантты емес және егер $y_1, y_2, ..., y_m$ айнымалары $x_1, x_2, ..., x_n$ айнымаларына тәуелді болса, онда

$$d^2\psi = \left(dx_1\frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2\frac{\partial}{\partial x_2} + ... + dx_n\frac{\partial}{\partial x_n} + dy_1\frac{\partial}{\partial y_1} + dy_2\frac{\partial}{\partial y_2} + \right.$$
$$\left. ... + dy_m\frac{\partial}{\partial y_m}\right)^2\psi + \frac{\partial\psi}{\partial y_1}d^2y_1 + \frac{\partial\psi}{\partial y_2}d^2y_2 + ... + \frac{\partial\psi}{\partial y_m}d^2y_m.$$

Функцияның экстремумы бар болуы мүмкін A_0 нүктеде

$$\frac{\partial\psi}{\partial y_1} = 0, \frac{\partial\psi}{\partial y_2} = 0, ..., \frac{\partial\psi}{\partial y_m} = 0$$

теңдіктері орындалады. Сондықтан, m $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m$ айнымалары тәуелсіз болғанда да екінші ретті дифференциалды (8.44) формуладан табамыз, яғни

$$d^2\psi = \begin{pmatrix} dx_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + dx_2 \dfrac{\partial}{\partial x_2} + ... + dx_n \dfrac{\partial}{\partial x_n} + dy_1 \dfrac{\partial}{\partial y_1} + \\ + dy_2 \dfrac{\partial}{\partial y_2} + ... + dy_m \dfrac{\partial}{\partial y_m} \end{pmatrix}^2 \psi, \qquad (9.50)$$

мұндағы $dx_1, dx_2, ..., dx_n$ – тәуелсіз айнымалардың дифференциалы, ал $dy_1, dy_2, ..., dy_m$ дифференциалдар – (9.36) функциялардың $A_0'(x_1, x_2, ..., x_n)$ нүктедегі дифференциалдары.

1-мысал. Лагранж әдісін пайдаланып, $z - x = 1$, $y - xz = 1$ байланыс шарттары бар $f(x, y, z) = x + y + z^2$ функцияның шартты экстремумын табайық.

Шешуі. Лагранж функциясын құрайық

$$(\psi = f + \lambda_1 F_1 + ... + \lambda_m F_m):$$

$$\psi = x + y + z^2 + \lambda_1(z - x - 1) + \lambda_2(y - xz - 1).$$

(9.47) теңдеулер жүйені құрайық (5-теңдеу: 3 айнымалы, екі байланыс шарт):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial x} = 1 - \lambda_1 - z\lambda_2 = 0, \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial y} = 1 + \lambda_2 = 0, \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial z} = 2z + \lambda_1 - \lambda_2 x = 0, \\ F_1 = z - x - 1 = 0, \\ F_2 = y - xz - 1 = 0. \end{cases} \qquad (9.51)$$

Осы (9.51) жүйенің $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2$ белгісіздерін табамыз (жүйенің тек бір ғана шешімі бар): $x = -1$, $y = 1$, $z = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Демек, f функцияның шартты экстремумы бар болуы мүмкін нүкте тек $A_0(-1; 1; 0)$ нүкте ғана, $A_0(-1; 1; 0)$ нүктенің маңайында

$$\begin{cases} F_1 = z - x - 1 = 0, \\ F_2 = y - xz - 1 = 0 \end{cases}$$

жүйенің тек бір ғана $y(x), z(x)$ шешімі бар болатынын атап өтейік, бізге ол шешім әзірше қажет емес және ол шешімді айқын түрде табуға болады. Енді

$$\begin{cases} z - x = 1, \\ y - xz = 1 \end{cases}$$

жүйеге $y(x), z(x)$ шешімдерді қойдық деп ұйғарып, осыдан алынған тепе-теңдікті дифференциалдайық:

$$\begin{cases} dz - dx = 0, \\ dy - zdx - xdz = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} dz = dx, \\ dy = (x + z)dx. \end{cases}$$

Енді Лагранж функциянның екінші дифференциалын есептейік:

$$d^2\psi = 2(dz)^2 + 2\lambda_2 dxdz.$$

Осы өрнекке $\lambda_2 = -1$, $dz = dx$-ті қойып, оң анықталған dx бір айнымалы квадрат форманы аламыз:

$$d^2\psi = 2(dx)^2 + 29(dx)^2 = 4(dx)^2 > 0.$$

Осыдан, $z - x - 1 = 0$, $y - xz - 1 = 0$ байланыс шарттары бар $f = x + y + z^2$ функциянның $A_0(-1;1;0)$ нүктеде минимумы бар, ол $0 < f_{\min}(-1;1;0) = 0$-ге тең.

Осы мысалды, **айнымаларды ажырату (айыру) әдісі** деп аталатын әдіспен функциянның экстремумын табайық. Ол үшін байланыс шарттарды бір жүйеге келтіріп, жүйені y пен z айнымалары бойынша шешейік: $y = x^2 + x + 1$, $z = x + 1$. Анықталған y пен z өрнектерді f функцияға қойсақ, онда біз бір айнымалы $f(x) = 2x^2 + 4x + 2$ функцияны аламыз. Осыдан $f'(x) = 4x + 4 = 0$, $x = -1$. Онда $f(x)$ функциянның экстремумы бар бола алатын тек бір ғана нүкте бар, ол $x = -1$ нүкте. Енді $f''(x) = 4 > 0$, яғни $f''(-1) > 0$. Сонымен, $f(x) = 2x^2 + 4x + 2$ функциянның $x = -1$ нүктеде минимумы бар, ол $f_{\min}(-1) = 2 - 4 + 2 = 0$-ге тең. Бір айнымалы функциянның $x_{min} = -1$ нүктесіне сәйкес келетін $f(x, y, z)$ функциянның минимум нүктесін байланыс шарттардан табамыз, яғни $y = 1$, $z = 0$. Сонымен, байланыс шарттары бар $f(x, y, z)$ функциянның $A_0(-1; 1; 0)$ нүктеде минимумы бар, ол $f(-1;\ 1;\ 0) = 0$-ге тең.

2-мысал. Айнымаларды айыру әдісімен

$$\begin{cases} 4x^3 + 4y^3 + 4z^3 + 12x + 12y + 12z = 13, \\ x + y = 1 \end{cases}$$

байланыс шарттары бар $f(x,y,z)=x+y-z$ функцияның шартты экстремумын табамыз.

Шешуі. Байланыс шарттар $y(x)$ және $z(x)$ айнымалары бойынша шешілді және оларды осы жүйеге қойып, тепе-теңдік алдық деп есептейік те, оның екі жағын да дифференциалдайық:

$$\begin{cases}\left(12x^2+12\right)dx+\left(12y^2+12\right)dy+\left(12z^2+12\right)dz=0,\\ dx+dy=0.\end{cases}$$

Осыдан

$$\begin{cases}dy=-dx,\\ dz=\dfrac{1-2x}{z^2+1}dx.\end{cases}$$

Енді $f(x,y,z)$ функцияны дифференциалдайық: $df=dx+dy-dz$, осы дифференциалдағы dx пен dy-ке жоғарыдағы өрнектерді қойып, dx бойынша жинақтайық, сонда:

$$df=\frac{2x-1}{z^2+1}dx\equiv Adx,$$

мұндағы $A=\dfrac{2x-1}{z^2+1}$. Байланыс шарттар мен $A=0$ теңдікті біріктіріп, жүйе құрайық және одан x,y,z белгісіздерді табайық:

$$\begin{cases}4x^3+4y^3+4z^3+12x+12y+12z=13,\\ x+y=1,\\ \dfrac{2x-1}{z^2+1}=0.\end{cases}$$

Осыдан, $x=\dfrac{1}{2}$, $y=x$, $z=0$, яғни $x=\dfrac{1}{2}$, $y=\dfrac{1}{2}$, $z=0$. Демек, соңғы жүйенің тек бір ғана шешімі бар. $A_0\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};0\right)$-нүкте f функцияның экстремумы бар болу мүмкін нүктесі. Енді $df=\dfrac{2x-1}{z^2+1}dx$ теңдікті бір рет дифференциалдайық:

$$d^2f=\frac{2(z^2+1)dx+(2x-1)2zdz}{(z^2+1)^2}dx,$$

мұндағы $dz = \frac{1-2x}{z^2+1}dx$-ті қойып, $d^2 f$ екінші дифференциалдың $A_0\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$ нүктедегі таңбасын анықтаймыз: $d^2 f = 2(dx)^2 > 0$. Сонымен, $f(x,y,z)$ функцияның A_0 нүктеде шартты минимумы бар және ол $f\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right) = 1$-ге тең.

3-мысал. $u = xyz$ функцияның $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ беттегі шартты экстремумын Лагранж әдісін пайдаланып есептейік.

Шешуі. Ол үшін Лагранж функциясын құрайық:

$$\psi = xyz - \lambda\left(x^2 + y^2 + z^2 - 3\right)$$

және оның x, y, z айнымалары бойынша дербес туындыларын анықтайық:

$$\psi'_x = yz - 2\lambda x,\ \psi'_y = xz - 2\lambda y,\ \psi'_z = xy - 2\lambda z.$$

Енді λ-ны және экстремум мүмкін болатын нүктенің координатын табу үшін мына жүйені шешейік:

$$\begin{cases} yz - 2\lambda x = 0, \\ xz - 2\lambda y = 0, \\ xy - 2\lambda z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0. \end{cases}$$

Осы жүйені x, y, z, λ белгісіздері бойынша шешіп, $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$-ге сәйкес келетін төрт $M_1(1; 1; 1)$, $M_2(1; -1; -1)$, $M_3(-1; 1; -1)$, $M_4(-1; -1; 1)$, ал $\lambda_2 = \frac{1}{2}$-ге сәйкес келетін төрт $M_5(-1; -1; -1)$, $M_6(-1; 1; 1)$, $M_7(1; -1; 1)$, $M_8(1; 1; -1)$ нүктелерді табамыз.

Лагранж функцияның екінші ретті дифференциалын анықтайық:

$$d^2\psi = 2\lambda\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) + 2\left(zdxdy + ydxdz + xdydz\right).$$

Алдымен, $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, $M_1(1; 1; 1)$ нүктедегі $d^2\psi$ функцияның (квадрат пішіннің) таңбасын есептейік. Сонда:

$$d^2\psi(M_1, \lambda_1) = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + 2(dxdy + dxdz + dydz) =$$
$$= -(dx - dy)^2 - dz^2 + 2(dx + dy)dz.$$

Функцияның байланыс шартынан M_1 нүктедегі dz-ті есептейік:

$$2zdz\,|_{M_1} = (-2xdx - 2ydy)_{M_1}\ dz = -dx - dy = -(dx + dy).$$

dz-тің мәнін $d^2\psi(M_1,\lambda_1)$-ге қояйық, сонда $d^2\psi(M_1,\lambda_1) = -(dx-dy)^2 - \; -dz^2 - dz^2 - 2(dx+dy)^2 < 0$. Сонымен, M_1 нүктеде функцияның максимумы бар: $u_{\max}(M_1) = 1$. Енді $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, $M_2(1;-1;-1)$ нүкте үшін

$$d^2\psi(M_2,\lambda_1) = -dx^2 - dy^2 - dz^2 - 2dxdy - 2dxdz + 2dydz.$$

Байланыс шарттан: $dx = dy + dz$. Онда:

$$d^2\psi(M_2,\lambda_1) = (dx-dy)^2 - dz^2 - 2(dy+dz)^2 < 0.$$

Демек, M_2 нүктеде u функцияның максимумы бар $u_{\max}(M_2) = 1$. Осылайша, M_3, M_4 нүктелерде $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ болғанда функцияның максимумы бар және олар 1-ге тең, яғни

$$u_{\max}(M_1) = u_{\max}(M_2) = u_{\max}(M_3) = u_{\max}(M_4) = 1.$$

Енді $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, $M_5(-1;-1;-1)$ нүктедегі $d^2\psi$ функцияның таңбасын анықтайық:

$$d^2\psi(\lambda_2, M_5) = dx^2 + dy^2 + dz^2 - 2dxdy - 2dxdz - 2dydz,$$

мұндағы $dx + dy + dz = 0$. Онда:

$$d^2\psi(M_5,\lambda_2) = (dx-dy)^2 + dz^2 + 2(dx+dy)^2 > 0.$$

Демек, u функцияның M_5 нүктеде минимумы бар: $u_{\min}(M_5) = -1$. Осы сияқты M_6, M_7, M_8 нүктелерде де функцияның шартты минимумы -1-ге тең, яғни

$$u_{\min}(M_5) = u_{\min}(M_6) = u_{\min}(M_7) = u_{\min}(M_8) = -1$$

4-мысал. $A_0(0;\,0;3)$ нүктеден $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$ эллипсоидқа тиісті нүктеге дейінгі ең үлкен арақашықтықты анықтайық.

Шешуі: Эллипсоидтың кез келген $A(x,y,z)$ нүктесінен $A_0(0;0;3)$ нүктеге дейінгі ең үлкен арақашықтықты

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-3)^3}$$

формуладан табамыз. Ең үлкен арақашықтықты табу үшін

$$f = \rho^2 = x^2 + y^2 + (z-3)^2$$

функцияның $x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 8 = 0$ байланыс шарты бойынша анықталған экстремумын тапсақ жеткілікті. Ол үшін Лагранж функциясын табайық:

$$\psi = x^2 + y^2 + (z-3)^2 + \lambda(x^2 + y^2 + (z-3)^2)$$

және

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial x} = 2x + 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial y} = 2y + 4\lambda y = 0, \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial z} = 2z - 6 + 8\lambda z, \\ x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 8 = 0 \end{cases}$$

жүйені қарастырайық. Эллипсоидтың OX осімен беттескен, олай болса, $x \neq 0$. Сондықтан, $2x + 2\lambda x = 0$ теңдеуден $\lambda = -1$-ге тең болады. Жүйенің екінші және үшінші теңдеулерінен $y = 0, z = -1$.

Онда, жүйенің ең соңғы теңдеуінен $x = \pm 2$ болады. Сонымен, $f(x, y, z)$ функцияның экстремумы бар болу мүмкін нүктесі екеу: $A_1(2; 0; -1)$ және $A_2(-2; 0; -1)$ $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$ теңдеуге $z = z(x, y)$ шешімі қойылды деп есептеп, тепе-теңдікті дифференциалдайық:

$$xdx + 2ydy + 4zdz = 0.$$

Осыдан $dz = -\dfrac{x}{4z}dx - \dfrac{y}{2z}dy$. Енді Лагранж функцияның екінші дифференциалын табайық:

$$d^2\psi = 2(1+\lambda)(dx)^2 + 2(1+2\lambda)(dy)^2 + 2(1+8\lambda)(dz)^2.$$

Соңғы теңдікке $\lambda = -1$, A_1 немесе A_2 нүктенің координаттарын және $dz = -\dfrac{x}{4z}dx - \dfrac{y}{2z}dy$ өрнекті қояйық, сонда осы екі жағдайда да dx пен dy арқылы өрнектелген теріс анықталған квадрат формаға келеміз:

$$-2(dy)^2 - 3{,}5(dx)^2 < 0.$$

Демек, $f(x, y, z)$ функцияның $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$ байланыс шарттары бойынша, A_1 мен A_2 нүктелерде шартты максимумы бар, яғни эллипсоидта A_1 мен A_2 екі нүкте бар, ол нүктелер $A_0(0;0;3)$ нүктеден ең үлкен арақашықтықта орналасқан, ол арақашықтық $\rho = 2\sqrt{5}$-ге тең.

5-мысал. $u = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ функцияның $x^2 + y^2 \leq 25$ облыстағы ең үлкен және ең кіші мәндерін есептейік.

Шешуі. Берілген функция $x^2 + y^2 \leq 25$ тұйық шектелген облыста үзіліссіз. Сондықтан Вейерштрасстың екінші теоремасы бойынша (8.12-теорема) функция осы облыста өзінің ең жоғарғы мен ең төменгі мәндерін қабылдайды. Бұл жағдайда функцияның ең үлкен (ең кіші) мәні функцияның $x^2+y^2\le 25$ жиынындағы $\sup u$ ($\inf u$)-на тең. Енді функцияның x және y айнымалары бойынша дербес туындысын анықтайық: $u'_x=2x-12$, $u'_y=2y+16$. Осы дербес туындыларды нөлге теңестіріп шешейік:

$$\begin{cases}2x-12=0,\\ 2y+16=0.\end{cases}$$

Осыдан $x=6, y=8$. Бұл нүкте $x^2+y^2\le 25$ жиынға тиісті емес $(36+84<25)$. Сондықтан функция $\sup u$, $\inf u$ мәндерін $x^2+y^2=25$ шеңбердің бойында қабылдайды.

Енді Лагранж функциясын құрайық:

$$\psi=x^2+y^2-12x+16y+\lambda(25-x^2-y^2).$$

Лагранж функцияның дербес туындыларын табайық:

$$\psi'_x=2x-12-2\lambda x,\ \psi'_y=2y+16-2\lambda y.$$

Осы дербес туындыларды нөлге теңестіріп және оны шеңбердің теңдеуімен біріктіріп, жүйені x, y, λ белгісіздері арқылы шешейік:

$$\begin{cases}x-\lambda x=6,\\ y-\lambda y=-8,\\ x^2+y^2=25.\end{cases}$$

Сонда біз шартты экстремумның мүмкін болатын нүктенің координатын табамыз: $x_1=3, y_1=-4$ және $x_2=-3, y_2=4$. Осы нүктелердегі функцияның мәндерін есептейік: $u(M_1)=-75$, $u(M_2)=125$. Сонда $sup\,u=125$, $inf\,u=-75$.

9.9. Айнымаларды алмастыру

Көп жағдайда математикалық теңдеулердегі айнымаларды басқа айнымаларға алмастырып, сол теңдеудің ықшамды немесе қарапайым теңдеуін аламыз. Ықшамды теңдеудің түріне қарап, оның формасын анықтау немесе зерттеу және оның шешімін табу жеңіл болады.

1. Алдымен, $F_1(x,y,y',y'',...,y^{(n)})$ функцияны қарастырайық, мұндағы y айнымалы x-ке тәуелді функция. Берілген F_1 функцияның аргументтерін жаңа t мен z айнымаларына алмастыру керек болсын, мұндағы t тәуелсіз айнымалы, ал z айнымалы t-ға тәуелді функция және x, y айнымалары t мен z айнымаларымен

$$\begin{cases} g_1(x, y, t, z) = 0, \\ g_2(x, y, t, z) = 0 \end{cases} \tag{9.52}$$

формула арқылы байланысты. Соңғы жүйе **айнымаларды алмастыру (енгізу) формуласы** деп аталады. (9.52) жүйе жеткілікті рет дифференциалданатын $x = f_1(t, z)$, $y = f_2(t, z)$ функцияларды анықтасын. z функция t-ға тәуелді функция болғандықтан

$$x = f_1(t, z(t)) = x(t), \; y = f_2(t, z(t)) = y(t)$$

функциялары t-ға тәуелді күрделі функция. F_1 функцияның аргументтерін t мен z-ке алмастыру үшін, мына ережені орындаған тиімді.

1а) (9.52) жүйенің $x = x(t)$, $y = y(t)$ шешімдерін осы жүйеге қойып, тепе-теңдік аламыз:

$$\begin{cases} g_1\big(x(t), y(t), t, z(t)\big) \equiv 0, \\ g_2\big(x(t), y(t), t, z(t)\big) \equiv 0. \end{cases}$$

Осы тепе-теңдіктердің екі жағында t бойынша дифференциалдап, сызықты теңдеулер жүйесін аламыз: $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$, $\dot{z} = \dfrac{dz}{dt}$;

1ә) соңғы теңдеулер жүйені $\dot{x}$ пен $\dot{y}$ арқылы шешеміз:

1б) F_1 функциядағы y' туындыны t мен z айнымалары арақылы өрнектейміз: $y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$;

1в) F_1 функцияның жоғарғы ретті туындысын табу үшін $\dfrac{d}{dx} = \dfrac{1}{\dot{x}} \dfrac{d}{dt}$ символдық түрдегі формуланы пайдаланамыз. Мысалы, y''_{xx} екінші туындыны табу үшін 1в) пункттегі символдық түрдегі формуланың сол жағындағы өрнекке y'_x-ті, ал оң жағындағы өрнекке 1б) пункттегі формуланы қоямыз, сонда:

$$y''_{xx} = \frac{1}{\dot{x}} \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) = \frac{1}{\dot{x}} \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3};$$

1г) Жоғарыда анықталған $x = x(t), y = y(t)$, $y'_x = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$, $y''_{xx} = \dfrac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$ өрнектерді берілген $F_1(x, y, y', y'', ..., y^{(n)})$ функцияға қойсақ жеткілікті.

Ескерту. Егер (9.52) айнымаларды алмастыру (енгізу) формула x пен y-ті айқын түрде t мен z арқылы анықтаса, онда жоғарыдағы ереже оңайланады.

2. $F_2\left(x, y, z, \dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \ldots\right)$ функциясын қарастырайық, мұндағы z айнымалы x пен y айнымаларына тәуелді функция. Берілген F_2 функцияның аргументтерін жаңа u, v, w айнымаларына алмастыру керек болсын, мұндағы u, v тәуелсіз айнымалар, ал w функция u мен v-ға тәуелді функция және x, y, z айнымалылары u, v, w айнымалыларымен

$$g_i(x, y, z, u, v, w) = 0, \; i = \overline{1,3} \tag{9.53}$$

формула арқылы байланысты. (9.53) формула **айнымалыны алмастыру (енгізу) формуласы** деп аталады.

Айнымалыны алмастыру формула не ескі x, y, z айнымалылары арқылы, не жаңа u, v, w айнымалары арқылы шешіліп беріледі. Осы екі жағдайды жеке-жеке қарастырайық.

2') (9.53) айнымалыны алмастыру формуласы мына түрде берілсін:

$$\begin{cases} x = f_1(u, v, w), \\ y = f_2(u, v, w), \\ z = f_3(u, v, w), \end{cases} \tag{9.54}$$

мұндағы $f_i(u, v, w)$ жеткілікті рет дифференциалданатын функциялар, $i = \overline{1,3}$.

Енді айнымаларды алмастыру үшін (2' жағдай үшін) мына ережені орындайық:

2'а) (9.54) жүйені дифференциалдайық:

$$dx = \frac{\partial f_1}{\partial u} du + \frac{\partial f_1}{\partial v} dv + \frac{\partial f_1}{\partial w} dw,$$

$$dy = \frac{\partial f_2}{\partial u} du + \frac{\partial f_2}{\partial v} dv + \frac{\partial f_2}{\partial w} dw,$$

$$dz = \frac{\partial f_3}{\partial u} du + \frac{\partial f_3}{\partial v} dv + \frac{\partial f_3}{\partial w} dw,$$

мұндағы w функция u мен v аргументті функция болғандықтан $dw = \; = w'_u du + w'_v dv$. Осы өрнекті 2'а) пунктке қойып мына жүйені аламыз:

$$\begin{cases} dx = \frac{Df_1}{Du}du + \frac{Df_1}{Dv}dv, \\ dy = \frac{Df_2}{Du}du + \frac{Df_2}{Dv}dv, \\ dz = \frac{Df_3}{Du}du + \frac{Df_3}{Dv}dv, \end{cases}$$

мұндағы $\frac{Df_i}{Du} = \frac{\partial f_i}{\partial u} + \frac{\partial f_i}{\partial w}w_u'$, $\frac{Df_i}{Dv} = \frac{\partial f_i}{\partial v} + \frac{\partial f_i}{\partial w}w_v'$, $i = \overline{1,3}$.

2'ә) егер

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{Df_1}{Du} & \frac{Df1}{Dv} \\ \frac{Df_2}{Du} & \frac{Df_2}{Dv} \end{vmatrix} \neq 0$$

болса, онда 2'а) пунктгегі соңғы жүйенің алғашқы екі теңдеуінің du мен dv арқылы анықталған тек бір ғана шешімі бар болады:

$$\begin{cases} du = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{Df_2}{dv}dx - \frac{Df_1}{Dv}dy\right), \\ dv = \frac{1}{\Delta}\left(-\frac{Df_2}{du}dx - \frac{Df_1}{Dv}dy\right); \end{cases}$$

2'б) анықталған du мен dv-ні 2'а) пункттегі соңғы жүйенің үшінші теңдеуіне қояйық:

$$dz = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{Df_3}{Du}\frac{Df_2}{Dv} - \frac{Df_3}{Dv}\frac{Df_2}{Du}\right)dx +$$
$$+\frac{1}{\Delta}\left(-\frac{Df_3}{Du}\frac{Df_1}{Dv} + \frac{Df_3}{Dv}\frac{Df_1}{Du}\right)dy.$$

Осы теңдікті

$$dz = z_x'dx + z_y'dy$$

дифференциалмен салыстырып, z_x' пен z_y' дербес туындылардың u, v, w айнымалары арқылы өрнектелетін өрнекті табамыз:

$$z_x' = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{Df_3}{Du}\frac{Df_2}{Dv} - \frac{Df_3}{Dv}\frac{Df_2}{Du}\right)dx,$$

$$z_y' = \frac{1}{\Delta}\left(-\frac{Df_3}{Du}\frac{Df_1}{Dv} + \frac{Df_3}{Dv}\frac{Df_1}{Du}\right)dx;$$

2'в) $z(x, y)$ функцияның екінші ретті дербес туындыларын u, v, w айнымалары бойынша өрнектеу үшін 2'б) пунктте анықталған

z'_x, z'_y теңдіктерді дифференциалдаймыз, мысалы, z'_x функцияны мына түрде жазайық:

$$z'_x = F(u, v, w, w'_u, w'_v).$$

Осыдан $d\left(z'_x\right) = dF$ немесе

$$z''_{xx}dx + z''_{xy}dy = F'_u du + F'_v dv + F'_w dw + F'_{w'_u} dw'_u + F'_{w'_v} dw'_v$$

Соңғы өрнекке

$$dw = w'_u du + w'_v dv, \quad dw'_u = w''_{uu} du + w''_{uv} dv, \quad dw'_v = w''_{vu} du + \; + w''_{vv} dv$$

өрнектерін және du мен dv-ге 2'ә) пункттегі өрнекті қояйық, содан соң теңдеудің екі жағындағы dx пен dy-тің коэффициенттерін теңестіріп, z''_{xx} және z''_{xy} өрнектерді жаңа айнымалар арқылы анықтаймыз. z''_{yy} өрнекті осылайша табамыз. Осылайша қалған жоғарғы ретті дербес туындыларды жаңа айнымалар арқылы өрнектеп жазамыз да, оларды F_2 функцияға қойып, F_2 функцияны жаңа айнымаларға алмастырамыз.

Енді екінші жағдайда қарастырайық.

2'') (9.53) айнымалыны алмастыру формуласы мына түрде берілсін:

$$\begin{cases} u = f_1(x, y, z), \\ v = f_2(x, y, z), \\ w = f_3(x, y, z), \end{cases} \tag{9.55}$$

мұндағы $f_i(x, y, z)$ жеткілікті рет дифференциалданатын функциялар, $i = \overline{1,3}$.

Енді айнымаларды алмастыру үшін (2''-жағдай үшін) мына ережені орындайық:

2''а) (9.55) жүйені дифференциалдайық:

$$du = \frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy + \frac{\partial f_1}{\partial z} dz,$$

$$dv = \frac{\partial f_2}{\partial x} dx + \frac{\partial f_2}{\partial y} dy + \frac{\partial f_2}{\partial z} dz,$$

$$dw = \frac{\partial f_3}{\partial x} dx + \frac{\partial f_3}{\partial y} dy + \frac{\partial f_3}{\partial z} dz.$$

Осы жүйеге $dz = z'_x dx + z'_y dy$ өрнекті қойып, мына жүйені аламыз:

$$\begin{cases} du = \dfrac{Df_1}{Dx}dx + \dfrac{Df_1}{Dy}dy, \\ dv = \dfrac{Df_2}{Dx}dx + \dfrac{Df_2}{Dy}dy, \\ dw = \dfrac{Df_3}{Dx}dx + \dfrac{Df_3}{Dy}dy, \end{cases}$$

мұндағы $\dfrac{Df_i}{Dx} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x} + \dfrac{\partial f_i}{\partial z}z_x^{'}$, $\dfrac{Df_i}{Dy} = \dfrac{\partial f_i}{\partial y} + \dfrac{\partial f_i}{\partial z}z_y^{'}$, $i = \overline{1,3}$.

2''б) $dw = w_u^{'}du + w_v^{'}dv$ теңдікке 2''а) пункттегі du, dv, dw өрнектерді қоямыз:

$$\frac{Df_3}{Dx}dx + \frac{Df_3}{Dy}dy = w_u^{'}\left(\frac{Df_1}{Dx}dx + \frac{Df_1}{Dy}dy\right) + w_v^{'}\left(\frac{Df_2}{Dx}dx + \frac{Df_2}{Dy}dy\right)$$

Осы теңдіктің екі жағындағы dx пен dy дифференциалдарының коэффициенттерін теңестіріп, $z_x^{'}$ және $z_y^{'}$ белгісіздерге тәуелді жүйе аламыз;

2''б) соңғы жүйенің ($z_x^{'}$, $z_y^{'}$ белгісіздерге тәуелді жүйе) коэффициенттері $w_u^{'}$ пен $w_v^{'}$ және ескі x, y, z айнымаларға тәуелді. $z_x^{'}$ пен $z_y^{'}$ белгісіздерді табамыз соңғы жүйеден: $z_x^{'} = F(x, y, z, w_u^{'}, w_v^{'})$, $z_y^{'} = G(x, y, z, w_u^{'}, w_v^{'})$;

2''в) $z(x, y)$ функцияның екінші дербес туындыларын табу үшін $z_x^{'} = F$, $z_y^{'} = G$ функцияларын дифференциалдаймыз, бірінші теңдеуден: $d\left(z_x^{'}\right) = dF$,

$$z_{xx}^{''}dx + z_{xy}^{''}dy = F_x^{'}dx + F_y^{'}dy + F_z^{'}dz + F_{w_u^{'}}^{'}dw_u^{'} + F_{w_v^{'}}^{'}dw_v^{'}.$$

Соңғы теңдікке $dz = z_x^{'}dx + z_y^{'}dy$, $dw_u^{'} = w_{uu}^{''}du + w_{uv}^{''}dv$, $dw_v^{'} = w_{vu}^{''}du + w_{vv}^{''}dv$ және 2''а) пункттегі екінші жүйедегі du, dv, dw өрнектерді, содан соң 2''б) пункттегі $z_x^{'}$, $z_y^{'}$ өрнектерді қоямыз. Осыдан шыққан теңдіктің dx пен dy дифференциалдардың коэффициенттерін теңестіріп жүйе аламыз. Осы жүйеден $z_{xx}^{''}$, $z_{xy}^{''}$ белгісіздерді анықтаймыз. Осы сияқты, $z_{yy}^{''}$ белгісізді u, v, w айнымалары арқылы өрнектейміз.

2''г) жоғарыда анықталған өрнектерді F_2 функцияға қойып, берілген функцияны u, v, w айнымалары арқылы өрнектейміз.

1-мысал. Айнымаларды алмастыру формуласы

$$\begin{cases} u^2 - y^2 - x^2 = 0, \\ x^2 - t^2 + u^2 = 0 \end{cases}$$

түрінде берілген $yy' + xy^2 + x^3 = 0$ теңдеуді жаңа t мен u айнымалылары арқылы өрнектейік, мұндағы $u = u(t)$.

Шешуі. 2') жағдайдағы өрнектерді қолданамыз: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ функциялар алмастыру формуланың шешімі болсын және осы функцияларды сол формулаға қойып, тепе-теңдік алдық деп есептейік те тепе-теңдіктің екі жағында t айнымалы бойынша дифференциалдайық:

$$\begin{cases} u\dot{u} - y\dot{y} - x\dot{x} = 0, \\ x\dot{x} - t + u\dot{u} = 0. \end{cases}$$

Осы жүйені $\dot{x}$ пен $\dot{y}$ бойынша шешейік, сонда:

$$\dot{x} = \frac{t - u\dot{u}}{x}, \quad \dot{y} = \frac{2u\dot{u} - t}{y}.$$

Онда $y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dfrac{x(2u\dot{u} - t)}{y(t - u\dot{u})}$. Осы өрнекті берілген теңдеуге қойып және айнымаларды алмастыру формуласын пайдаланып, берілген теңдеуді жаңа $u\dot{u} = = \dfrac{t(1-u^2)}{2-u^2}$ мен u айнымалар бойынша өрнектелген теңдеуді аламыз:

$$u\dot{u} = \frac{t(1-u^2)}{2-u^2}.$$

2-мысал. Айнымаларды алмастыру формуласы $x = tgt$, $y = -\dfrac{u}{cos\,t}$ түрінде берілген $\left(1 + x^2\right)^2 y'' = y$ теңдеуді t мен u айнымаларына алмастырып теңдеуді шешейік (жаңа теңдеуді).

Шешуі. 2') жағдайдағы ережені пайдаланамыз. Айнымаларды алмастыру формулалардың екі жағында t айнымалы бойынша дифференциалдайық:

$$\dot{x} = \frac{1}{cos^2 t}, \quad \dot{y} = -\frac{\dot{u}cos\,t + u\,sin t}{cos^2 t}.$$

Енді y' пен y''-ті табайық:

$$y'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=-\dot{u}\cos t-u\sin t,\quad y''=\frac{1}{\dot{x}}\frac{d}{dt}\left(-\dot{u}\cos t-u\sin t\right)=-\cos^3 t\left(\ddot{u}+u\right).$$

Берілген теңдеуді жаңа айнымаларға алмастырғанда $u = 0$ теңдеуді аламыз. Соңғы теңдеуді шешейік: $\dot{u}(t)=C_1$, $u(t)$ = $C_1 t u(t)=C_1 t+C_2$, $C_1,C_2-const$. Сонда $u(t)=C_1 t+C_2$ функциядан ескі айнымаға көшейік:

$$y=(C_1\cdot arctgx+C_2)\sqrt{1+x^2}.$$

3-мысал. Айнымаларды алмастыру фоормуласы $u=\frac{x}{y}$, $v=\frac{x^2+y^2}{2}$, $w= \ =\frac{xy}{2}$ түрінде берілген $f=xz'_x+yz'_y-2z$ өрнекті u,v,w айнымаларға алмастырайық, мұндағы $w=w(u,v)$.

Шешуі. 2'') жағдайдағы ережені пайдаланамыз. Айнымаларды алмастыру формуласын дифференциалдайық және $dz=z'_x dx+z'_y dy$ өрнекті пайдаланамыз:

$$\begin{cases} du=\dfrac{dx}{y}-\dfrac{x}{y^2}dy,\\ dv=xdx+ydy,\\ dw=\dfrac{y}{z}dx+\dfrac{x}{z}dy-\dfrac{xy}{z^2}\left(z'_x dx-z'_y dy\right) \end{cases}$$

w функция u мен v айнымаларына тәуелді болғандықтан, $dw=\ w'_u du+w'_v dv$ теңдігі орындалады. Осы теңдікке жүйедегі du,dv,dw өрнектерді қояйық:

$$w'_u\left(\frac{dx}{y}-\frac{x}{u^2}dy\right)+w'_v\left(xdx+ydy\right)=\frac{y}{z}dx+\frac{x}{z}dy-\frac{xy}{z^2}\left(z'_x dx+z'_y dy\right).$$

Теңдіктің екі жағындағы dx пен dy дифференциалдарының коэффициенттерін теңестіріп, z'_x пен z'_y-ке тәуелді жүйе аламыз:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{y}w'_u+xw'_v=\dfrac{y}{z}-\dfrac{xy}{z^2}z'_x,\\ -\dfrac{1}{y^2}w'_u+yw'_v=\dfrac{x}{z}-\dfrac{xy}{z^2}z'_y. \end{cases}$$

Осыдан z'_x пен z'_y белгісіздерді табамыз:

$$z'_x = \frac{z}{x} - \frac{z^2}{xy^2} w'_u - \frac{z^2}{y} w'_v, \quad z'_y = \frac{z}{y} + \frac{z^2}{y^3} w'_u - \frac{z^2}{xy^2} w'_u.$$

Анықталған z'_x пен z'_y-ті берілген f өрнекке қояйық:

$$f = -\frac{z}{y}\left(xz + \frac{1}{x}\right) w'_v.$$

Енді айнымалаларды алмастыру формуласын пайдаланып, іздестіріп отырған өрнекті аламыз:

$$f = -\frac{4uv^2}{w^2\left(1 + u^2\right)} w'_v.$$

X ТАРАУ. ЕСЕЛІ ИНТЕГРАЛДАР

10.1. Негізгі ұғымдар

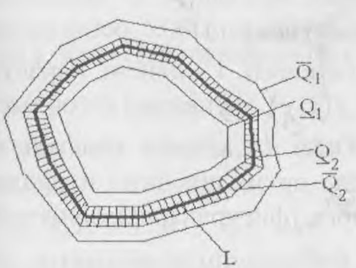
Осы курстың бірінші бөлімінде біреселі интегралды қарастырып, онда физика, механика есептерін шығардық. Осы сияқты екі, үш, т.с.с еселі интегралдардың көмегімен физика, механика есептерін шығаруға болады, мысалы, дененің массасын, атқарылған жұмысты, т.с.с. Оларды есептеуге қажетті еселі интегралды қарастыратын боламыз.

Еселі интегралдарды қарастырмас бұрын квадратталатын жазық фигура, немесе қысқаша, квадратталатын фигура туралы түсінік берейік. Бізге L жазық қисық сызықпен шектелген Q фигураның шекарасы деп аталады. Демек, L қисық сызығы жазықтықты екі бөлікке бөледі. Q жазық фигураның ішінде жатқан мүмкін болатын барлық фигураларды $\underline{Q}$ таңбамен, ал Q жазық фигураның өзі тиісті болатын барлық фигураларды $\overline{Q}$ таңбамен белгілейік және $\underline{Q}$ мен $\overline{Q}$ фигуралардың аудандарын сәйкес $\overline{S}(\underline{Q}), S(\overline{Q})$ таңбалармен белгілейік (*10.1-сурет*). Егер Q фигураға іштей бірде-бір фигура сала алмайтын болсақ, онда Q фигураның ауданы нөлге тең дейміз. Демек, Q жазық фигураға іштей сызылған фигуралар жоғарыдан шектелген, ал осы фигураға сырттай сызылған фигуралар төменнен шектелген. Олай болса, Q жазық фигураға іштей сызылған фигуралардың аудандарының ең жоғарғы шегі бар, яғни

$$S_* = S_*(Q) = \sup_{\underline{Q} \subset Q} S(\underline{Q}),$$

осы сияқты Q фигураға сырттай сызылған фигуралар аудандарының ең төменгі шегі бар, яғни

$$S^* = S^*(Q) = \inf_{Q \subset \overline{Q}} S(\overline{Q})$$

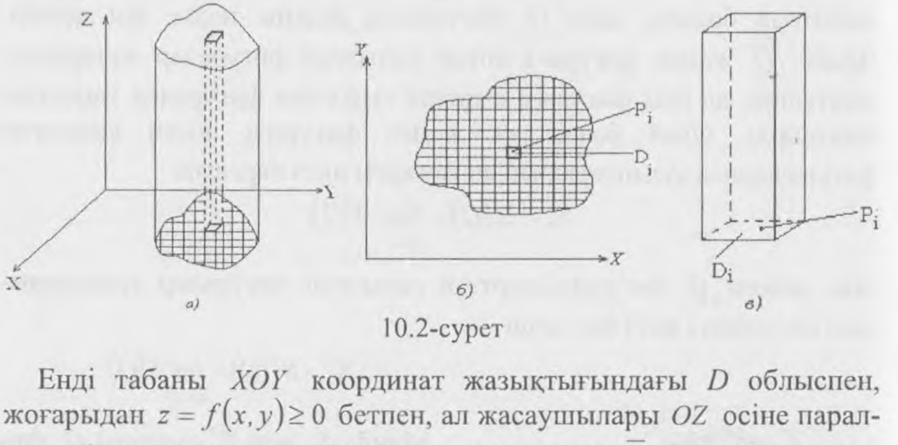


10.1-сурет

Мұнда S_* мен S^* сандары Q фигураның сәйкес ішкі мен сыртқы аудандары деп аталады және $S_* \le S^*$ теңсіздігі орындалады. Егер $S_* = S^*$ теңдігі орындалса, онда $S = S_* = S^*$ саны Q фигураның ауданы деп аталады. Бұл жағдайда Q

фигураның ауданы бар немесе ауданы есептелінетін немесе квадратталынатын фигура деп аталады. Жазық фигура квадратталынуы үшін кез келген $\varepsilon > 0$ санына Q фигураға сырттай әрі іштей сызылған фигуралар табылып, $S(\overline{Q}) - S(\underline{Q}) < \varepsilon$ теңсіздігінің орындалуы қажетті әрі жеткілікті. Осы тұжырымды басқаша келтірейік, ол үшін мына анықтаманы пайдаланайық. Q фигураның L сызығының ауданы нөлге тең деп аталады, егер кез келген $E > 0$ санына ауданы E-ден кіші көпбұрыш табылып, L шекара сызығының барлық нүктелері осы көпбұрышқа тиісті болса.

Енді жоғарыдағы тұжырымды былай тұжырымдауға болады: Q фигура квадратталу үшін фигура шекарасының ауданы нөлге тең болуы қажетті әрі жеткілікті. Мысалы, кез келген $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [a; \beta]$ түзуленуші қисық сызықтың ауданы нөлге тең, мұндағы $\varphi(t)$, $\psi(t)$ функциялары әрі олардың туындылары үзіліссіз және $[a; b]$ сегментте үзіліссіз $y = f(x)$ функцияның қисық сызығының да ауданы нөлге тең. Демек, егер кез келген фигураның шекарасы саны санаулы үзіліссіз қисық сызықтар $y = f(x)$ теңдеуімен берілсе, онда ол фигура квадратталынады.



10.2-сурет

Енді табаны XOY координат жазықтығындағы D облыспен, жоғарыдан $z = f(x, y) \geq 0$ бетпен, ал жасаушылары OZ осіне параллель болатын цилиндрлік бетпен шектелген $\overline{V}$ денені қарастырайық (*10.2 а-сурет*), мұндағы $z = f(x, y)$ функция D облыста анықталсын және үзіліссіз болсын. Осы $\overline{V}$ дененің көлемін табайық. Ол үшін, D облысты фигураны еркімізше ішкі нүктелері ортақ болмайтын n кіші D_i облыстарға (фигураларға) бөліктейік (*10.2 б-сурет*), $i = \overline{1.n}$ және осы кіші бөліктердің аудандарын ΔD_i таңбамен белгілейік (*10.2 в-сурет*). D_i бөліктерінің әрқайсысынан кез келген $A_i(x_i, y_i)$ нүкте алайық. Бұл нүкте D_i фигураның ішкі немесе шекара нүктелерінің бірі болсын. Осылайша бөліктеу нәтижесінде біз $\overline{V}$ денені төменнен (табаны) $D_1, D_2, ..., D_n$ фигуралармен, ал жоғарыдан $z = f(x, y)$ беттің бөліктерімен, ал бүйір жақтарының жасаушылары OZ осіне паралель болатын тік қисық сызықты $\overline{V_1}, \overline{V_2}, ..., \overline{V_n}$ цилиндрлік денелерді аламыз. Кіші цилиндрлік денелердің көлемдерінің қосындысы жуық шамамен $\overline{V}$ дененің V көлеміне тең, ал осы қосынды $\overline{V}$ дененің V көлеміне тең болу үшін n бөлікке бөліктеудің санын шексіздікке артттырып теңдік алуға болады. Енді осы айтылғандарды іске асырайық. Ол үшін $\overline{V_i}$ кіші дененің көлемін табайық (10.2 в-сурет). $\overline{V_i}$ дененің табанының ауданы ΔD_i-ге, ал биіктігі $z = f(x, y)$ функцияның $P_i(x_i, y_i)$ нүктедегі мәніне тең, онда $\overline{V_i}$ дененің көлемі $V_i = \Delta D_i \cdot f(x_i, y_i)$ болады. Осы көбейтіндіден 1-ден бастап n-ге дейін қосынды алайық (кіші $\overline{V_i}$ денелердің саны n-ге тең, $i = \overline{1, n}$

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta D_i \cdot f(x_i, y_i) \qquad (10.1)$$

Сонымен, $\overline{V}$ дененің көлемі жуық шамамен (10.1) қосындының мәніне тең. Енді (10.1) қосындыдан $n \to \infty$ болғанда шекке көшіп (егер ол шек бар болса), $\overline{V}$ дененің дәл көлемін табамыз:

$$\overline{V} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta D_i \cdot f(x_i, y_i)$$

Осы сияқты $\overline{V}$ дененің массасын, ауырлық центрін, статикалық моментін, т.с.б. табуға болады.

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Фигураның шекарасы.

10.2. Екі еселі интегралдың анықтамасы және оның бар болуы

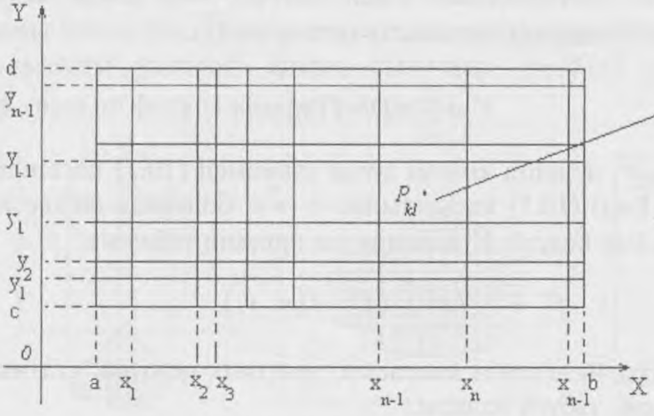
Бізге $D = \{(x, y): a \le x \le b, c \le y \le d\}$ тіктөртбұрышта анықталған әрі үзіліссіз $z = f(x, y)$ функция берілсін. Енді $[a; b]$ сегментті еркімізше $x_0, x_1, ..., x_n$ нүктелерімен n бөліктерге: $0 = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$, ал $[c; d]$ сегментті $y_0, y_1, ..., y_m$ нүктелермен m бөліктерге бөлейік: $c = y_0 < y_1 < ... < y_m = d$. Осы x_i мен y_i нүктелерден $(k = \overline{1.n}), l = \overline{1.m}$ сәйкес OY, OX осьтеріне параллель түзулер жүргізейік (*10.2-сурет*). Осылайша $[a;b]$ мен $[c;d]$ сегменттерін бөліктерге бөлуді τ таңбамен белгілейік. Онда D тіктөртбұрыш саны $n\cdot m$-ге тең дербес тіктөртбұрыштарға бөлінеді және олар элементар фигуралар деп аталады:

$$D_{kl}=\{(x_{k-1}\le x\le x_k)\cap(y_{i-1}\le y\le y_l)\},\ k=\overline{1\cdot n},\ l=\overline{1\cdot m}.$$

Енді әрбір D_{kl} дербес тіктөртбұрыштан (элементар фигуралардан) кез келген $P(\overline{x}_k,\overline{y}_l)=P_{kl}$ нүкте алайық және $[x_{k-1};x_k]$ мен $[y_{l-1};y_l]$ сегменттерінің ұзындықтарын сәйкес Δx_k мен Δy_l таңбамен белгілейік:

$$\Delta x_k=x_k-x_{k-1},\ \ \Delta y_l=y_l-y_{l-1},$$

ал D_{kl} дербес тіктөртбұрыштың ауданы ΔD_{kl} болсын, мұндағы $\overline{x}_k\in[x_{k-1};x_k]$ $\overline{y_l}\in[y_{l-1};y_l]$.



10.3-сурет

Онда $\Delta D_{kl}=\Delta x_k\cdot\Delta y_l$ болады. Бұл жағдайда D тіктөртбұрыштың ауданы үшін $\Delta D=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\Delta x_k\cdot\Delta y_l$ теңдігі орындалады. Енді $P(\overline{x}_k;\overline{y}_l)=P_{kl}$ нүктедегі $f(x,y)$ функцияның мәнін ΔD_{kl} ауданға көбейтейік: $f(\overline{x}_k;\overline{y}_k)\cdot\Delta D_{kl}$ және осы көбейтіндіден k индекс, содан соң l индекс бойынша сәйкес 1-ден n-ге, 1-ден m-ге дейін қосынды алайық:

$$J(D_{kl},P_{kl})=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}f(\overline{x}_k;\overline{y}_l)\cdot\Delta D_{kl}. \tag{10.2}$$

Сонымен, D облысты жоғарыдағы τ бөліктеу нәтижесінде және $P(\overline{x}_l, \overline{y}_k)$ нүктені алу бойынша (10.2)-қосындыны анықтадық.

Анықтама. D тіктөртбұрышты τ бөліктеуі бойынша бөліктеуге әрі $P(\overline{x}_l, \overline{y}_k)$ нүктені таңдап алуымызға сәйкес келген (10.2) қосынды D тіктөртбұрыштағы $f(x,y)$ **функцияның интеграл қосындысы** деп аталады.

Енді D_{kl} дербес тіктөртбұрыштардың диоганальдарының ең үлкен ұзындығын λ деп белгілейік, яғни $\lambda = max\left\{\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_l)^2}\right\}$.

Анықтама. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ санына $\delta > 0$ саны табылып, D облысты кез келген бөліктеу үшін $\lambda < \delta$ теңсіздігі орындалса әрі D_{kl} тіктөртбұрышқа тиісті кез келген $P(\overline{x}_k; \overline{y}_l)$ нүкте үшін

$$\left|J(D_{kl}, P_{kl}) - J\right| < \varepsilon \qquad (10.3)$$

теңсіздігі орындалса, $\lambda \to 0$ болғанда J саны (10.2) интеграл қосындының шегі деп аталады.

Демек, (10.2) интеграл қосынды D облысты бөліктеу әдісіне және $P(\overline{x}_k; \overline{y}_l)$ нүктені D_{kl} тіктөртбұрыштан таңдап алу әдісіне тәуелсіз болады. Басқаша айтқанда, D тіктөртбұрышты әрі P_{kl} нүктені еркімізше таңдап алғанға сәйкес келетін кез келген (10.2) интеграл қосындыларға (10.3) теңсіздігі орындалуы керек.

Егер $\lambda \to 0$ болғанда (10.2) интеграл қосындының шегі бар болса, онда ол шек D тіктөртбұрыштағы $f(x,y)$ функцияның екі еселі интегралы деп аталады және ол былай белгіленеді:

$$J = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} f(\overline{x}_k, \overline{y}_l) \cdot \Delta D_{kl} = \iint_D f(x,y)dxdy.$$

Бұл жағдайда, $f(x,y)$ функция D тіктөртбұрышта интегралданады деп аталады. Сонымен, *1-бөлімде* бір еселі анықталған интегралға дәлелденген тұжырымдарды дәлелдеуге болады: D тіктөртбұрышта интегралданатын кез келген $f(x,y)$ функция осы облыста шектелген. Сондықтан біз алдағы тақырыптарда шектелген функцияларды қарастыратын боламыз.

Енді тіктөртбұрышты облыста екі еселі интегралдың бар болуын қарастырайық. Ол үшін *1-бөлімде* қарастырылған бір айнымалы $y = f(x)$ функцияның S, s қосындыларына, $\overline{J}, \underline{J}$ интегралдарына орындалатын тұжырымдар толығымен $f(x,y)$ фунцияға да орындалатынын ескертейік ([1], *6.1-6.5-тақырыптар*) және олардың дәлелдемесі бір айнымалы функциядағыдай дәлелденеді:

$$S=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} M_{kl}\cdot \Delta D_{kl},\quad S=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} m_{kl}\cdot \Delta_{kl},$$

$$\overline{J}=inf\{S\},\qquad \underline{J}=Sup\{s\},$$

мұндағы M_{kl}, m_{kl} – сандары $f(x,y)$ функцияның D_{kl} тіктөртбұрыштағы сәйкес ең жоғарғы, ең төменгі шекаралары, S пен s – Дарбудың жоғарғы және төменгі қосындылары. Функцияның D тіктөртбұрышты облыста интегралдану белгісінің негізгі теоремаларын дәлелдеусіз қабыл алып, оларды атап өтеміз ([1], *6.3-6.4-теорема*).

10.1-теорема. D тіктөртбұрышта шектелген $f(x,y)$ функция осы тіктөртбұрышта интегралдану үшін кез келген $\varepsilon>0$ санына D төртбұрышты бөліктейтін τ бөліктеуі табылып, $S-s<\varepsilon$ теңсіздігі орындалуы қажетті әрі жеткілікті.

10.2-теорема. D тіктөртбұрышта үзіліссіз кез келген $f(x,y)$ функция осы тіктөртбұрышта интегралданады.

Анықтама. D тіктөртбұрышта $f(x,y)$ функцияға R-қасиет орындалады деп аталады, егер:

1) D төртбұрышта $f(x,y)$ функция шектелсе;

2) Кез келген $\varepsilon>0$ сан үшін ауданы ε-нан кіші элементар фигура табылып, $f(x,y)$ функция графигінің барлық нүктелері және оның үзілісті нүктелері осы фигураға тиісті болса.

Осы анықтаманы кез келген D облыс үшін де келтіруге болады.

10.3-теорема. Егер D тіктөртбұрышта $f(x,y)$ функцияға R-қасиет орындалса, онда функция D тіктөртбұрышта интегралданады.

Жоғарыда келтірілген анықтамалар мен теоремалар толығымен кез келген шектелген D жиыны үшін де орындалады. Біз D облысты OX, XY осьтеріне параллель түзулермен дербес тіктөртбұрыштарға бөліп, екі еселі интегралдың анықтамасын және оның бар болуын анықтадық. D облысты қисық сызықпен бөліктеу арқылы екі еселі интегралдың анықтамасын беруге және бұл анықтама жоғарыда келтірілген анықтамамен эквивалентті болады.

Ескерту. Егер D облыста $f(x,y)=1$ болса, онда шектелген D облыстың ауданы мына формуладан анықталады:

$$S=\iint_{0} dxdy.$$

Сұрақтар:

1. Функцияның интеграл қосындысы.
2. Функцияның екі еселі интегралы.

10.3. Екі еселі интегралдардың қасиеттері

Бір еселі анықталған интегралға орындалатын қасиеттер екі еселі интегралға да орындалады ([1], *6.6–6.8-тақырып*). Сондықтан біз олардың тек тұжырымдарын ғана келтіреміз.

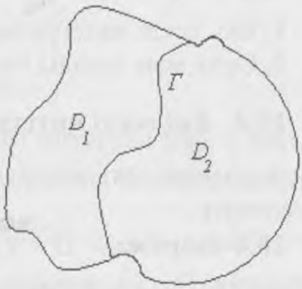
1-қасиет. Егер $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ функциялары D облыста интегралданса және $c_1, c_2 - const$, онда $c_1 f(x,y) \pm c_2\varphi(x,y)$ функцияда D облыста интегралданады және

$$\iint_D c_1 f(x,y) \pm c_2\varphi(x,y) dxdy = c_1 \iint_D f(x,y)dxdy \pm \pm c_2 \iint_D \varphi(x,y)dxdy$$

теңдік орындалады.

2-қасиет. Егер $f(x,y)$ пен $\varphi(x,y)$ функциялары D облыста интегралданса, онда $f(x,y)\cdot\varphi(x,y)$ функция да осы облыста интегралданады.

3-қасиет. Егер $f(x,y)$ функция D облыста интегралданса және ауданы нөлге тең Γ қисық сызығы осы облысты ортақ ішкі нүктесі жоқ D_1 мен D_2 байланысты облыстарға бөлсе, онда функция D_1 мен D_2 облыстарда интегралданады (*10.4-сурет*) және:



10.4-сурет

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$

4-қасиет. Егер $f(x,y)$ және $\varphi(x,y)$ функциялар D облыста интегралданса және облыстың барлық нүктелерінде $f(x,y) \le \varphi(x,y)$ теңсіздігі орындалса, онда

$$\iint_D f(x,y)dxdy \le \iint_D \varphi(x,y)dxdy$$

теңсіздік орындалады.

5-қасиет. Егер $f(x,y)$ функция D облыста интегралданса, онда $|f(x,y)|$ функцияда осы облыста интегралданады және

$$\left|\iint_D f(x,y)dxdy\right| \le \iint_D \; |f(x,y)| \; dxdy.$$

6-қасиет (орта мән туралы теорема). Егер $f(x,y)$ пен $\varphi(x,y)$ функциялары D облыста интегралданса, $\varphi(x,y)$ функция осы облыста теріс (оң) емес болса, M мен m сандары $f(x,y)$ функцияның D

облыстағы сәйкес ең жоғарғы, ең төменгі шекарасы болса, онда $m \leq \mu \leq M$ теңсіздігін қанағаттандыратын μ саны табылып,

$$\iint_D f(x,y)\varphi(x,y)dxdy = \mu \iint_D \varphi(x,y)dxdy$$

теңдігі орындалады.

Осы қасиеттен: егер $f(x,y)$ функция байланысты D облыста үзіліссіз болса, онда осы облыста $A(\overline{x},\overline{y})$ нүкте табылып, $\mu = f(\overline{x},\overline{y})$ және

$$\iint_D f(x,y)\varphi(x,y)dxdy = f(\overline{x},\overline{y})\iint_D \varphi(x,y)dxdy$$

болады.

Сұрақтар:

1. Екі еселі интегралдардың қасиеттері.
2. Орта мән туралы теорема.

10.4. Екі еселі интегралды есептеу

Алдымен, екі еселі интегралды D тіктөртбұрышты облыста есептейік.

10.4-теорема. $D = \{(x,y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ тіктөртбұрышты облыста $f(x,y)$ функцияның

$$J = \iint_D f(x,y)dxdy \tag{10.5}$$

екі еселі интералы бар болсын.

Егер кез келген $x \in [a,b]$ үшін

$$J(x) = \int_c^d f(x,y)dy \tag{10.6}$$

анықталған (бір еселі) интегралы бар болса, онда қайталанған

$$\int_a^b J(x)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$$

интегралы бар және мына теңдік орындалады:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy. \tag{10.7}$$

Дәлелдеуі. Тікбұрышты D облысты $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ және $c = y_0 < y_1 < y_2 < ... < y_n = d$ нүктелермен OX, OY осьтеріне параллель түзулермен $n \cdot m$ дербес төртбұрыштарға бөлейік (*10.3-сурет*):

$$D_{kl} = \{(x_{k-1} \le x \le x_k) \cap (y_{l-1} \le y \le y_l)\},$$

$$k = \overline{1,n},\ l = \overline{1,m},\ \Delta x_k = x_k - x_{k-1},\ \Delta y_l = y_l - y_{l-1},$$

және D_{kl} тіктөртбұрыштағы $f(x,y)$ функцияның сәйкес ең үлкен және ең кіші шекарасы M_{kl}, m_{kl} болсын. Онда барлық $x, y \in D_{kl}$ үшін

$$m_{kl} \le f(x,y) \le M_{kl}$$

теңсіздігі орындалады. Теңсіздіктегі $x = \overline{x}_k$ болсын, мұндағы $\overline{x}_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Соңғы теңсіздікті айнымалы бойынша y_{l-1}-ден y_l-ге дейін y айныма бойынша интегралдайық:

$$m_{kl} \int_{y_{l-1}}^{y_l} dy \le \int_{y_{l-1}}^{y_l} f(\overline{x}_k, y)dy \le M_{kl} \int_{y_{l-1}}^{y_l} dy.$$

Осыдан:

$$m_{kl}\Delta y_l \le J(\overline{x}_k) \le M_{kl}\Delta y_l,$$

мұндағы $J(\overline{x}_k)$ интегралы бар, себебі (10.6) интеграл бар. Соңғы теңсіздікті 1-ден m-ге дейін l бойынша қосынды алайық, сонда $\sum_{l=1}^{m} m_{kl}\Delta y_l \le J(\overline{x}_k) \le \le \sum_{l=1}^{m} M_{kl}\Delta y_l$. Соңғы теңсіздікті $x_k - x_{r-1} = \Delta x_k$-ға көбейтіп, 1-ден n-ге дейін k бойынша қосынды алайық, сонда

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \sum_{l=1}^{m} m_{kl}\Delta y_l \le \sum_{k=1}^{n} J(\overline{x}_k)\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \sum_{l=1}^{m} M_{kl}\Delta y_l. \quad (10.8)$$

Егер D_{kl} дербес тіктөртбұрыштардың ең үлкен диаметрі λ болса, әрі ол нөлге ұмтылса, онда D_{kl} дербес тіктөртбұрыштардың ең үлкен Δx_k қабырғасы да нөлге ұмтылады. (10.8) теңсіздіктің ортасында $J(x)$ функцияның интеграл қосындысы, ал оның оң жағы мен сол жағында екі еселі интегралдың сәйкес төменгі мен жоғарғы қосындылары. Сондықтан $\Delta x_k \to 0$ болғанда, екі еселі интегралдың төменгі мен жоғарғы қосындысы екі еселі интегралға ұмтылады, онда $\sum_{k=1}^{n} J(\overline{x}_k)\Delta x_k$ интеграл қосындының да интегралы бар және ол осы екі еселі интегралға ұмтылады, яғни

$$\int_a^b J(x)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy.$$

Демек, қайталанған екі еселі интеграл бар. Теорема дәлелденді.

(10.7) формуланың оң жағындағы бірінші интеграл сыртқы, ал екінші интеграл ішкі интеграл деп аталады. Тіктөртбұрышты облыста екі еселі интегралды есептегенде кез келген интегралдан бастап есептеуге болады.

Дәлелденген теореманың тұжырымында екі еселі интегралдың және $[c,d]$ сегментте тағайындалған кез келген y үшін $J_1(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ интегралының бар болуын ұйғарып, қайталанған

$$\int_c^d J_1(y)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx \tag{10.9}$$

интегралының да бар болуын дәлелдеуге болады.

Енді кез келген қисық сызықты облыс үшін екі еселі интегралды қайталанған интегралға келтіруге болатынын қарастырайық.

2. Бізге $D=\{(x,y): a\le x\le b,\ y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$ облыста анықталған $f(x,y)$ функция берілсін, мұндағы $y_1(x)$, $y_2(x)$ функциялары $[a,b]$ сегментте үзіліссіз болсын (*10.5-сурет*). Тұйық D облыста OY осіне параллель жүргізілген түзулер $y_1(x)$ пен $y_2(x)$ қисық сызықтарымен екіден артық емес нүктелерде қиылыссын, яғни D облыстың оң жағы $x=b$, сол жағы $x=a$ түзулерімен, ал жоғарыдан $y_2=y_2(x)$ төменнен $y_1=y_1(x)$ қисық сызықтармен шектелген (шенелген).

10.5-теорема. D облыста анықталған $f(x,y)$ функцияның екі еселі

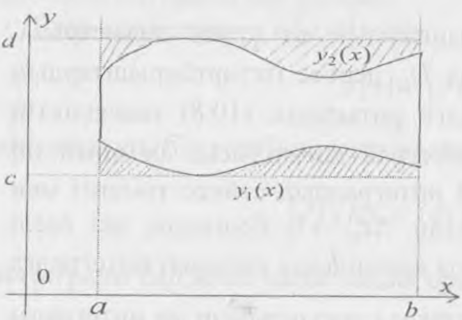
$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

интегралы бар болсын және кез келген $x\in[a,b]$ үшін

$$J(x)=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

интеграл бар болсын, онда:

$$\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$



10.5-сурет

интегралы бар және мына теңдік орындалады:

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \tag{10.10}$$

Дәлелдеуі. Дәлелдеу үшін $c = \min y_1(x)$, $d = \min y_2(x)$ болсын. Енді D облысты $D_1 = \{(x,y): a \le x \le b, c \le y \le d\}$ тіктөртбұрыштың ішіне орналастырайық және D_1 облысында қосымша облыстың нүктелері үшін, қалған нүктелер үшін

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & D \\ 0, & \end{cases}$$

функцияны қарастырайық. Онда $f^*(x,y)$ функция *10.3-теореманың* барлық шарттарын қанағаттандырады. Шынында да, ол D облысында интегралданады, яғни облысы үшін $f(x,y) = f^*(x,y)$ теңдігі орындалады, ал тіктөртбұрыштың қалған D_1 / D облысында ол нөлге тең және интегралданады:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f^*(x,y)dxdy, \quad \iint_{D_1 \setminus D} f^*(x,y)dxdy = 0.$$

Осыдан:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f^*(x,y)dxdy. \tag{10.11}$$

Теореманың шарты бойынша $[a,b]$ сегменттегі кез келген x үшін $J(x)$ интегралы бар, онда

$$\int_c^d f^*(x,y)dy = \int_c^{y_1(x)} f^*(x,y)dy + \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f^*(x,y)dy + \int_{y_2(x)}^d f^*(x,y)dy \tag{10.12}$$

интегралы да бар, себебі теңдіктің оң жағындағы үш интеграл бар. Шынында да, $[c, y_1(x)]$ және $[y_2(x), d]$ сегменттері D облысына тиісті емес әрі олардың әрқайсысында $f^*(x,y)$ функция нөлге тең және

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f^*(x,y)dy$$

интегралы

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

интегралына тең, ал соңғы интеграл теореманың шарты бойынша бар. (10.12) формуланың оң жағындағы бірінші және үшінші интегралдар нөлге тең болғандықтан:

$$\int_c^d f^*(x,y)dy = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f^*(x,y)dy. \tag{10.13}$$

Сонымен, D_1 облыста анықталған $f^*(x,y)$ функция осы облыста *10.3-теореманың* барлық шарттарын қанағаттандырады, демек, $f^*(x,y)$ функцияның D_1 облыстағы екі еселі интегралы қайталанған интеграл арқылы есептелінеді:

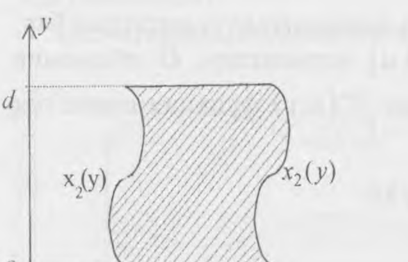
$$\iint\limits_D f^*(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f^*(x,y)dy.$$

Осыдан және (10.11), (10.13) теңдіктерден дәлелдеу керек теңдікті аламыз:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy. \tag{10.14}$$

1-ескерту. Біз жоғарыда OY осіне параллель жүргізілген $x-const$ түзулер $y_1(x)$, мен $y_2(x)$ қисық сызықтарды екіден артық емес нүктелерде қисын деп жорыдық, ал егер OX осіне параллель түзулер $x_1(y)$, $x_2(y)$ қисық сызықтарды екіден артық нүктелерде қиятын болса (*10.6-сурет*), онда екі еселі интеграл мына формула бойынша есептелінеді:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \ . \tag{10.15}$$

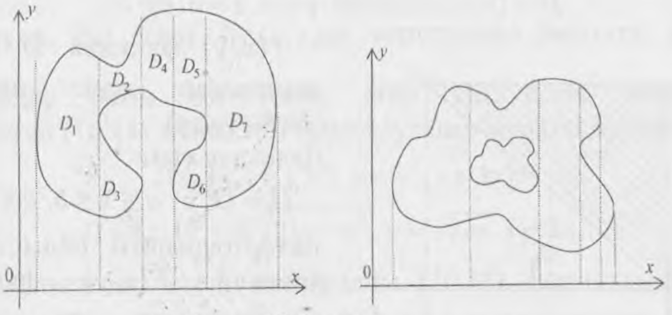


10.6-сурет

Қисық сызықта екі еселі интегралды есептегенде ішкі интегралдан бастап есептеу қажет. Егер де (10.14) формуламен екі еселі интегралды есептеу қиындыққа әкелсе, онда интегралды (10.15) формуламен есептеген тиімді (немесе керісінше). Бұл жағдайда екі еселі интегралдың интегралдау ретін өзгерту қажет болады.

2-ескерту. Егер D облыстың шекарасын $x-const$ немесе $y-const$ түзулері екіден артық нүктелерде қиса (*10.7-сурет*), онда *10.4-теорема* орындалатындай D облысты кіші облыстарға бөлеміз, әр облысты екі еселі интеграл арқылы есептеу керек.

3-ескерту. Егер $\iint\limits_D f(x)\varphi(y)dxdy$ интегралы $D_1 = \{x, y : a \le x \le b,$ $c \le y \le \ \le b\}$ тіктөртбұрышты облыста бар болса, онда мына теңдік орындалады:



10.7-сурет

$$J = \iint\limits_D f(x)\varphi(y)dxdy = \int\limits_a^b f(x)dx \int\limits_c^d \varphi(y)dy.$$

Берілген D облысты $x = x_i$ және $y = y_k$ $(i = \overline{0,n},\ k = \overline{0,m})$ түзулермен еркімізше кіші S_{ik} тіктөртбұрыштарға бөліктейміз, бұл жағдайда x_i мен y_k кіші тіктөртбұрыштардың төбелерінің координаттары болады және мына интеграл қосындыны қарастырайық:

$$S = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} f(x_i)\varphi(y_k)\Delta x_i \Delta y_k .$$

Осыдан:

$$S = \left(\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x_i\right)\left(\sum_{k=0}^{m} \varphi(y_k)\Delta y_k\right).$$

Кіші S_{ik} тіктөртбұрыштардың жеткілігінше аз бөліктеріне төмендегі шектер орындалады:

$$S \to J,\ \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x_i \to \int\limits_a^b f(x)dx,$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} \varphi(y_k)\Delta y_k \to \int\limits_c^d \varphi(y)dy.$$

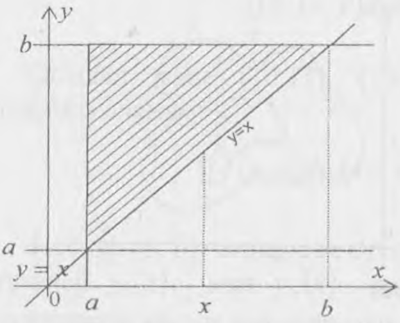
Онда дәлелдеу керек теңдік орындалады.

4-ескерту. Интегралдық теңдеулер теориясында жиі қолданылатын **Дирихле формуласы** деп аталатын

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx\int\limits_a^x f(x,y)dy = \int\limits_a^b dy\int\limits_y^b f(x,y)dx$$

формуланы дәлелдейік, мұндағы

$$D = \{x, y : a \le x \le b,\ y = x, x = a, y = b\},$$



10.8-сурет

$f(x,y)$ функция D облыста анықталған және шектелген (*10.8-сурет*).

Дәлелдеу үшін

$$D_1 = \{x, y : a \le x \le b,\ c \le y \le b\}$$

тіктөртбұрышты облысты және көмекші $F(x,y)$ функцияны қарастырайық:

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \in D_1. \end{cases}$$

Онда $F(x,y)$ функция үшін

$$J_1 = \int\limits_a^b dx\int\limits_a^b F(x,y)dy,\quad J_2 = \int\limits_a^b dy\int\limits_a^b F(x,y)dx$$

интегралдары бар. Енді D_1 облысты $x = x_i$ және $y = y_k$ ($i = \overline{0, n-1}$, $k = \overline{0, m-1}$) OX пен OY осьтеріне параллель түзулермен бөліктейік. Сонда D облыс кіші S_{ik} тіктөртбұрыштарға бөліктенеді. Кіші тіктөртбұрыштардың әрқайсысынан еркімізше $P_{ik}(\overline{x}_i \overline{y}_k)$ нүкте алып, төмендегі екі интеграл қосындыны қарастырайық:

$$S_1 = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{m-1} F(\overline{x}_i, \overline{y}_k)\Delta y_k\right)\Delta x_i,\quad S_2 = \sum_{k=0}^{m-1}\left(\sum_{i=0}^{n-1} F(\overline{x}_i, \overline{y}_k)\Delta x_i\right)\Delta y_k.$$

Егер D_1 облысты жеткілігінше кіші бөліктерге бөлсек, онда $\varepsilon > 0$ саны үшін $|J_1 - S_1| < \varepsilon$, $|J_2 - S_2| < \varepsilon$ теңсіздіктері орындалады, мұндағы S_1 мен S_2 тең болғандықтан, $J_1 = J_2$ болады. Енді кез келген тағайындалған сәйкес $x \in (a;b)$ және $y \in (a;b)$ үшін мына теңдіктер орындалады:

$$\int\limits_a^b F(x,y)dy = \int\limits_a^x F(x,y)dy + \int\limits_x^b F(x,y)dy = \int\limits_a^x f(x,y)dy,$$

$$\int\limits_a^b F(x,y)dy = \int\limits_a^y F(x,y)dy + \int\limits_y^b F(x,y)dy = \int\limits_y^b f(x,y)dx.$$

Онда $J_1 = J_2$ теңдігінен дәлелдеу керек Дирихле формуласын аламыз:

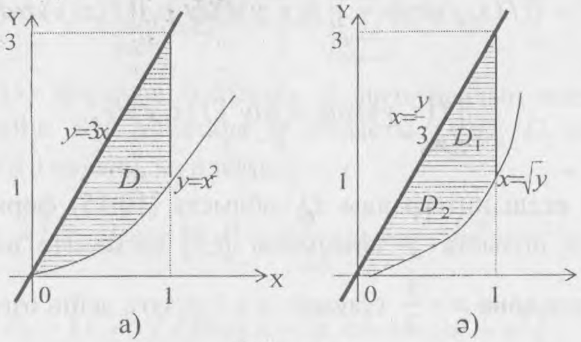
$$\int_a^b dx \int_a^x f(x,y)dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x,y)dy .$$

1-мысал. Екі еселі $\iint_D f(x,y)dy$ интегралды берілген облыста интегралдау ретін өзгертейік, яғни екі еселі интегралды қайталанған (10.14) және (10.15) формулалар арқылы өрнектейік:

$$D = \{(x,y): x = 1, y = x^2, y = 3x\}.$$

$$D = \{(x,y): y = \sqrt{2ax - x^2}, y = \sqrt{2ax}, x = 2a\}.$$

1. Алдымен екі еселі интегралды (10.14) формуламен интегралдайық. Ол үшін $y = x^2$, $y = 3x$, $x = 1$ теңдеулермен берілген функциялардың графигін салайық (*10.9 а-сурет*). Сонда D облыста



10.9-сурет

функциялар *10.4-теореманың* барлық шарттарын қанағаттандырады және ол жоғарыдан $y = 3x$ түзумен, төменнен $y = x^2$ параболамен, сол жағы $x = 0$, оң жағы $x = 1$ түзулерімен шектелген. Онда D облысты мына түрде жазуға болады:

$$D = \{x, y : 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le 3x\}.$$

Бұл жағдайда x айнымалы $[0;1]$ сегментте өзгергенде y айнымалы $y = x^2$ параболадан $y = 3x$ түзуге дейін өзгереді, яғни (10.14) формуладан

$$J = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{3x} f(x,y)dy .$$

Енді екі еселі интегралды (10.15) формулаға келтірейік. Бұл жағдайда, D облыс жоғарыдан $y=3$, төменнен $y=0$ түзулермен, сол жағы $x=\frac{y}{3}$ түзумен, ал оң жағы екі $x=1$ және $x=\sqrt{y}$ сәйкес түзу және қисық сызықтармен шектелген (*10.9 ә-сурет*). Онда, D облысты $x=1$ түзумен $x=\sqrt{y}$ қисық сызықтың қиылысу нүктесі арқылы D_2 мен D_1 облыстарға бөлеміз. Осы облыстардың әрқайсысының оң жақтары мен сол жақтары тек бір ғана түзу немесе қисық сызықпен шектелген, яғни әрбір облыстағы функциялар *10.4-теореманың* барлық шарттарын қанағаттандырады. Енді екі еселі интегралды D_2 облыста (10.15) формулаға келтірейік. Бұл облыста y айнымалы $[0;1]$ сегментте өзгергенде x айнымалы тек қана $x=\frac{y}{3}$ түзуден $x=\sqrt{y}$ параболаға дейін өзгереді (басқа түзу немесе қисық сызық жоқ), сондықтан

$$J=\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D_1} f(x,y)dxdy+\iint_{D_2} f(x,y)dxdy,$$

$$\iint_{D_2} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dy\int_{\frac{y}{3}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx.$$

Енді екі еселі интегралды D_1 облыста (10.15) формулаға келтірейік. Бұл облыста y айнымалы $[1;3]$ сегментте өзгергенде x айнымалы тек қана $x=\frac{y}{3}$ түзуден $x=1$ түзуге дейін өзгереді.

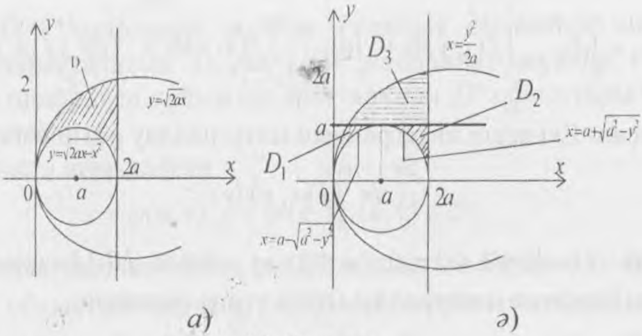
Сондықтан:

$$\iint_{D_2} f(x,y)dxdy=\int_1^3 dy\int_{\frac{y}{3}}^{1} f(x,y)dx\cdot$$

Сонымен

$$J=\iint_D f(x,y)dxdy=\int_0^1 dy\int_{\frac{y}{3}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx+\int_1^3 dy\int_{\frac{y}{3}}^{1} f(x,y)dx\cdot$$

2. Енді (10.14) формула бойынша интегралдайық. $y=\sqrt{2ax-x^2}$ қисық сызығы радиусы 1-ге, центрі $A(a,0)$ нүктедегі шеңбер, ал $y=\sqrt{2ax}$ қисық сызығы – гипербола, $x=2a$ түзу. Осы қисық сызықтармен шектелген D облыс *10.10 а-суретте* көрсетілген. D облыс жоғарыдан әрі төменнен сәйкес



10.10-сурет

$$y=\sqrt{2ax} \quad \text{және} \quad y=\sqrt{2ax-x^2}$$

қисық сызықтармен ғана шектелген. Сондықтан (10.14) формула бойынша:

$$J=\iint_D f(x,y)dx=\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)dy.$$

Енді (10.15) формула бойынша J интегралдың интегралдану ретін өзгертейік. Бұл жағдайда D облысты D_1, D_2, D_3 облыстарға бөлеміз (*10.10 ә-сурет*), мұндағы:

$$D_1=\left\{(x,y): y\in[0;a], x=\frac{y^2}{2a}, x=a-\sqrt{a^2-y^2}\right\},$$

$$D_2=\left\{(x,y): y\in[0;a], x=2a, x=a+\sqrt{a^2-y^2}\right\},$$

$$D_3=\left\{(x,y): y\in[a;2a], x=\frac{y^2}{2a}, x=2a\right\}.$$

Демек, D_1 облыс үшін: y айнымалы 0-ден a-ға дейін өзгергенде x айнымалы $x=\frac{y^2}{2a}$ қисық сызықтан $x=a-\sqrt{a^2-y^2}$ қисық сызыққа дейін өзгереді.

D_2 облыс үшін: y айнымалы 0-ден $2a$-ға дейін өзгергенде x айнымалы $x=\frac{y^2}{2a}$ қисық сызықтан $x=2a$ түзуге дейін өзгереді.

Онда:

$$J=\iint_{D_1} f(x,y)dxdy+\iint_{D_2} f(x,y)dxdy+\iint_{D_3} f(x,y)dxdy=$$

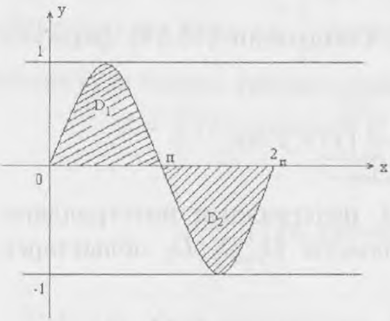
$$= \int_0^a dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx + \int_0^a dy \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)dx + \int_0^{2a} dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)dx \cdot$$

2-мысал. Екі еселі интегралдың интегралдау ретін өзгертейік.

$$\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x,y)dy .$$

Шешуі. $D = \{0 \le x \le 2\pi, 0 \le y \le \sin x\}$ облыс *10.11-суретте* бейнеленген. Берілген интегралды мына түрде жазайық:

$$\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x,y)dy = \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x,y)dy + \int_{\pi}^{2\pi} dx \int_{\sin x}^{0} f(x,y)dy .$$



10.11-сурет

Енді әрбір екі еселі интегралдың сәйкес D_1 мен D_2 облыстарда интегралдау ретін өзгертейік.

D_1 облыс үшін:

y айныма $[0,1]$ сегментте өзгергенде x айныма $x = arcsin\, y$-тен $\pi - arcsin\, y$-ке дейін өзгереді.

D_2 облыс үшін:

y айныма $[-1,0]$ сегментте өзгергенде x айныма $\pi - arcsin\, y$-тен $2\pi +$ $+ arcsin\, y$-ке дейін өзгереді, онда

$$\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x,y)dx = \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x,y)dx - \int_{-1}^0 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{2\pi + \arcsin y} f(x,y)dx .$$

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Екі еселі интегралды тік төртбұрышты облыста интегралдау.
2. Екі еселі интегралды қисық сызықты облыста интегралдау.
3. Дирихле формуласы.

10.5. Екі еселі интегралда айнымалыны алмастыру

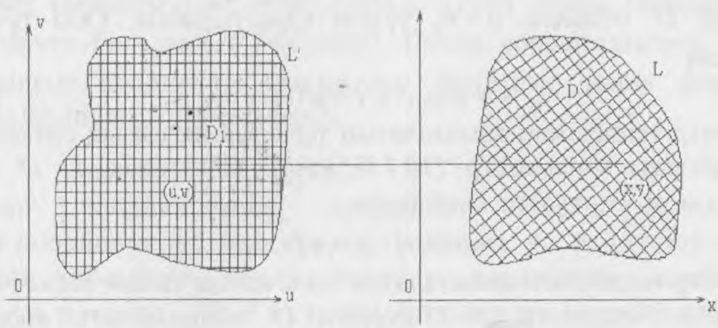
Бір еселі интегралда айнымалыны алмастырғандай, екі еселі интегралда да x, y екі айнымалыны u мен v жаңа айнымалыға алмастырып екі еселі интегралды есептеуге болады. Ол үшін декарт координат жүйеде екі XOY пен UOV жүйелерді және олардағы сәйкес нүктелердің координаттары $(x,\ y)$ пен $(u,\ v)$

болсын. XOY координат жүйеде l қисық сызықпен шектелген тұйық квадратталатын D, ал UOV координат жүйеде l' қисық сызықпен шектелген тұйық квадратталатын D' облыстары берілсін (*10.12-сурет*).

D' облыста анықталған

$$x = \varphi(u,v), y = \psi(u,v), (u,v) \in D' \tag{10.16}$$

функциялары берілсін және ол D' облыстың барлық (u,v) нүктелеріне D облыстың барлық (x,y) нүктелерін түгелдей қамтитын сәйкестік қойсын.



10.12-сурет

Демек, (10.16) функция D' облысты D облысқа бейнелеуді анықтайды. Осы бейнелеу төмендегі шарттарды қанағаттандырсын:

(10.16) бейнелеу өзара бірмәнді бейнелеу болсын, яғни D' облыстың әртүрлі (u,v) нүктесіне D облыстан әртүрлі (x,y) нүкте сәйкес қойылған.

D' облыста $\varphi(u,v)$ мен $\psi(u,v)$ функцияларының бірінші ретті үзіліссіз дербес туындылары бар болсын.

$\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{vmatrix}$ якобиан анықтауыш D' облыстың барлық нүктелерінде нөлге тең емес болсын.

Сонымен, D облыстың әрбір (x,y) нүктесіне D' облыстың әрбір (u,v) нүктесі, ал D' облыстың әрбір (u,v) нүктесі D облыстың әрбір (x,y) нүктесіне сәйкес келеді. Бұл жағдайда, (10.16) функция UOV жазықтықтағы D' облысты XOY жазықтығындағы D облысқа бейнелеу деп аталады, ал D облыс D' облыстың бейнесі, ал D' облыс D облыстың түп бейнесі деп аталады.

Демек, D' облысты D облысқа бейнелеу бірмәнді болғандықтан, D облыста u мен v-ге тәуелді (10.16) теңдеудің тек бір ғана шешімі бар:

$$u = \varphi_l(x, y), v = \psi(x, y) \tag{10.17}$$

және якобиан анықтауышындағы дербес туындылар үзіліссіз болғандықтан, якобиан анықтауышы D' облыста өзінің таңбасын сақтайды әрі (10.16) бейнелеу мен оған кері (10.17) бейнелеулердің якобиан анықтауыштары арасында мына қатынас орындалады:

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = 1.$$

Енді D' облыста $u = u_0$ түзуін қарастырайық. Осы түзуге D облыста

$$x = \varphi(u_0, v), y = \psi(u_0, v) \tag{10.18}$$

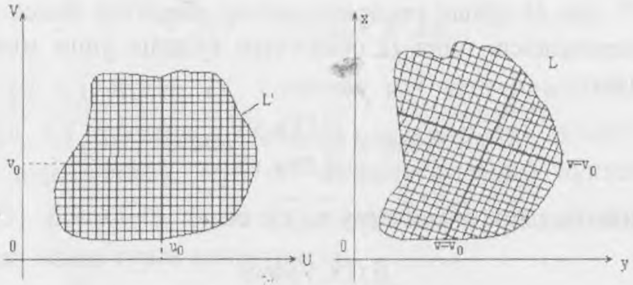
параметр теңдеуімен анықталатын тегіс қисық сызық сәйкес келеді, мұндағы v-параметр (*10.13-сурет*). Осы сияқты, D' облысындағы $v = v_0$ түзуге D облыста

$$x = \varphi(u, v_0), y = \psi(u, v_0) \tag{10.19}$$

параметр теңдеуімен анықталатын тегіс қисық сызық сәйкес келеді, мұндағы u-параметр (*10.33-сурет*). D' облысындағы координат осьтеріне параллель түзулерді (10.16) бейнелеумен D облыстағы (10.18) бен (10.19) қисық сызықтарына бейнеленгендегі осы қисық сызықтар u мен v-ның координат сызықтары деп аталады. (10.16) бейнелеу өзара бірмәнді бейнелеу болғандықтан, тек бір ғана (10.18) қисық сызық D облысының әрбір (x, y) нүктесінен өтеді және v_0 тұрақты мәнге сәйкес келетін тек бір ғана (10.19) қисық сызық өтеді.

Сондықтан тұрақты u_0 мен v_0 мәндерді D облысының нүктелерінің координаттары ретінде қарастыруға болады әрі бұл нүктелерден өтетін түзу сызықтар емес қисық сызықтар болады. D облысындағы тұрақты u_0 мен v_0 мәндерін осы облыстағы $M_0(u_0, v_0)$ нүктенің қисық сызықты координаттары деп аталады (*10.13-сурет*).

Сонымен, D' облысты D облысқа бейнелегенде D' облыстағы тіктөртбұрыш D облысындағы қисық сызықты төртбұрышқа бейнеленеді. Сондықтан (10.16) формуланы ескі тік бұрышты (x, y) координатты жаңа қисық сызықты (u, v) координатқа көшіретін формула ретінде қарастыруға болады. Осы сияқты, D облыстың l шекарасына бейнеленеді, ал ішкі нүкте ішкі нүктеге бейнеленеді.



10.13-сурет

Қисық сызықты координат ретінде (ρ,φ) поляр координатты қарастыруға болады (*10.14-сурет*). Поляр координатымен (x,y) тікбұрышты координат арасындағы байланыс мына формула арқылы беріледі (*10.14 а-сурет*):

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ 0\le\rho<\infty, 0\le\varphi<2\pi. \qquad (10.20)$$

Поляр координатында координат қисық сызықтары центрі координаттың бас нүктесі болатын, ал радиустары осы центрден шығатын сәуле болатын концентрлі шеңберлер ($\rho-const,\varphi-const$, *10.14 ә-сурет*). Енді декарт координаттан поляр координатына көшердегі якобиан анықтауышын есептейік:

$$I(u,v)=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\rho} & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \dfrac{\partial y}{\partial\rho} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{vmatrix}=\rho\ne 0, \qquad (10.21)$$

а) ә)

10.14-сурет

яғни якобиан анықтауыш $x=0, y=0$ нүктеден өзге барлық нүктелерде нөлге тең емес.

Егер D' пен D тұйық квадратталатын облыстар болса және I-III шарттар орындалса, онда D облыстың ауданы үшін мына теңдік орындалады:

$$S = \iint_D dxdy = \iint_{D'} \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| dudv. \qquad (10.22)$$

Енді айнымалыны алмастыруды екі еселі

$$\iint_D f(x,y)dxdy \qquad (10.23)$$

интегралға қолданайық.

10.6-теорема. Егер D және D' тұйық квадратталатын облыстар, $f(x,y)$ функция ауданы нөлге тең жиындардың нүктелерінен өзге D облыста шектелген және үзіліссіз, ал (10.16)-бейнелеу I–III шарттарды қанағаттандырсын, онда мына теңдік орындалады:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\left|I(u,v)dudv\right| \qquad (10.24)$$

Бұл формула екі еселі интегралдағы айнымалыны алмастыру формуласы деп аталады.

Дәлелдеуі. D' облысты l'_i бөлікті – тегіс қисық сызықтармен D'_i бөліктерге бөлейік. D' облыстағы l'_i бөлікті – тегіс қисық сызықтарға D облыстан сәйкес келетін l_i бөлікті – тегіс қисық сызықтар D облысты D_i бөліктерге бөледі және D облыстағы әр бөліктердің ауданы ΔS_i болсын. Осы D_i бөліктерден кез келген (x_i, y_i) нүкте алып, (10.23) интегралдың интеграл қосындысын қарастырайық: $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\cdot\Delta S_i$ және әрбір D_i бөліктің ауданын (10.22) формуланы пайдаланып анықтайық:

$$\Delta S_i = \iint_{D_i} \left|I(u,v)\right| dudv.$$

Енді соңғы интегралға екі еселі интегралдың орта мәні туралы теореманы қолданайық (*10.3-тақырып, 6-қасиет*):

$$\Delta S_i = \left|I(\overline{u_i}, \overline{v_i})\right|\cdot\Delta\sigma_i,$$

мұндағы $\Delta\sigma_i$ D'_i бөліктің ауданы, $(\overline{u_i}, \overline{v_i})$ нүкте D'_i бөліктегі кез келген нүкте. Осыдан және екі еселі интегралдың интеграл қосындысынан:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\left|I(\overline{u_i}, \overline{v_i})\right| \cdot \Delta\sigma_i,$$

мұндағы $(\overline{u_i}, \overline{v_i})$ нүкте D'_i бөліктің кез келген нүктесі болғандықтан, $(\overline{u_i}, \overline{v_i})$ нүктені $x_i = \varphi(\overline{u_i}, \overline{v_i}), y_i = \psi(\overline{u_i}, \overline{v_i})$ теңдігі орындалатындай етіп алайық, яғни D_i бөліктегі (x_i, y_i) нүктеге сәйкес келетін D'_i бөліктегі нүкте $(\overline{u_i}, \overline{v_i})$ нүкте болсын, онда интеграл қосындыны мына түрге өрнектеледі:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\overline{u_i}, \overline{v_i}), \psi(\overline{u_i}, \overline{v_i})) \cdot \left|I(\overline{u_i}, \overline{v_i})\right| \cdot \Delta\sigma_i. \qquad (10.25)$$

Бұл қосынды екі еселі

$$\iint_{D'} f(\varphi(u,v), \psi(u,v))\left|I(u,v)\right| du dv \qquad (10.26)$$

интегралдың D' облыстағы интеграл қосындысы болады, ал бұл екі еселі интеграл бар, себебі интеграл астындағы функция D' облыста шектелген және үзіліссіз. Енді D' облысты шексіз көп бөліктерге бөлейік, сонда әрбір бөліктің λ диаметрі нөлге ұмтылады, онда (10.25) интеграл қосынды $\lambda \to 0$ болғанда, біріншіден, (10.23) екі интегралға, ал екіншіден, (10.26) интегралға ұмтылады. Демек, ол интегралдар тең, яғни (10.24) теңдік орындалады. Дәлелденді.

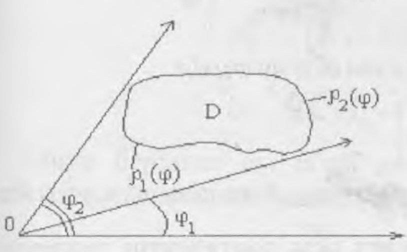
Егер (10.23) екі еселі интегралға (10.20) алмастыруды қолдансақ, онда

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_{D'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho a\rho d\varphi$$

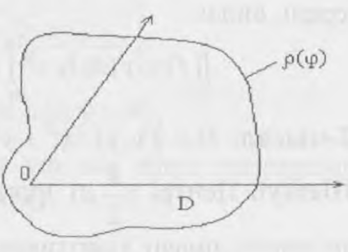
теңдігі орындалады.

Егер поляр координат жүйесінің полюсі D облысының сыртқы нүктесі болса (*10.15-сурет*), онда екі еселі интегралды мына формуламен есептейміз:

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) d\rho.$$



10.15-сурет

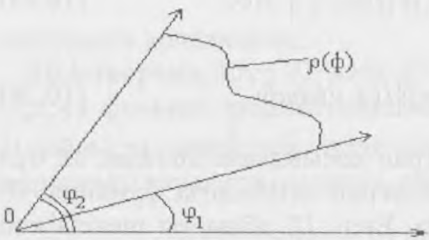


10.16-сурет

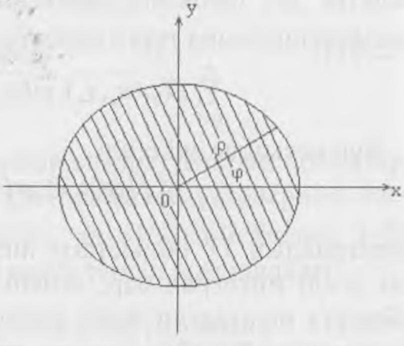
Егер поляр координат жүйенің полюсі D облысының ішкі нүктесі болса (*10.16-сурет*), онда:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho.$$

Егер поляр координат жүйенің полюсі D облысының шекарасына тиісті болса (*10.17-сурет*), онда:



10.17-сурет



10.18-сурет

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho.$$

Төмендегі мысалдарда $I = \iint_D f(x,y)dxdy$ интегралды поляр координат жүйесіне көшірейік.

1-мысал. $D = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \le R^2\right\}$.

Шешуі. Алдымен декарт координатындағы $x^2 + y^2 \le R$ дөңгелектің теңдеуінен поляр координаттағы теңдеуін алайық (*10.18-сурет*):

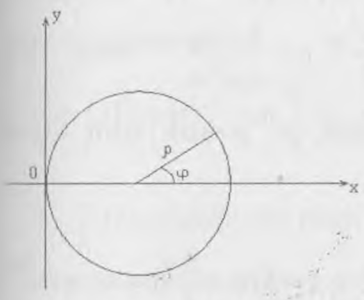
$$\rho^2 \cos^2\varphi + \rho^2 \sin^2\varphi \le R^2, \rho \le R.$$

Демек, поляр координаттағы дөңгелектің теңдеуі $\rho \le R$ болады, яғни ρ-ның мәні 0-ден R-ге дейін, ал φ-дің мәні 0-ден 2π-ге дейін өзгереді, онда:

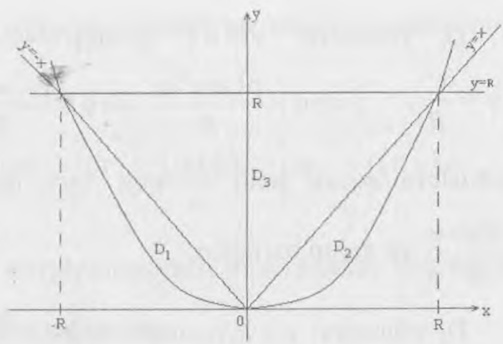
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho.$$

2-мысал. $D = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \le Rx\right\}$.

Шешуі. Центрі $(\frac{R}{2},0)$ нүкте, ал радиусы R-ге тең $x^2 + y^2 \le Rx$ дөңгелектің поляр координат жүйедегі осы дөңгелектің теңдеуін табайық (*10.19-сурет*):



10.19-сурет



10.20-сурет

$$\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi \leq R\rho \cos \varphi, \rho^2 \leq R\rho \cos \varphi.$$

Осыдан $\rho \leq R\cos\varphi$ – поляр координат жүйедегі дөңгелектің теңдеуі болады.

Онда ρ-ның мәні 0-ден $\rho\cos\varphi$-ның бірге дейін өзгереді, ал φ-дің мәні $-\frac{\pi}{2}$ - ден $+\frac{\pi}{2}$ - ге дейін өзгереді, яғни

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{R\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho.$$

3-мысал. $D = \left\{(x,y): -R \leq x \leq R, \frac{x^2}{R} \leq y \leq R\right\}.$

Шешуі. D облысты $y = x$ және $y = -x$ түзулері арқылы үш тұйық облыстарға бөлеміз (*10.20-сурет*):

$$D_1 = \left\{(x,y): -R \leq x \leq 0, \frac{x^2}{R} \leq y \leq -x\right\},$$

$$D_2 = \left\{(x,y): 0 \leq x \leq R, \frac{x^2}{R} \leq y \leq x\right\},$$

$$D_3 = \left\{(x,y): -R \leq x \leq R, |x| \leq y \leq R\right\}.$$

Онда берілген екі еселі интеграл үш екі еселі интегралдың қосындысынан анықталады (*10.20-сурет*):

$$I = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy + \iint_{D_3} f(x,y)dxdy.$$

D_1 облыста: $y=-x$, $\rho\cos\varphi=-\rho\sin\varphi, ctg\varphi=-1, \varphi=arcctg(-1)$, $y=\dfrac{x^2}{R}$, $\rho\, sin\,\varphi=\dfrac{\rho^2 cos^2\varphi}{R}$, $sin\,\varphi=\dfrac{\rho\, cos^2\varphi}{R}, \rho=\dfrac{R\, sin\,\varphi}{cos^2\varphi}$, яғни D_1 облыста φ-дің мәні $\dfrac{3\pi}{4}$-пен π-ге дейін, ал ρ-ның мәні 0-ден $\dfrac{R\, sin\,\varphi}{cos^2\varphi}$-ге дейін өзгереді;

D_3 облыста: $y=R, \rho\, cos\,\varphi= R, \rho=\dfrac{R}{cos\,\varphi}, y=x, \varphi=\dfrac{\pi}{4}, y=-x, \varphi=\dfrac{3\pi}{4}$, яғни D_3 облыста φ-дің мәні $\dfrac{\pi}{4}$-тен $\dfrac{3\pi}{4}$-ке дейін өзгереді, ал ρ-ның мәні 0-ден $\dfrac{R}{cos\,\varphi}$-ге дейін өзгереді;

D_2 облыста: $y=x, \rho\, cos\,\varphi=\rho\, sin\,\varphi,$ $tg\varphi=1, \varphi=\dfrac{\pi}{4},$ $y=x, \varphi=\dfrac{\pi}{4}$, $y=-x,$ $\varphi=\dfrac{3\pi}{4}$, яғни D_2 облыста φ-дің мәні 0-ден $\dfrac{\pi}{4}$-ке дейін, ал ρ-ның мәні 0-ден $\dfrac{R\, sin\,\varphi}{cos^2\varphi}$-ге дейін өзгереді. Сонымен:

$$I=\int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{R\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho +$$

$$+\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{R}{\cos\varphi}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho +$$

$$+\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{R\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho.$$

Тапсырмалар

1. Екі еселі интегралдарды берілген облыста есептеңдер:

$\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{(x+y)^2}$, $y=0, y=1-x^2$; $\iint\limits_D \dfrac{x^2}{y^2}dxdy, x=2, y=x, y=\dfrac{1}{x}$; $\iint\limits_D \dfrac{x}{y^2}dxdy$, $y=x,$ $y=9x, y=\dfrac{1}{x}$; $\iint\limits_D \dfrac{x^3}{y}dxdy,$ $y=4,$ $y=x^2, y=\dfrac{x^2}{4}$.

2. $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ екі еселі интегралдардың интегралдау шектерін алмастырыңдар:

$$\int\limits_2^4 dx\int\limits_2^x f(x,y)dy;\quad \int\limits_0^1 dy\int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx;\quad \int\limits_0^3 dx\int\limits_0^{9-x^2} f(x,y)dy;\quad \int\limits_0^2 dy\int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{5-y^2}} f(x,y)dx\cdot$$

3. $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ екі еселі интегралдардың интегралдау шектерін поляр координат жүйеге көшіп табыңдар:

$$D: x^2+y^2\le 9;\qquad D: x^2+y^2\le 1, y\ge 0;$$

$$D: x^2+y^2\le 4, y\ge x, y\le\sqrt{3}x;\qquad D:(x-1)^2+y^2\le 1;$$

$$D:(y-2)^2+x^2\le 4.$$

10.6. Екі еселі интегралды физика және механика есептеріне қолдану

Біз *10.1-тақырыпта*, $\overline{V}$ дене жоғарыдан $z=f(x,y)$ бетпен, төменнен D облыспен, ал бүйір беті цилиндрмен (жасаушылары Oz осіне параллель) шектелсе, яғни $\overline{V}=\{(x,y,z):(x,y)\in D,$ $0\le z\le f(x,y)\}$, онда $\overline{V}$ дененің көлемін интеграл қосындыдан шекке көшіп анықтадық:

$$V=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i,\overline{y}_i)\cdot\Delta D_i=\iint\limits_D f(x,y)dxdy,$$

мұндағы ΔD_i таңба – D облысты бөліктерге бөлгендегі D_i бөліктердің ауданы.

Квадратталатын D облыстың ауданын да екі еселі интеграл көмегімен есептеуге болады:

$$S=\iint\limits_D dxdy=\iint\limits_{D'}\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|dudv.$$

Егер $D=\{(x,y): a\le x\le b, 0Ky\le f(x)\}$ болса, онда қисық сызықты D трапецияның ауданын

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_0^{f(x)} dxdy=\int\limits_a^b f(x)dx$$

формуламен есептеуге болады.

Енді екі еселі интеграл көмегімен физика және механика есептерін шығаруды қарастырайық. Бізге xOy жазықтығында D пластинка берілсін және оның тығыздығы $\mu(x, y)$ болсын.

а) Пластинканың массасы. Берілген пластинканың тығыздығы бойынша оның массасын табайық. Ол үшін $\mu(x,y)$ тығыздығы x және y айнымалары бойынша D облыста үзіліссіз болсын. Облысты еркімізше D_i бөліктерге бөлейік әрі әрбір D_i бөліктен кез келген $P_i\left(\overline{x}_i, \overline{y}_i\right)$ нүкте алайық. Онда әрбір D_i бөліктердің массасы жуық шамамен, $\mu\left(\overline{x}_i, \overline{y}_i\right)\cdot \Delta D_i$ көбейтіндіге тең, ал барлық пластинканың массасы $D_1, D_2, ..., D_n$ бөліктердің массаларының қосындысына тең, яғни

$$m = \sum_{i=1}^{n} \mu\left(\overline{x}_i, \overline{y}_i\right)\cdot \Delta D_i,$$

мұндағы ΔD_i таңба D_i бөліктің ауданы. Пластинканың дәл массасын табу үшін, D облысты жеткілігінше кіші бөліктерге бөлеміз де, интеграл қосындыдан шекке көшіп анықтаймыз:

$$m = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(\overline{x}_i, \overline{y}_i)\cdot \Delta D_i = \iint_D \mu(x,y)dxdy \qquad (10.27)$$

ә) Пластинканың ауырлық центрінің координаттары. Берілген D облысты (пластинканы) D_i бөліктерге бөлейік және әрбір D_i бөліктерден $P_i\left(\overline{x}_i, \overline{y}_i\right)$ нүкте алайық $(i = \overline{1,n})$. Әрбір D_i бөліктің массасы жуық шамамен $P_i\left(\overline{x}_i, \overline{y}_i\right)\cdot \Delta D_i$ көбейтіндіге тең. Егер әрбір D_i бөліктің массасы бір $P_i\left(\overline{x}_i, \overline{y}_i\right)$ нүктеге шоғырланса, онда пластинканың ауырлық центрінің координаттары жуық шамамен мына формуладан анықталады:

$$x_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i \mu\left(\overline{x}_i, \overline{y}_i\right)\cdot \Delta S_i}{\sum_{i=1}^{n} \rho\left(\overline{x}_i, \overline{y}_i\right)\cdot \Delta S_i}, \qquad y_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{y}_i \mu\left(\overline{x}_i, \overline{y}_i\right)\cdot \Delta S_i}{\sum_{i=1}^{n} \rho\left(\overline{x}_i, \overline{y}_i\right)\cdot \Delta S_i}.$$

Пластинканың ауырлық центрінің дәл координаттарын шекке көшіп табамыз:

$$x_0 = \frac{\iint_D x\mu(x,y)dxdy}{\iint_D \mu(x,y)dxdy}, \qquad y_0 = \frac{\iint_D y\mu(x,y)dxdy}{\iint_D \mu(x,y)dxdy}. \qquad (10.28)$$

Егер пластинка біртекті, яғни $\mu(x,y) = 1$ болса, онда оның ауырлық центрінің координаттарын мына формуладан анықтаймыз:

$$x_0 = \frac{\iint\limits_D x dx dy}{m}, \quad y_0 = \frac{\iint\limits_D y dx dy}{m}, \tag{10.29}$$

мұндағы m – пластинканың массасы.

б) Пластинканың инерция моменттері. D облысты D_i бөліктерге бөлеміз, әрбір бөліктен $P_i(\overline{x}_i, \overline{y}_i)$ нүктені таңдап аламыз және массасы $P_i(\overline{x}_i, \overline{y}_i)$ нүктеге шоғырланған пластинканы $\mu(\overline{x}_i, \overline{y}_i) \cdot \Delta D_i$ массалар жүйесіне алмастырамыз. Онда массалар жүйесінің инерция моменттері жуық шамамен мына формуладан анықталады:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i^{\,2} \mu(\overline{x}_i, \overline{y}_i) \cdot \Delta D_i .$$

Осыдан шекке көшіп, D пластинканың oY осі бойынша инерция моментін табамыз:

$$J_y = \iint\limits_D x^2 \mu(x, y) dx dy . \tag{10.30}$$

Осылайша, пластинканың oX осі бойынша инерция моментін анықтаймыз:

$$J_x = \iint\limits_D y^2 \mu(x, y) dx dy . \tag{10.31}$$

Осы сияқты, координат осінің бас нүктесі бойынша пластинканың инерция моментін табамыз:

$$J = J_x + J_y = \iint\limits_D (x^2 + y^2) \mu(x, y) dx dy . \tag{10.32}$$

в) Пластинканың статикалық моменттері. Жоғарыдағыдай, oX және oY осьтері бойынша пластинканың сәйкес статикалық моменттерін анықтауға болады:

$$M_x = \iint\limits_D y \mu(x, y) dx dy , \quad M_y = \iint\limits_D x \mu(x, y) dx dy .$$

г) Беттің ауданы. Егер тегіс қисық сызықты бет $z = f(x, y)$ функциямен берілсе, онда осы беттің ауданы мына формуладан анықталады:

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \, dx dy , \tag{10.33}$$

мұндағы D – берілген $z = f(x, y)$ беттің xOy жазықтығындағы проекциясы.

Егер бет параметр теңдеуімен берілсе: $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $z = \chi(u, v)$, онда оның ауданы:

$$S = \iint_D \sqrt{AB - C^2}\, dudv \qquad (10.34)$$

формуласымен есептелінеді, мұндағы φ, ψ, χ үзіліссіз дифференциалданатын функциялар D облыста,

$$A = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial u}\right)^2,$$

$$B = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial v}\right)^2,$$

$$C = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \chi}{\partial u}\cdot\frac{\partial \chi}{\partial v}.$$

1-мысал. $y = \frac{x^2}{a}$, $y = 2a - x$, $a > 0$ қисық сызықтармен анықталған біртекті пластинканың ауырлық центрінің координаттарын табайық (*10.21-сурет*).

Шешуі. $y = \frac{x^2}{a}$-параболамен $y = 2a - x$-түзуінің қиылысу нүктелерін табайық: $\frac{x^2}{a} = 2a - x,\ x^2 + ax - 2a^2 = 0,$

$$x_{1/2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 8a^2}}{2} = \frac{-a \pm 3a}{2},\ x_1 = a,\ x_2 = -2a.$$

Параболамен түзу $(-a; a)$ және $(-2a; 4a)$ нүктелерде қиылысады. Демек, пластинка жоғарыдан $y = 2a - x$-түзуімен, төменнен $y = \frac{x^2}{a}$-параболамен шектелген:

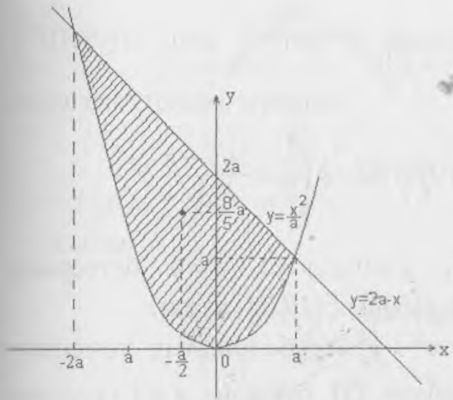
$$D = \left\{(x, y): -2a \le x \le a, \frac{x^2}{a} \le y \le 2a - x\right\},$$

онда пластинканың массасы

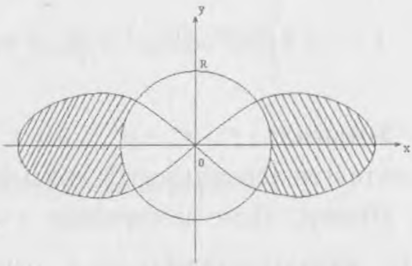
$$(\rho(x,y) = 1):\ m = \int_{-2a}^{a} dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} dy = \int_{-2a}^{a} y \Big|_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} dx =$$

$$= \int_{-2a}^{a} \left(2a - x - \frac{x^2}{a}\right) dx = \left(2ax - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3a}\right)\Bigg|_{-2a}^{a} = \frac{9}{2}a^2.$$

Ауырлық центрінің координаттарын (10.29) формуласымен есептейміз:



10.21-сурет



10.22-сурет

$$x_0 = \frac{2}{9a^2}\int_{-2a}^{a} x dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} dy = -\frac{a}{2},\ y_0 = \frac{2}{9a^2}\int_{-2a}^{a} dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} y dy = \frac{8}{5}a.$$

2-мысал. $\left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2-y^2\right),\ x^2+y^2 \geq a^2$ қисық сызықтармен шектелген фигураның ауданын есептейік (*10.22-сурет*).

Шешуі. Декарт координат жүйеден поляр координат жүйеге көшейік:

$$x = \rho\cos\varphi,\ \ y = \rho\sin\varphi,$$

$$\left(\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi\right)^2 = 2a^2\left(\rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi\right),$$

$$\rho^4 = 2a^2\rho^2\cos 2\varphi,\ \rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi,\ \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = a^2,$$

$$\rho^2 = a^2.$$

Сонымен, $\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi$ поляр координат жүйедегі лемнискат Бернулли теңдеуі, ал $\rho = a$ шеңбердің теңдеуі. Енді осы қисық сызықтардың қиылысу нүктелерін табайық:

$$a^2 = 2a^2\cos 2\varphi,\ 2\cos 2\varphi = 1,\ \cos 2\varphi =$$

$$= \frac{1}{2},\ \varphi = \pm\frac{\pi}{6},\ \rho = \pm a.$$

Сонда

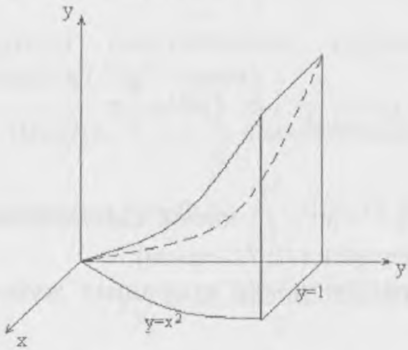
$$a \leq \rho \leq a\sqrt{2\cos 2\varphi},\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6},$$

$$S = 4\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_{a}^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} \rho d\rho = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \rho^2 \Big|_{a}^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} d\rho =$$

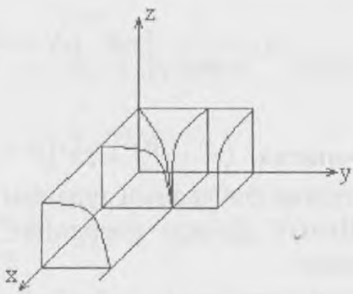
$$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \left(2a^2\cos 2\varphi - a^2\right) d\varphi = 2a^2\left(\sin 2\varphi - \varphi\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}a^2 \cdot$$

3-мысал. $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $x = 0$, $y = 1$ $z = 0$ беттермен шектелген дененің жарты көлемін табайық (*10.23-сурет*).

Шешуі. Дене жоғарыдан $z = x^2 + y^2$ параболоидпен, төменнен xOy жазықтығындағы $y = x^2$ парабола, OY осі және $y = 1$ түзуімен шектелген, яғни



10.23-сурет



10.24-сурет

$$D = \left\{(x,y): y = x^2,\ y = 1,\ x = 0\right\}$$

Онда:

$$V = \iint_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{1} \left(x^2 + y^2\right) dy = $$

$$= \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{x^2}^{1} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3}\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}x - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{44}{105}.$$

4-мысал. $a^2 = x^2 + z^2$, $a^2 = z^2 + y^2$ беттермен шектелген дене бетінің ауданын есептейік (*10.24-сурет*).

Шешуі. Дене бетінің ауданын $S = \iint\limits_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\, dxdy$ формуламен есептейміз, мұндағы

$$z = f(x,y) = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad z'_x = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},\ z'_y = 0,\ 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le x.$$

Осыдан

$$S = 16\int_0^a \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}}\, dx \int_0^x dy = 16\int_0^a \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx \int_0^x dy =$$

$$= 16a\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot y \Big|_0^x dx = 16a\int_0^a \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$$

$$= -16a\sqrt{a^2 - x^2}\Big|_0^a = 16a^2.$$

5-мысал. $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$, $x = 0$, $y = 0, 0 \le x \le a$ қисық сызықтармен шектелген фигураның Ox және Oy осьтері бойынша инерция моменттерін анықтайық ($\rho(x,y) = 1$).

Шешуі. Фигура $D = \{(x,y): 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le a - \sqrt{2ax - x^2}\}$. Онда:

$$J_x = \iint\limits_D y^2 dxdy = \int_0^a dx \int_0^{a - \sqrt{2ax - x^2}} y^2 dy =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^a y^3 \Big|_0^{a - \sqrt{2ax - x^2}} dx = \frac{1}{3}\int_0^a \left(a - \sqrt{2ax - x^2}\right)^3 dx.$$

Соңғы интегралға $x = 2a\sin^2 t$ алмастыруын қолданайық, сонда:

$$x = 0,\ t_0 = 0;\ x = a,\ t_a = \frac{\pi}{4};\ dx = 2a\sin 2t dt.$$

Онда:

$$J_x = \frac{2a}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(a - \sqrt{4a^2 \sin^2 t - \sin^4 t}\right)^3 \sin 2t dt = \frac{2a^4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sin 2t)^3 \sin 2t dt =$$

$$= \frac{a^4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sin 2t)^3 \sin 2t dt = \frac{a^4}{16}(16 - 5\pi).$$

$$J_y = \iint\limits_D x^2 dxdy = \int_0^a dy \int_0^{a - \sqrt{2ay - y^2}} x^2 dx = \frac{a^4}{16}(16 - 5\pi).$$

Сұрақтар мен тапсырмалар

Берілген қисық сызықтармен шектелген фигураның ауданын табыңдар;

$$y=\frac{9}{x},\ y=x,\ x=6;\quad y=x^2,\ x+y=6;\quad y^2=-x+4,\ y^2=2x-5$$

2. 1-октанта орналасқан $6x+3y+2z=12$ беттің ауданын табыңдар.

10.7. Үш еселі интегралдың анықтамасы

Жоғарыда екі еселі интегралдың анықтамасын фигураның ауданы арқылы бердік, ал үш еселі интегралдың анықтамасы кеңістіктегі дененің көлемі арқылы беріледі. Кеңістікте кез келген $\overline{V}$ денені қарастырайық. $\overline{V}$ дененің ішіне көпжақты денелер орналассын, осы денелердің көлемдерінің дәл жоғарғы шегі $\overline{V}$ дененің ішкі көлемі деп аталады, ал ең төменгі шегі $\overline{V}$ дененің сыртқы көлемі деп аталады. Егер $\overline{V}$ дененің ішіне бірде-бір денені орналастыра алмасақ, онда дененің ішкі көлемі нөлге тең дейміз. Егер дененің ішкі мен сыртқы көлемдері тең болса, онда ол $\overline{V}$ дененің көлемі деп аталады, ал дененің өзі кубталатын дене деп аталады. Біз төменде тек кубталатын денелерді ғана қарастыратын боламыз.

Бізге кубталатын $\overline{V}$ денеде шектелген $f(x,y,z)$ функция берілсін. Берілген денені кіші $\overline{V}_i$ бөліктерге (денелерге) бөлейік, осы бөліктерден еркімізше $P_i(\overline{x}_i,\overline{y}_i,\overline{z}_i)=P_i$ нүктелерді алайық және

$$J(\overline{V}_i,P_i)=\sum_{i=1}^{n}f(\overline{x}_i,\overline{y}_i,\overline{z}_i)\cdot\Delta v_i \tag{10.35}$$

қосындыны қарастырайық, мұндағы Δv_i-кіші $\overline{V}_i$ бөліктердің көлемі. $\overline{V}_i$ дененің диаметрін λ_i деп белгілейік және $\lambda=\max_i\{\lambda_i\}$ болсын.

Анықтама. Егер кез келген $\varepsilon.>0$ саны үшін $\delta>0$ саны табылып, $\lambda<\delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық λ үшін $|J(\overline{V}_i,\ P_i)-J|<\varepsilon$ теңсіздігі орындалсын. Демек, $|J(\overline{V}_i,P_i)-J|<\varepsilon$ теңсіздігі $\lambda<\delta$ теңсіздігі орындалатындай $\overline{V}$ денені кез келген бөліктеулерге бөлгеннен және $P_i(\overline{x}_i,\overline{y}_i,\overline{z}_i)$ нүктені таңдап алғаннан тәуелсіз болады. Егер $\lambda\to0$ болғанда (10.35) интеграл қосындының шегі бар болса, онда ол шек $f(x,y,z)$ функцияның $\overline{V}$ дене бойынша алынған үшінші ретті интегралы деп аталады және ол былай белгіленеді:

$$J = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(\overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i\right) \cdot \Delta v_i = \iiint_{\overline{V}} f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iiint_{\overline{V}} f(x,y,z)dv$$

Бұл жағдайда, $\overline{V}$ денеде $f(x,y,z)$ функция интегралданады деп аталады.

Бізге бір немесе екі айнымалы шектелген функциялардың барлығы да интегралданбайтыны белгілі. Сондықтан үш еселі интегралдың интегралдануының жеткілікті белгісін табу үшін бір немесе екі еселі интегралдарда қарастырылғандай, Дарбудың жоғарғы және төменгі қосындыларын қарастырайық. Ол үшін шектелген $f(x,y,z)$ функция кубталатын $\overline{V}$ облыста берілсін және $\overline{V}$ облысты $\overline{V}_i$ бөліктерге бөлейік, ал M_i мен m_i сандары $f(x,y,z)$ функцияның $\overline{V}_i$ бөліктердегі сәйкес ең жоғарғы мен ең төменгі мәндері болсын. Онда

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta v_i, \quad s = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta v_i$$

қосындылары сәйкес Дарбудың жоғарғы, төменгі қосындылары деп аталады.

Екі еселі интегралға орындалатын *10.1–10.2 теоремалар* үш еселі интегралға да орындалады.

10.7-теорема. Кубталатын $\overline{V}$ облыста шектелген $f(x,y,z)$ функциясы интегралдануы үшін кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін облысты бөліктейтін бөліктеу табылып, $S - s < \varepsilon$ теңсіздігінің орындалуы қажет әрі жеткілікті.

10.9-теорема. Егер шектелген $f(x,y,z)$ функциясы кубталатын $\overline{V}$ облыстың көлемі нөлге тең жиындарынан өзге нүктелердің бәрінде үзіліссіз болса, онда функция $\overline{V}$ облыста интегралданады.

Екі еселі интегралға орындалатын негізгі қасиеттер үш еселі интегралға да орындалады.

1-қасиет. Егер $f(x,y,z)$ пен $\varphi(x,y)$ функциялары $\overline{V}$ облыста интегралданса және $c_1, c_2 - const$ болса, онда $c_1 f(x,y,z) \pm c_2 \varphi(x,y,z)$ функция да осы облыста интегралданады және

$$\iiint_{\overline{V}} (c_1 f(x,y,z) \pm c_2 f(x,y,z))dv = c_1 \iiint_{\overline{V}} f(x,y,z)dv \pm$$

$$\pm c_2 \iiint\limits_{\bar{V}} f(x, yz) dv.$$

2-қасиет. Егер $f(x, y, z)$, $\varphi(x, y, z)$ функциялары $\bar{V}$ облыста интегралданса, онда $f(x, y, z) \cdot \varphi(x, y, z)$ функция да осы облыста интегралданады.

3-қасиет. Егер $\bar{V}_1$ мен $\bar{V}_2$ облыстардың ішкі нүктелері ортақ болмаса және $f(x, y, z)$ функция осы облыстардың әрқайсысында да интегралданса, онда функция $\bar{V} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2$ облыста интегралданады және

$$\iiint\limits_{V} f(x, y, z) dv = \iiint\limits_{V_1} f(x, y, z) dv + \iiint\limits_{V_2} f(x, y, z) dv.$$

4-қасиет. Егер $f(x, y, z)$ және $\varphi(x, y, z)$ функциялары $\bar{V}$ облыста интегралданса әрі $f(x, y, z) \leq \varphi(x, y, z)$ теңсіздігі орындалса, онда

$$\iiint\limits_{V} f(x, y, z) dv \leq \iiint\limits_{V} \varphi(x, y, z) dv.$$

5-қасиет. Егер $f(x, y, z)$ функциясы $\bar{V}$ облыста интегралданса, онда $| f(x, y, z) |$ функция да осы облыста интегралданады және

$$\left| \iiint\limits_{V} f(x, y, z) dv \right| \leq \iiint\limits_{V} | f(x, y, z) | dv.$$

6-қасиет (орта мән туралы теорема). Егер $f(x, y, z)$ функция $\bar{V}$ облыста интегралданса және $m \leq f(x, y, z) \leq M$ теңсіздігі орындалса, онда

$$mV \leq \iiint\limits_{\bar{V}} f(x, y, z) dv \leq MV$$

мұндағы V таңба – $\bar{V}$ облыстың көлемі.

Соңғы қасиетті мына түрде тұжырымдауға болады, егер $\bar{V}$ тұйық шектелген байланысты облыс және $f(x, y, z)$ функциясы осы облыста үзіліссіз болса, онда осы облыста $A(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ нүкте табылып, мына теңдік орындалады:

$$\iiint\limits_{\bar{V}} f(x, y, z) dv = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \cdot V.$$

10.8. Үш еселі интегралды есептеу

Бізге $\bar{V}$ облыста үш еселі интеграл берілсін:

$$\iiint\limits_{\bar{V}} f(x, y, z) dx dy dz. \qquad (10.36)$$

1. Үш еселі интегралдың интегралдау $\overline{V}$ облысы тікбұрышты параллелепипед болсын: $\overline{V}=\{(x,y,z): a\le x\le b, c\le y\le d, k\le z\le l\}$, онда тікбұрышты параллелепипедтің xOy жазықтығындағы проекциясы

$$D=\{(x,y): a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$$

тіктөртбұрышы болады.

10.10-теорема. Егер (10.36) үш еселі интеграл бар болса және D облысының тағайындалған кез келген $A(x,y)$ нүктесі үшін

$$J(x,y)=\int_k^l f(x,y,z)dz$$

интегралы бар болса, онда:

$$\iint_D J(x,y)dxdy=\iint_D dxdy\int_k^l f(x,y,z)dz \qquad (10.37)$$

интегралы да бар және мына теңдік орындалады:

$$\iiint_{\overline{V}} f(x,y,z)dxdydz=\iint_D dxdy\int_k^l f(x,y,z)dz. \qquad (10.38)$$

(10.37) теңдігі қайталама интеграл деп аталады. *10.10-теореманың* дәлелденуі *10.4-теореманың* дәлелдеуіндей.

2. Енді $\overline{V}$ облысы қисық сызық болсын, яғни облыс төменнен $z_1=z_1(x,y)$ жоғарыдан $z_2=z_2(x,y)$ беттерімен, бүйір жақтары цилиндрлік бетпен (жасаушылары Oz осіне параллель) шектелсін, ал $\overline{V}$ облыстың xOy жазықтығындағы проекциясы D болсын:

$$\overline{V}=\{(x,y,z): (x,y)\in D,\ z_1(x.y)\le z\le z_2(x,y)\},$$

мұндағы $z_1=z_1(x,y)$, $z_2=z_2(x,y)$ функциялары квадратталатын D облыста үзіліссіз.

10.11-теорема. $\overline{V}$ облыста $f(x,y,z)$ функцияның үш еселі интегралы бар болсын, D облысының тағайындалған кез келген $A(x,y)$ нүктесі үшін

$$J(x,y)=\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

интегралы бар болсын, онда қайталанған

$$\iint_D dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

интегралы бар және мына теңдік орындалады:

$$\iiint_{\overline{V}} f(x,y,z)dxdydz=\iint_D dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Дәлелдеуі. Дәлелдеу үшін $\overline{V}$ облысты Π-параллелепипедпен қоршайық:

$$\Pi = \{(x, y, z) : a \le x \le b,\ c \le y \le d,\ k \le z \le l\}.$$

Параллелепипедтің xOy жазықтығындағы проекциясы D' болсын ($D' \subset D$) және осы параллелепипедте көмекші

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y, z), (x, y, z) \in \overline{V}, \\ 0, \qquad (x, y, z) \notin \overline{V} \end{cases} \tag{10.39}$$

функцияны қарастырайық. Онда $f^*(x, y, z)$ фукциясы $\overline{V}$ облыста интегралданады және

$$\iiint\limits_{\Pi} f^*(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{\overline{V}} f(x, y, z)dxdydz\ . \tag{10.40}$$

Осы теңдікке (10.39) теңдікті пайдаланайық:

$$\iiint\limits_{\Pi} f^*(x, y, z)dxdydz = \iint\limits_{D} dxdy \int\limits_{k}^{l} f^*(x, y, z)dz\,. \tag{10.41}$$

Осыдан және (10.39) теңдіктен мына теңдікті аламыз:

$$\int\limits_{k}^{l} f^*(x, y, z)dz = \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz\,.$$

Соңғы теңдіктің мәні x пен y-ке тәуелді функция болады, ал ол D облыстан тыс жатқан нүктелер үшін нөлге тең, олай болса, ол функцияның D' облысы бойынша алынған екі еселі интегралы D облысы бойынша алынған екі еселі интегралына тең. Демек, (10.40), (10.41) формулаларын пайдаланып, соңғы теңдіктен дәлелдеу керек теңдікті аламыз:

$$\iiint\limits_{\overline{V}} f(x, y, z)dxdydz = \iint\limits_{D} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz\,.$$

Ескерту. Егер $J(x, y)$ интегралына теореманың шарттары орындалса, онда $\iint\limits_{D} J(x, y)dxdy$ интегралын мына түрде жазуға болады:

$$\iiint\limits_{\overline{V}} f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz\,.$$

Бұл жағдайда үш еселі интегралды есептеу үшін ішкі интегралдан бастап интегралдау қажет.

Мысал. $\overline{V}=\{(x,y,z): z=0, z=y, y=x^2, y=1\}$ облысында $\iiint\limits_{V} xy\sqrt{z}dxdydz$ интегралды есептейік.

Шешуі. $\overline{V}$ облыстың xOy жазықтығындағы проекциясы $D=\{(x,y): x=1,\ x=-1, y=x^2, y=1\}$ болады, яғни D облысы жоғарыдан $y=1$ түзуімен, төменнен $y=x^2$ параболамен, сол жағынан $x=-1$, оң жағынан $x=1$ түзулерімен шектелген. Онда

$$\iiint\limits_{\overline{V}} xy\sqrt{z}dxdydz=\int_{-1}^{1}xdx\int_{x^2}^{1}ydy\int_{0}^{y}\sqrt{z}dz=$$

$$=\frac{2}{3}\int_{-1}^{1}xdx\int_{x^2}^{1}yz^{\frac{3}{2}}\Big|_0^y dy=\frac{2}{3}\int_{-1}^{1}xdx\int_{x^2}^{1}y^{\frac{5}{2}}\Big|_0^y dy=$$

$$=\frac{2}{3}\frac{2}{7}\int_{-1}^{1}xy^{\frac{7}{2}}\Bigg|_{x^2}^{1}dx=\frac{4}{21}\int_{-1}^{1}x\left(1-|x|^7\right)dx=0.$$

Тапсырмалар

Үш еселі интегралдарды есептеңдер:

1. $\int_0^2 dx\int_0^3 dy\int_0^4 (x+y-z)dz$; 2. $\int_0^2 dx\int_0^x dy\int_0^y xyzdz$;

3. $\int_0^{\frac{1}{2}} dx\int_x^{2x} dy\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\ \ dz$.

10.9. Үш еселі интегралда айнымаларды алмастыру

Екі еселі интегралдағы айнымаларды алмастырғандай, үш еселі интегралдың айнымаларын алмастыруға болады, яғни ескі x, y, z айнымаларынан жаңа u, v, w айнымаларына

$$x=\varphi(u,v,w),\ y=\psi(u,v,w),\ z=x(u,v,w) \qquad (10.42)$$

функциялары арқылы көшеміз. Бұл жағдайда (10.42) формула бойынша $\overline{V}$ облыстың әрбір $A(x,y,z)$ нүктесіне $\overline{V}'$ облыстан $A'(u,v,w)$ нүктесі, ал $\overline{V}'$ облыстың әрбір $A'(u,v,w)$ нүктесіне $\overline{V}$ облыстан $A(x,y,z)$ нүкте сәйкес қойылсын. Осы сәйкестік (бейнелеу) *10.5-тақырыптағыдай* мына үш шартты қанағаттандырсын:

I. (10.42) бейнелеу өзара бірмәнді бейнелеу болсын;

II. $\overline{V}'$ облыста бірінші ретті үзіліссіз дербес туындылары бар болсын;

III. $\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}$ якобиан анықтауышы $\overline{V}'$ облыстың барлық нүктелерінде нөлге тең болмасын.

Екі еселі интегралдағыдай, (10.42) бейнелеу облыстың ішкі нүктелерін ішкі нүктелерге, ал шекара нүктелерін шекара нүктелеріне бейнелейді.

Сонда (10.42) алмастыру x, y, z айнымаларын u, v, w айнымаларына мына формула бойынша алмастырылады:

$$\iiint\limits_{\overline{V}} f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iiint f(\varphi(\cdot),\phi(\cdot))\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| dud\,vdw.$$

I. Цилиндрлік координаттар. Кеңістіктегі кез келген $M(x, y, z)$ нүктені алайық, ал $M'(x, y)$ нүкте $M(x, y, z)$ нүктенің xOy координат жазықтығындағы проекциясы болсын (*10.25-сурет*). ρ, φ, z сандары кеңістіктегі $M(x, y, z)$ нүктенің цилиндрлік координаттары деп аталады, мұндағы ρ, φ сандары M' нүктенің поляр координаттары. Онда, ескі x, y, z координаттан жаңа ρ, φ, z координаттарға көшу үшін

$$x = \rho\cos\varphi,\ x = \rho\sin\varphi,\ \ z = z \qquad (10.43)$$

алмастыруды пайдаланамыз, мұндағы $0 \le \rho < \infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$. Осы алмастырудың якобиан анықтауышын есептейік:

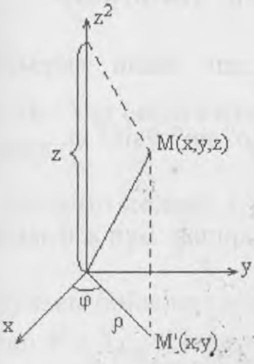
$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi & x'_z \\ y'_\rho & y'_\varphi & y'_z \\ z'_\rho & z'_\varphi & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

Сонда декарт координат жүйеден цилиндрлік поляр координат жүйеге мына формула көмегімен көшеміз:

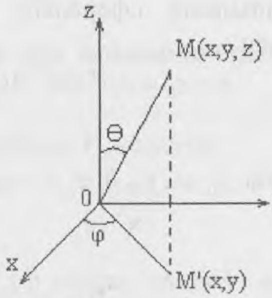
$$\iiint\limits_{\overline{V}} f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{\overline{V}'} \overline{f}(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi,\ z)\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz.$$

II. Сфералық координаттар. Кеңістіктегі кез келген $M(x, y, z)$ нүктені қарастырайық, ал $M'(x, y)$ нүкте $M(x, y, z)$ нүктенің xOy координат жазықтығындағы проекциясы болсын (*10.26-сурет*).



10.25-сурет



10.26-сурет

ρ, θ, φ сандары M нүктенің сфералық координаттары деп аталады. Декарт координат жүйеден сфералық координат жүйеге көшу үшін

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi,\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi,\ z = \rho\cos\theta \tag{10.44}$$

алмастыруын пайдаланамыз, мұндағы $0 \le \rho < +\infty, 0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Егер θ бұрышы ретінде OM мен OM' түзулерінің арасындағы бұрышты алсақ, онда (10.44) формуласындағы $\sin\theta$-ны $\cos\theta$-ға, ал $\cos\theta$-ны $\sin\theta$-ға ауыстыру керек:

$$x = \rho\cos\theta\cos\varphi,\ y = \rho\cos\theta\sin\varphi,\ z = \rho\sin\theta$$

мұндағы $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Енді (10.44) алмастырудың якобиан анықтауышын есептейік:

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \rho\cos\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta \\ -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = \rho^2\sin\theta.$$

Сонымен, декарт координат жүйеден сфералық координат жүйеге көшу үшін мына формуланы пайдаланамыз:

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz =$$

$$= \iiint_{V'} f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi,\ \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\varphi.$$

Егер θ бұрышы ретінде MOM' бұрышын алсақ, онда

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz =$$

$$=\iiint_{V'} f(\rho\cos\theta\cos\varphi, \rho\cos\theta\sin\varphi,\ \rho\sin\theta)\rho^2\cos\theta d\rho d\theta d\varphi.$$

Жалпылама сфералық координаттар деп мына формуланы айтамыз:

$$x-x_0 = a\rho^n\sin^\alpha\theta\cos^\beta\varphi,\ y-y_0 = b\rho^n\sin^\alpha\theta\sin^\beta\varphi,$$

$$z-z_0 = c\rho^n\cos^\alpha\theta,$$

мұндағы $x_0, a, y_0, b, z_0, c, \alpha, \beta, n$ – тұрақты сандар. Бұл жағдайда:

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)}=$$

$$=abcn\alpha\beta\rho^{3n-1}\sin^{2\alpha-1}\theta\cos^{\alpha-1}\theta\sin^{\beta-1}\varphi\cos^{\beta-1}\varphi.$$

1-мысал. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$-қисық сызықпен шектелген $\overline{V}$ дене бойынша мына интегралды есептейік:

$$\iiint_{\overline{V}}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz.$$

Шешуі. Сфералық координаттарға көшейік:

$$x = a\rho\sin\theta\cos\varphi,\ y = b\rho\sin\theta\sin\varphi,\ \ z = c\rho\cos\theta.$$

Онда

$$\iiint_{\overline{V}} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\overline{V}}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz. =$$

$$= abc\int_0^\pi \sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho^4 d\rho = \frac{4\pi abc}{5}.$$

2-мысал. $\overline{V}$ дене мына беттермен шектелген: $z^2 = x^2+y^2, z=1$. $\iiint_{\overline{V}}\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$ интегралын есептейік.

Шешуі. Цилиндрлік координаттарға көшейік:

$$x = \rho\cos\varphi,\ x = \rho\sin\varphi,\ \ z = z.$$

Енді берілген беттердің цилиндрлік координаттағы теңдеулерін табайық:

$$z^2 = \rho^2, z = \rho,\ z = 1,\text{ яғни}$$

$$\overline{V}' = \{(\rho,\varphi,z):\ 0\le\rho\le 1,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ \rho\le z\le 1\}.$$

Сонда

$$\iiint\limits_{\overline{V}} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\overline{V}} \sqrt{x^2+y^2}dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^2 d\rho \int\limits_{\rho}^1 dz =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^1 \left(\rho^2 - \rho^3\right) d\rho = \frac{\pi}{6}.$$

10.10. Үш еселі интегралды физика мен механика есептеріне қолдану

1. Дененің көлемі. Кубталатын $\overline{V}$ дененің V көлемін

$$V = \iiint\limits_{\overline{V}} dxdydz \tag{10.45}$$

формуласы бойынша есептейміз.

Егер $\overline{V} = \{(x,y,z) : (x,y) \in D, 0 \le z \le \varphi(x,y)\}$ болса, онда $\overline{V}$ дененің көлемін екі еселі интеграл арқылы есептеуге болады:

$$V = \iint\limits_D dxdy \int\limits_0^{\varphi(x,y)} dz = \iint\limits_D \varphi(x,y) dxdy \cdot$$

Егер $\overline{V}$ дене $x = a$, $x = b$ жазықтықтарымен және дененің әрбір $D(x)$ қимасының ($x - const$) ауданы $S(x)$ болса, онда (10.45) үш еселі интегралға $S(x) == \iint\limits_{D(x)} dyds$ формуланы пайдаланып, өзімізге белгілі анықталған интеграл арқылы дененің көлемін есептеуге болады:

$$V = \int\limits_a^b dx \iint\limits_{D(x)} dyds = \int\limits_a^b S(x) dx \,.$$

Декарт координат жүйедегі x, y, z айнымаларына (10.42) алмастыруын пайдаланып, дененің көлемін қисық сызықты координат арқылы есептейміз:

$$V = \iiint\limits_{\overline{V}'} \left| \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} \right| dudvdw.$$

2. Бізге кеңістікте кубталатын материалды $\overline{V}$ дене берілсін және оның тығыздығы $\mu(x, y, z)$ болсын, онда мына формулалар орындалады:

а) дененің массасы: $m = \iiint\limits_{\overline{V}} \rho(x,y,z) dxdydz \cdot$

ә) статикалық моменттері (координат жазықтықтар бойынша):

$$M_{yz} = \iiint\limits_{\overline{V}} x\mu(x,y,z)dxdydz,$$
$$M_{xz} = \iiint\limits_{\overline{V}} y\mu(x,y,z)dxdydz,$$
$$M_{xy} = \iiint\limits_{\overline{V}} z\mu(x,y,z)dxdydz,$$

б) ауырлық центрі: $x_0 = \dfrac{M_{yz}}{m}, y_0 = \dfrac{M_{xz}}{m}, z_0 = \dfrac{M_{xy}}{m};$

в) инерция моменттері (координат жазықтықтар бойынша):

$$J_{yz} = \iiint\limits_{\overline{V}} x^2\mu(x,y,z)dxdydz,$$
$$J_{xz} = \iiint\limits_{\overline{V}} y^2\mu(x,y,z)dxdydz,$$
$$J_{xy} = \iiint\limits_{\overline{V}} z^2\mu(x,y,z)dxdydz;$$

г) инерция моменттері (координат осьтері бойынша):

$$J_x = J_{xz} + J_{xy},\ J_y = J_{xy} + J_{yz},\ J_z = J_{yz} + J_{zx};$$

ғ) инерция моменттері (координаттың бас нүктесі бойынша):

$$J_0 = J_{yz} + J_{zx} + J_{xy} =$$
$$= \iiint\limits_{\overline{V}} \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\mu(x,y,z)dxdydz.$$

д) дененің $M_0(x_0, y_0, z_0)$ **нүктедегі Ньютон потенциал өрісінің тартылысы:**

$$U(x_0, y_0, z_0) = \gamma \cdot \iiint\limits_{\overline{V}} \mu(x,y,z) \cdot \frac{1}{r}\, dxdydz,$$

Мұндағы $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$, $\gamma - const.$

Массасы m_0-ге тең материалды $\overline{V}$ денеге $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктедегі $\overline{F} = \{F_x; F_y; F_z\}$ тартылыс күш:

$$F_x = \gamma m_0 \frac{\partial U}{\partial x_0} = \gamma m_0 \iiint\limits_{\overline{V}} \mu(x,y,z)\frac{x-x_0}{r^3}dxdydz,$$
$$F_y = \gamma m_0 \frac{\partial U}{\partial y_0} = \gamma m_0 \iiint\limits_{\overline{V}} \mu(x,y,z)\frac{y-y_0}{r^3}dxdydz,$$
$$F_z = \gamma m_0 \frac{\partial U}{\partial z_0} = \gamma m_0 \iiint\limits_{\overline{V}} \mu(x,y,z)\frac{z-z_0}{r^3}dxdydz.$$

1-мысал. $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, $y = x$, $y = x^2$ беттермен шектелген дененің көлемін есептейік.

Шешуі. $\overline{V}$ дене $z = x^2 + y^2$ пен $z = 2x^2 + 2y^2$ параболоидтардың, $y = x$ жазықтықтың және $y = x^2$ цилиндрлік беттердің бөліктерімен шектелген, яғни $\left(x = x^2, x = 0, x = 1\right)$:

$$\overline{V} = \left\{(x, y, z) : 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le x, x^2 + y^2 \le z \le 2x^2 + 2y^2\right\}$$

Онда

$$V = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} dy \int_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2} dz = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} \left(2x^2 + 2y^2 - x^2 - y^2\right) dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} \left(x^2 + y^2\right) dy =$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx = \frac{3}{35}.$$

2-мысал. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$, $z = c$ біртекті дененің ауырлық центрін есептейік.

Шешуі. $\overline{V}$ дене $z = c\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}}$ беттің және $z = c$ жазықтықтың бөліктерімен шектелген және Oz осі бойынша симметриялы. Олай болса, оның ауырлық центрі Oz осінде жатыр, яғни $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Онда

$$z_0 = \frac{1}{m} \iiint_V z dx dy dz .$$

Дене біртекті болғандықтан, дененің массасы оның көлемінің сандық мәніне тең ($\mu(x, y, z) = 1$ болғанда $m = V$). Сондықтан дененің көлемін есептейік, ол үшін $(\alpha = 1, n = 1)$

$$x = a\rho \sin\theta \cos\varphi, \; y = b\rho \sin\theta \sin\varphi, \; z = c\rho \cos\theta$$

формуланы пайдаланайық, сонда: $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \rho \le 1$, $c \le z \le c\rho$,

$$V = ab \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_{c\rho}^{c} dz = 2\pi ab \int_0^1 \rho z \Big|_{c\rho}^{c} d\rho =$$

$$= 2\pi abc \int_0^1 \left(\rho - \rho^2\right) d\rho = \frac{\pi}{3} abc .$$

Онда

$$z_0 = \frac{3}{\pi c}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_{c\rho}^{c} z dz = 3c\int_0^1 \left(\rho^2 - \rho^3\right) d\rho = \frac{3}{4}c.$$

Сонымен, дененің ауырлық центрі $A\left(0,0,\frac{3}{4}c\right)$ нүкте болады.

10.11. m еселі интеграл

Егер $m<3$ болғанда m еселі интегралды екі және үш еселі интегралдар сияқты енгізуге болады. Ол үшін алдымен кейбір қажетті анықтамаларға тоқталып өтейік. m өлшемді $\Pi = \{(x_1, x_2, ..., x_m):$

$$|x_1 - a_1| < d_1, |x_2 - a_2| < d_2, ..., |x_m - a_m| < d_m\}$$

параллелепипедтің көлемі деп $V(\Pi) = 2d_1, 2d_2, ..., 2d_m$-санды айтамыз. V^0 дене m өлшемді E евклид кеңістігіндегі шектелген дене болсын $\left(V^0 \subset E\right)$. Осы денені сырттай және іштей m өлшемді мүмкін болатын Π_c, Π_i көпжақтармен қоршайық және толтырайық, мұндағы Π_c мен Π_i көпжақтары m өлшемді параллелепипедтердің көлемдерінің қосындысына тең болсын. Мына сандар

$$\underline{V} = \sup_{\Pi_i \subset V^0} \{V(\Pi_i)\}, \qquad \overline{V} = \inf_{V^0 \subset \Pi_c} \{V(\Pi_c)\}$$

V^0 дененің жоғарғы және төменгі көлемі деп аталады. V^0 дене кубталады деп аталады, егер $\underline{V} = \overline{V}$ болса, ал $V = \underline{V} = \overline{V}$ саны V^0 дененің көлемі деп аталады.

Енді m өлшемді евклид кеңістігіндегі V^0 денеде анықталған және шектелген $u = f(A) = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функция берілсін. V^0 денені ішкі нүктелері ортақ болмайтын кубталатын V_i^0 $\left(i = \overline{1.n}\right)$ бөліктерге бөлейік, әрбір бөліктердің әрқайсысынан еркімізше $A_i\left(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_m\right)$ нүкте алайық және төмендегі интеграл қосындыны қарастырайық:

$$J\left(V_i^0, A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_m\right) \cdot \Delta V_i^0, \tag{10.45}$$

мұндағы ΔV_i^0 таңбасы V_i^0 бөліктердің көлемі. Кіші V_i^0 дененің диаметрін λ_i және $\max_i\{\lambda_i\} = \lambda$ болсын. Екі және үш еселі интегралдардағы сияқты, $\lambda \to 0$ болғандағы (10.45) интеграл қосындының шегі m еселі интеграл деп аталады және ол былай белгіленеді:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_m\right) \cdot \Delta V_i^0 =$$
$$= \iint_{V0} ... \int f(x_1, x_2, ..., x_m) dx_1 dx_2 ... dx_m. \qquad (10.46)$$

Екі және үш еселі интегралдардағыдай, m еселі интегралға мына тұжырымдар орындалады:

Егер $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функциясы тұйық кубталатын V^0 облыста үзіліссіз болса, онда ол осы облыста интегралданады;

Егер шектелген $f(x_1, x_2, ..., x_m)$ функциясы кубталатын V^0 облыста үзіліссіз болса, онда ол осы облыста интегралданады;

Егер $f(x_1, x_2, ..., x_m) = 1$ болса, онда дененің көлемі мына формуладан анықталады:

$$V = \iint_{V^0} ... \int dx_1\, dx_2 ... dx_m.$$

10.12-теорема. Егер:

$$f(x_1, x_2, ..., x_m) = 1$$

функциясы

$$V^0 = \{(x_1, x_2, ..., x_m) : (x_1, x_2, ..., x_{m-1}) \in D,$$

$\varphi(x_1, x_2, ..., x_{m-1}) \le x_m \le \psi(x_1, x_2, ..., x_{m-1})\}$ облыста интегралданса, мұндағы $\varphi(x_1, x_2, ..., x_{m-1})$ функциялары D облыста үзіліссіз, $D \subset E;$ D облыстың кез келген тағайындалған $(x_1, x_2, ..., x_{m-1})$ нүктелері үшін

$$J(x_1, x_2, ..., x_m) = \int_{\varphi(x_1, x_2, ..., x_{m-1})}^{\psi(x_1, x_2, ..., x_{m-1})} f(x_1, x_2, ..., x_m) dx_m$$

анықталған интегралы бар болса, онда $J(x_1, x_2, ..., x_m)$ функциясының D облысында $m-1$ еселі интегралы бар және мына теңдік орындалады:

$$\iint_{V^0} ... \int f(x_1, x_2, ..., x_m) dx_1\, dx_2 ... dx_m =$$

$$\iint_{D} ... \int dx_1\, dx_2 ... dx_{m-1} \int_{\varphi(x_1, x_2, ..., x_{m-1})}^{\psi(x_1, x_2, ..., x_{m-1})} f(x_1, x_2, ..., x_m) dx_m.$$

XI ТАРАУ. ҚИСЫҚ СЫЗЫҚТЫ ИНТЕГРАЛДАР

Материалды қисық сызықтың тығыздығы бойынша оның массасын және берілген жол бойымен жұмсалған күш өрісін, т.б. физика және механика есептерін шығару үшін қисық сызықты интеграл деп аталатын интегралды енгізуге тура келеді. Біз осы тарауда қисық сызықты интегралдың екі түрін қарастыратын боламыз: бірінші және екінші текті қисық сызықты интегралдар.

11.1. Бірінші текті қисық сызықты интегралдың анықтамасы және оның бар болуы

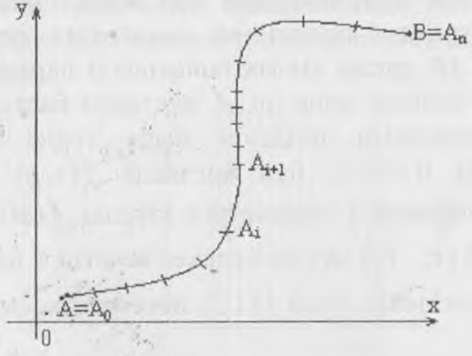
Алдымен алдағы тақырыптарда қажет болатын негізгі ұғымдарға тоқталайық. xOy координат жазықтығында $L = AB$ қисық сызық параметр теңдеумен берілсін:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \tag{11.1}$$

мұндағы $t \in [\alpha; \beta]$. Қисық сызық L **тұйық емес жазық (жай) қисық сызық** деп аталады, егер $\varphi(t)$ мен $\psi(t)$ функциялары $[\alpha;\ \beta]$ сегментінде үзіліссіз және осы сегменттің t параметрінің әртүрлі мәндеріне әртүрлі $M(\varphi(t), \psi(t))$ нүктелері сәйкес келсе. Егер $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$ нүкте $B(\varphi(\beta), \psi(\beta))$ нүктесімен беттессе, ал басқа нүктелері еселі болмаса, онда $L-$ **тұйық жазық қисық сызық** деп аталады. Жазық қисық сызық **түзуленуші қисық сызық** деп аталады, егер $\Delta t \to 0$ болғанда жазық қисық сызыққа іштей сызылған сынық сызықтардың шегі бар болса, яғни бұл шек бар болса, онда ол шек L қисық сызықтың ұзындығына тең.

AB жазық қисық сызығы **тегіс қисық сызық (бөлікті қисық сызық)** деп аталады, егер $\varphi(t)$ мен $\psi(t)$ функцияларының (бөлікті үзіліссіз) туындылары бар болса. AB **қисық сызықтың ерекше нүктесі** деп $\varphi'(t)$ мен $\psi'(t)$ туындыларының екеуін де нөлге айналдыратын нүктені айтамыз (*9.3-тақырып*). AB қисық сызықта анықталған $f(x, y)$ функция осы **қисық сызықтың бойында үзіліссіз** деп аталады, егер қисық сызық бойындағы кез келген $M_0(x_0, y_0)$ нүкте үшін $\lim\limits_{M \to M_0} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ теңдігі орындалса, мұнда $M_0(x_0, y_0) \in\ \in AB,\ M(x, y) \in AB$. Егер бұл шек қисық сызықтың бойындағы саны санаулы нүктелерге орындалмай, ал қалған нүктелердің барлығына орындалса, онда $f(x, y)$ функциясы AB қисық сызық бойында **бөлікті үзіліссіз** деп аталады. Осылайша, жоғарыдағы ұғымдарды XYZ кеңістіктегі қисық сызықтар үшін де келтіруге болады.

Бізге $L = AB$ жазық, түзуленуші (тұйық немесе тұйық емес) қисық сызық (11.1) теңдеуімен берілсін және $f(x,y)$ функциясы осы қисық сызықта анықталсын (*11.1-сурет*).



11.1-сурет

Енді $[a;b]$ сегментті $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = \beta$ нүктелермен n бөлікке бөлейік. Кез келген t_i $(t_i \in [\alpha;\beta])$ параметрге AB қисық сызық бойынан $A_i(x_i, y_i)$ нүкте сәйкес келеді және $x_i = \varphi(t_i)$, $y_i = \psi(t_i)$. Онда L қисық сызығы да $A_0, A_1, A_2, ..., A_n$ нүктелермен n бөлікке бөлінеді. Әрбір $A_i A_{i+1}$ доғадан еркімізше кез келген $\overline{A}_i(\overline{x}_i, \overline{y}_i)$ нүктедегі $f(x,y)$ функциясының мәнін $A_i A_{i+1}$ доғаның ұзындығына көбейтейік, яғни $f(\overline{x}_i, \overline{y}_i) \cdot \Delta l_i$ және осы көбейтіндіден 1-ден бастап n-ге дейін i бойынша қосынды алайық:

$$J(\overline{A}_i, A_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i, \overline{y}_i) \cdot \Delta l_i. \tag{11.2}$$

Осы қосынды $f(x,y)$ **функцияның интеграл қосындысы** деп аталады.

Анықтама. Егер $\Delta l = \max\{\Delta l_i\} \to 0$ болғанда $J(\overline{A}_i, A_i)$ интеграл қосындының шегі бар болса, онда ол шек $f(x,y)$ функцияның L қисық сызық бойымен алынған **бірінші текті қисық сызықты интегралы** деп аталады және ол былай белгіленеді:

$$\int_L f(x,y)dl = \lim_{\Delta l \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i, \overline{y}_i) \cdot \Delta l_i = J, \tag{11.3}$$

мұнда x, y – тәуелсіз айнымалар және (x, y) нүкте L қисық сызығы бойында жатыр, dl – қисық сызықтың дифференциалы.

Егер AB тұйық немесе тұйық емес қисық сызық болса да, онда бірінші текті қисық сызықты интеграл (11.3) түрінде белгіленеді.

Келтірілген анықтама мен анықталған интегралдың анықтамасы арасында аздаған айырмашылық бар және бірінші текті қисық сызықты интегралды анықталған интегралға келтіруге болады. Шынында да, AB қисық сызық бойындағы параметрді доғаның l ұзындығы деп алайық және ол A нүктеден бастап өзгерсін, онда осы қисық сызықтың теңдеуін мына түрде жазуға болады: $x = \varphi(l), y = \psi(l),\ \ 0 \le l \le 1$. Бұл жағдайда $f(x, y)$ функциясы AB қисық сызық бойында l параметрге тәуелді $f(\varphi(l), \psi(l))$ функция болады және $\overline{A}_i(\overline{x}_i,\ \overline{y}_i)$ нүктеге сәйкес келетін l параметрдің мәнін $\bar{l}_i$ таңбамен белгілейік, онда (11.2) интеграл қосынды мына түрге өрнектеледі:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\bar{l}_i), \psi(\bar{l}_i)) \cdot \Delta l_i. \tag{11.4}$$

Ал бұл интеграл қосындыдан шекке көшсек, $\Delta l \to 0$ болғанда, онда оның шегі анықталған интеграл болады:

$$\int_0^b f(\varphi(l), \psi(l))dl = \lim_{\Delta l \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\bar{l}_i), \psi(\bar{l}_i)) \cdot \Delta l_i.$$

Енді (11.2) мен (11.4) интеграл қосындылары тең болғандықтан, онда олардың шектері де тең, демек, бірінші текті қисық сызықты интегралды анықталған интеграл арқылы өрнектедік:

$$\int_{AB} f(x, y)dl = \int_0^b f(\varphi(l), \psi(l))dl$$

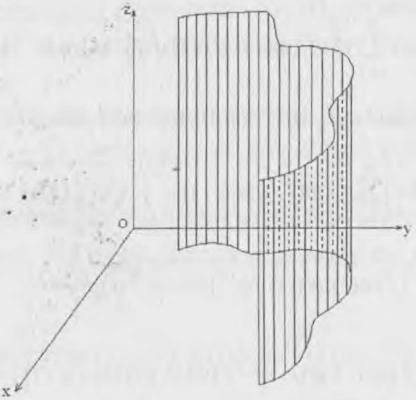
және бұл екі интеграл да бір мезетте бар немесе жоқ болады. Демек, егер $f(x, y)$ функциясы AB қисық сызық (бөліктегі тегіс қисық сызық) бойында үзіліссіз болса, онда бірінші текті қисық сызықты интеграл бар, себебі анықталған интеграл бар.

Жоғарыда сөз болған анықтамалар арасында айырмашылықта бар. Шынында да, (11.2) интеграл қосындыда A_iA_{i+1} доғаның Δl_i ұзындығы оң сан, ал бұл оң сан A мен B нүктелері қайсысы бастапқы, қайсысы соңғы нүкте болуына тәуелсіз, яғни бірінші текті қисық сызықты интегралды AB бойымен немесе BA қисық сызықтар бойымен интегралдағанда, онда ол қисық сызықтың бағытына тәуелді емес, олай болса мына теңдік орындалады:

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{BA} f(x,y)dl.$$

Ал анықталған интегралда, оның интегралдау шектерін орын алмастырсақ, анықталған интегралдың мәні **кері таңбаға** өзгереді.

Анықталған интеграл қисық сызықты трапецияның ауданы болса, осы сияқты бірінші текті қисық сызықты интеграл жасаушылары *Oz* осіне перпендикуляр болатын цилиндрлік бет бөлігінің ауданы болады (*11.2-сурет*).



11.2-сурет

11.1-теорема. Егер AB қисық сызығы (11.1) параметр теңдеуімен берілсе, $\varphi(t)$ мен $\psi(t)$ функцияларының $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ туындылары $[\alpha;\beta]$ сегментте үзіліссіз және $f(x,y)$ функциясы AB қисық сызығы бойында үзіліссіз болса, онда мына теңдік орындалады:

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt. \tag{11.5}$$

Дәлелдеуі. $[\alpha;\beta]$ сегментін жоғарыда айтылғандай n бөлікке бөлейік және (11.2) интеграл қосындыны қарастырайық, мұндағы A_iA_{i+1} доғаның Δl_i ұзындығы төмендегі формуладан анықталады:

$$\Delta l_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt.$$

Онда (11.2) интеграл қосынды мына түрге өрнектелінеді:

$$J = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i,\bar{y}_i)\cdot\Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\bar{t}_i),\psi(\bar{t}_i))\times$$

$$\times \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt, \tag{11.6}$$

мұндағы $\bar{x}_i = \varphi(\bar{t}_i)$, $\bar{y}_i = \psi(\bar{t}_i)$, $\bar{t} \in [t_i;t_{i+1}]$.

Енді (11.5) формуладағы теңдіктің оң жағындағы анықталған интегралды J_1 таңбамен белгілейік те, $[\alpha;\beta]$ сегментті n бөлікке $[t_i;t_{i+1}]$ дербес сегменттерге бөліктейік, $i=\overline{1,n}$. Онда J_1 интегралды мына түрде жаза аламыз:

$$J_1 = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt.$$

Жоғарыдағы J мен J_1 интегралдардың айырымын бағалайық:

$$|J_1 - J| = \left| \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\bar{t}_i),\psi(\bar{t}_i)) \cdot \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt \right| = \tag{11.7}$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \{f(\varphi(\bar{t}_i),\psi(\bar{t}_i)) - f(\varphi(t),\psi(t))\}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt \right|.$$

Жоғарыдағы (11.1) функциялар $[\alpha;\beta]$ сегментте, ал $f(x,y)$ функция AB қисық сызық бойында үзіліссіз болғандықтан, $f(\varphi(t),\psi(t))$ күрделі функцияда $[\alpha,\beta]$ сегментте үзіліссіз болады және $\max\{\Delta l_i\} = \Delta l$ нөлге ұмтылғанда $t_{i+1} - t_i$ айырым да нөлге ұмтылады. Онда кез келген $\varepsilon > 0$ сан үшін $\Delta l < \delta$ теңсіздігі орындалатындай $\delta > 0$ саны табылып,

$$| f(\varphi(\bar{t}_i),\psi(\bar{t}_i)) - f(\varphi(t),\psi(t)) | < \varepsilon$$

теңсіздік орындалады. Осыдан және (11.7) теңдіктен

$$|J_1 - J| \le \sum_{i=1}^{n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left| f\left(\varphi(\bar{t}_i),\psi(\bar{t}_i)\right) - f(\varphi(t),\psi(t)) \right| \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt \le$$

$$\le \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt = \varepsilon \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt = \varepsilon l,$$

мұндағы l – берілген AB қисық сызықтың ұзындығы.

Сонымен, ε саны кез келген сан болғандықтан, J интеграл қосынды, $\Delta l \to 0$ болғанда J_1 интегралға ұмтылады, яғни бірінші текті қисық сызықты интеграл бар және ол (11.6) формула арқылы есептеледі. Теорема дәлелденді.

AB қисық сызығы бойында $f(x,y)$ функциясы үзіліссіз болса, онда мына теңдіктер орындалады:

а) егер AB қисық сызығы $y = \varphi(x)$ теңдеуімен берілсе, онда:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x,\varphi(x))\sqrt{1+\varphi'^2(x)}dx,$$

мұнда $\varphi(x)$ функциясының туындысы $[\alpha;\beta]$ сегментінде үзіліссіз;

ә) егер AB қисық сызығы поляр координат теңдеуімен берілсе, яғни $\rho = \rho(\varphi)$, онда:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}d\varphi,$$

мұнда $\rho(\varphi)$ функциясының туындысы $[\alpha;\beta]$ сегментте үзіліссіз;

б) егер кеңістіктегі AB тегіс қисық сызығында $f(x,y,z)$ үзіліссіз болса, онда:

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t),\kappa(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+x_t'^2(t)}dt,$$

мұнда AB қисық сызық $x=\varphi(t), y=\psi(t), z=x(t)$ параметр теңдеуімен берілген және $\varphi(t),\psi(t),x(t)$ функцияларының $\varphi'(t),\psi'(t),x'(t)$ туындылары $[\alpha;\beta]$ сегментте үзіліссіз.

Сонымен, бірінші текті қисық сызықты интеграл анықталған интеграл арқылы есептелінеді.

11.2. Бірінші текті қисық сызықты интегралдың қасиеттері

1-қасиет. Егер AB қисық сызық бойында $f(x,y)$ және $\varphi(x, y)$ функцияларының әрқайсысының бірінші текті қисық сызықты интегралдары бар болса, онда $c_1 f(x,y) \pm c_2\varphi(x,y)$ функциясының да AB қисық сызық бойында бірінші текті қисық сызықты интегралы бар және

$$\int\limits_{AB}\left(c_1 f(x,y) \pm c_2\varphi(x,y)\right)dl = c_1\int\limits_{AB} f(x,y)dl \pm c_2\int\limits_{AB}\varphi(x,y)dl,$$

мұндағы c_1, c_2 – тұрақты сандар.

2-қасиет. Егер AB қисық сызық екі AC мен CB қисық сызықтарынан анықталса және $f(x,y)$ функцияның AB қисық сызықта бірінші текті қисық сызықты интегралы бар болса, онда

$$\times \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt, \qquad (11.6)$$

мұндағы $\bar{x}_i=\varphi(\bar{t}_i)$, $\bar{y}_i=\psi(\bar{t}_i)$, $\bar{t}\in[t_i;t_{i+1}]$.

Енді (11.5) формуладағы теңдіктің оң жағындағы анықталған интегралды J_1 таңбамен белгілейік те, $[\alpha;\beta]$ сегментті n бөлікке $[t_i;t_{i+1}]$ дербес сегменттерге бөліктейік, $i=\overline{1,n}$. Онда J_1 интегралды мына түрде жаза аламыз:

$$J_1=\sum_{i=1}^{n}\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt.$$

Жоғарыдағы J мен J_1 интегралдардың айырымын бағалайық:

$$|J_1-J|=\left|\sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\bar{t}_i),\psi(\bar{t}_i))\cdot\int_{t_i}^{t_{i+1}}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt-\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{n}\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt\right|= \qquad (11.7)$$

$$=\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\{f(\varphi(\bar{t}_i),\psi(\bar{t}_i))-f(\varphi(t),\psi(t))\}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt\right|.$$

Жоғарыдағы (11.1) функциялар $[\alpha;\beta]$ сегментте, ал $f(x,y)$ функция AB қисық сызық бойында үзіліссіз болғандықтан, $f(\varphi(t),\psi(t))$ күрделі функцияда $[\alpha,\beta]$ сегментте үзіліссіз болады және $\max\{\Delta l_i\}=\Delta l$ нөлге ұмтылғанда $t_{i+1}-t_i$ айырым да нөлге ұмтылады. Онда кез келген $\varepsilon>0$ сан үшін $\Delta l<\delta$ теңсіздігі орындалатындай $\delta>0$ саны табылып,

$$|f(\varphi(\bar{t}_i),\psi(\bar{t}_i))-f(\varphi(t),\psi(t))|<\varepsilon$$

теңсіздік орындалады. Осыдан және (11.7) теңдіктен

$$|J_1-J|\le\sum_{i=1}^{n}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left|f(\varphi(\bar{t}_i),\psi(\bar{t}_i))-f(\varphi(t),\psi(t))\right|\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt\le$$

$$\le\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt=\varepsilon\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt=\varepsilon l,$$

мұндағы $l-$ берілген AB қисық сызықтың ұзындығы.

Сонымен, ε саны кез келген сан болғандықтан, J интеграл қосынды, $\Delta l\to 0$ болғанда J_1 интегралға ұмтылады, яғни бірінші текті қисық сызықты интеграл бар және ол (11.6) формула арқылы есептеледі. Теорема дәлелденді.

AB қисық сызығы бойында $f(x,y)$ функциясы үзіліссіз болса, онда мына теңдіктер орындалады:

а) егер AB қисық сызығы $y=\varphi(x)$ теңдеуімен берілсе, онда:

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x,\varphi(x))\sqrt{1+\varphi'^2(x)}dx,$$

мұнда $\varphi(x)$ функциясының туындысы $[\alpha;\beta]$ сегментінде үзіліссіз;

ә) егер AB қисық сызығы поляр координат теңдеуімен берілсе, яғни $\rho=\rho(\varphi)$, онда:

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}d\varphi,$$

мұнда $\rho(\varphi)$ функциясының туындысы $[\alpha;\beta]$ сегментте үзіліссіз;

б) егер кеңістіктегі AB тегіс қисық сызығында $f(x,y,z)$ үзіліссіз болса, онда:

$$\int_{AB} f(x,y,z)dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t),\kappa(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+x_t'^2(t)}dt,$$

мұнда AB қисық сызық $x=\varphi(t), y=\psi(t), z=x(t)$ параметр теңдеуімен берілген және $\varphi(t),\psi(t),x(t)$ функцияларының $\varphi'(t),\psi'(t),x'(t)$ туындылары $[\alpha;\beta]$ сегментте үзіліссіз.

Сонымен, бірінші текті қисық сызықты интеграл анықталған интеграл арқылы есептелінеді.

11.2. Бірінші текті қисық сызықты интегралдың қасиеттері

1-қасиет. Егер AB қисық сызық бойында $f(x,y)$ және $\varphi(x, y)$ функцияларының әрқайсысының бірінші текті қисық сызықты интегралдары бар болса, онда $c_1 f(x,y)\pm c_2\varphi(x,y)$ функциясының да AB қисық сызық бойында бірінші текті қисық сызықты интегралы бар және

$$\int_{AB}\left(c_1 f(x,y)\pm c_2\varphi(x,y)\right)dl = c_1\int_{AB} f(x,y)dl \pm c_2\int_{AB}\varphi(x,y)dl,$$

мұндағы c_1, c_2 – тұрақты сандар.

2-қасиет. Егер AB қисық сызық екі AC мен CB қисық сызықтарынан анықталса және $f(x,y)$ функцияның AB қисық сызықта бірінші текті қисық сызықты интегралы бар болса, онда функцияның AC мен CB қисық сызықтарында да бірінші текті қисық сызықты интегралдары бар және

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{AC} f(x,y)dl + \int_{CB} f(x,y)dl.$$

3-қасиет. Егер AB қисық сызықта $f(x,y) \geq 0$ функцияның бірінші текті қисық сызықты интегралы бар болса, онда:

$$\int_{AB} f(x,y)dl \geq 0.$$

4-қасиет. Егер $f(x,y)$ функцияның AB қисық сызық бойында бірінші текті қисық сызықты интегралы бар болса, онда $|f(x,y)|$ функцияның да AB қисық сызық бойында бірінші текті қисық сызықты интегралы бар және

$$\left|\int_{AB} f(x,y)dl\right| \leq \int_{AB} |f(x,y)|\,dl.$$

5-қасиет (орта мән туралы теорема). Егер $f(x,y)$ функция AB қисық сызық бойында үзіліссіз болса, онда AB қисық сызық бойынан $M_0(x_0,y_0)$ нүкте табылып, мына теңдік орындалады:

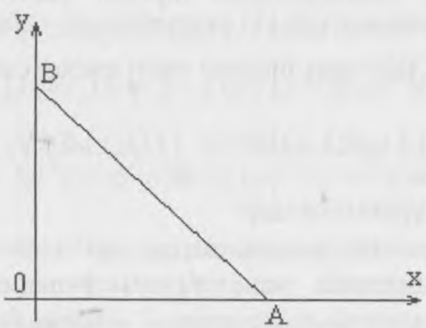
$$\int_{AB} f(x,y)dl = f(x_0,y_0)\int_{AB} dl = f(x_0,y_0)\cdot l,$$

мұндағы l – қисық сызық AB-ның ұзындығы.

6-қасиет. Бірінші текті қисық сызықты интеграл AB қисық сызықтың интегралдау бағытына тәуелсіз, яғни

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{BA} f(x,y)dl.$$

1-мысал. Үшбұрыштың $O(0,0), A(1,0), B(0,1)$ төбелерін қосатын контур бойымен $\int_L (x+y)dl$ интегралын есептейік (*11.3-сурет*).



11.3-сурет

Шешуі. Бірінші текті қисық сызықты интегралдың екінші қасиеті бойынша $(L = OA + AB + BO)$:

$$\int\limits_L (x+y)dl = \int\limits_{OA}(x+y)dl + \int\limits_{AB}(x+y)dl + \int\limits_{BO}(x+y)dl.$$

Үшбұрыштың OA кесіндісінде: $0 \le x \le 1,\ y = 0,\ dl = dx,$ онда:

$$\int\limits_{OA}(x+y)dl = \int\limits_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2};$$

BO кесіндіде: $0 \le y \le 1,\ x = 0,\ dl = dy,$ онда:

$$\int\limits_{BO}(x+y)dl = \int\limits_0^1 ydy = \frac{1}{2};$$

AB кесіндіде (түзуде): $0 \le x \le 1,\ y + x = 1$ теңдеу AB түзудің теңдеуі, осыдан $dl = \sqrt{1+\varphi'^2(x)}dx = \sqrt{2}dx,$ онда:

$$\int\limits_{AB}(x+y)dl = \sqrt{2}\int\limits_0^1 (x+1-x)dx = \sqrt{2}\int\limits_0^1 dx = \sqrt{2}.$$

Осылардан: $\int\limits_L (x+y)dl = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \sqrt{2} = 1 + \sqrt{2}.$

2-мысал. $\int\limits_L \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} \right) dl$ қисық сызықты интегралды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ астроида бойымен интегралдайық (*11.4-сурет*).

11.4-сурет

Шешуі. Интегралдау үшін астроиданың параметрлік теңдеуін қарастырайық: $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ t \in [0, 2\pi]$. Онда:

$$x' = -3a\cos^2 t\sin t,\ y' = 3a\sin^2 t\cos t,\ dl = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt =$$

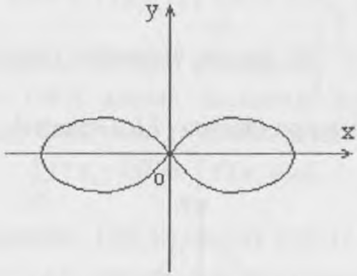
$$= \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}dt = 3a\,|\sin t\cos t\,|\,dt,$$

$$\int\limits_L\left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}\right)dl = 3a\int\limits_0^{2\pi}\left(\left(a\cos^3 t\right)^{\frac{4}{3}} + \left(a\sin^3 t\right)^{\frac{4}{3}}\right)\cdot|\ \sin t\cos t\,|\,dt =$$

$$= 3a^{\frac{7}{3}}\int\limits_0^{2\pi}\left(\cos^4 t + \sin^4 t\right)\sin t\cos t dt = 4\cdot 3a^{\frac{7}{3}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^4 t + \sin^4 t\right)\sin t\cos t dt =$$

$$= 12a^{\frac{7}{3}}\left[\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 t d(\cos t) + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 t d(\sin t)\right] = 12a^{\frac{7}{3}}\left(\frac{\cos^6 t}{6} + \frac{\sin^6 t}{6}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4a^{\frac{7}{3}}.$$

3-мысал. $\int\limits_L |y|\,dl$ қисық сызықты интегралды $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right)$ лемнискат Бернулли сызығы бойымен интегралдайық (*11.5-сурет*).



11.5-сурет

Шешуі. Декарт координат жүйедегі лемнискат Бернулли теңдеуінен поляр координат жүйедегі теңдеуіне көшейік:

$$x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi,$$

$$\left(\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi\right)^2 =$$

$$= a^2\left(\rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi\right),\quad \rho^4 = a^2\rho^2\cos 2\varphi.$$

Осыдан поляр координат жүйедегі лемнискат Бернулли теңдеуін табамыз: $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$, осыдан $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $\rho' = -\frac{a\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$. Онда лемнискаттың параметр теңдеуі мына түрге өрнектелінеді (φ – параметр):

$$x = \rho\cos\varphi = a\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi =$$
$$= a\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot\sin\varphi, \ -\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{4}.$$

Сонымен, ә) формуладан:

$$\int_L |y|\,dl = 2a\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |\sin\varphi|\cdot\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot\sqrt{a^2\cos 2\varphi + \frac{a^2\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}}\,d\varphi =$$

$$= 2a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |\sin\varphi|\,d\varphi = 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi = 2a^2(2-\sqrt{2}).$$

4-мысал. $\int_L\sqrt{x^2+y^2}\,dl$ қисық сызықты интергалды $x^2+y^2 = ax$ шеңбер бойымен интегралдайық.

Шешуі. Шеңбердің поляр координат жүйесіндегі теңдеуін анықтайық: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, сонда $\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi =$ $= a\rho\cos\varphi, \rho = a\cos\varphi$. Сонда $\rho = a\cos\varphi$ шеңбердің поляр жүйедегі, ал $x = a\cos^2\varphi$, $y = a\sin\varphi\cos\varphi$ осы шеңбердің параметр теңдеуі болады. Сонымен, $\rho = a\cos\varphi$

$$\int_L\sqrt{x^2+y^2}\,dl = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}\,\times$$

$$\times\sqrt{a^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}\cdot d\varphi = a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi = 2a^2.$$

Тапсырмалар:

1. Үшбұрыштың $O(0,0), A(2,0), B(0,2)$ төбелерін қосатын контур бойымен $\int_L (x+2y)dl$ интегралын есепте.

2. $\int_L\sqrt{x^2+y^2}\,dl$ қисық сызықты интергалды $x^2+y^2 = 2x$ шеңбер бойымен интегралдайық.

11.3. Бірінші текті қисық сызықты интегралды физика және механика есептеріне қолдану

а) материалды қисық сызықтың массасы. Бізге материалды AB қисық сызық берілсін және $\rho(x,y)$ оның тығыздығы болсын. AB қисық сызықтың бойынан $N(x,y)$ нүкте алайық және AN қисық доғаның ұзындығы l болсын, ал AB-ның массасы m-ге тең болсын. AB қисық сызық бойындағы $N(x,y)$ **нүктедегі тығыздық** деп мына қатынасты айтамыз: $\rho(x,y)=\dfrac{dm(x,y)}{dl}$. Онда AB материалды қисық сызықтың массасын мына интеграл арқылы есептейміз: $\int\limits_0^l \rho(x,y)dl$. Сонымен, тығыздығы $\rho(x,y)$ болатын материалды AB қисық сызықтың массасы бірінші текті қисық сызықты интеграл арқылы есептелінеді:

$$m=\int\limits_{AB}\rho(x,y)dl;$$

ә) қисық сызықтың статикалық моменттері (сәйкес координат осьтері бойынша):

$$M_x=\int\limits_{AB}\rho(x,y)ydl,\ M_y=\int\limits_{AB}\rho(x,y)xdl;$$

б) қисық сызықтың ауырлық центрінің координаттары:

$$x_0=\frac{M_y}{m},\ y_0=\frac{M_x}{m};$$

в) қисық сызықтың инерция моменттері (координат осьтері бойынша):

$$J_x=\int\limits_{AB}y^2\rho(x,y)dl,\ J_y=\int\limits_{AB}x^2\rho(x,y)dl;$$

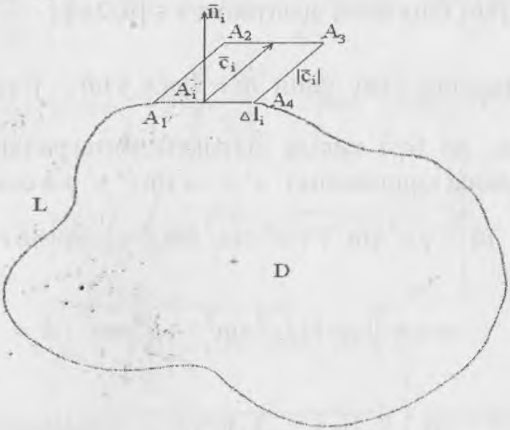
г) массасы m_0-ге тең материалды $M_0(x_0,y_0)$ нүктенің AB қисық сызықтағы $\overline{F}=\{F_x;F_y\}$ тартылыс күші:

$$F_x=\gamma\cdot m_0\int\limits_{AB}\frac{\rho(x,y)\cos\varphi}{r^2}dl,$$

$$F_y=\gamma\cdot m_0\int\limits_{AB}\frac{\rho(x,y)\sin\varphi}{r^2}dl,$$

мұндағы $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$, φ бұрышы r мен OX осі арасындағы бұрыш, $\gamma-const;$

ғ) сұйықтың ағып шыққан мөлшері. Жазық тасқынының $M(x, y) \in L$ нүктесіндегі сығылмаған сұйық заттың жылдамдығы $c = \{u(x), v(x)\}$ болсын. L тегіс қисық сызықпен шектелген тұйық D облыстан бірлік уақытта ағып шығатын сұйықтың мөлшерін анықтайық (*11.6-сурет*).



11.6-сурет

Ол үшін L тұйық қисық сызықты n бөлікке бөлейік және L қисықтың кез келген бөлігіндегі бөліктің $A(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ нүктесіндегі сыртқы бірлік нормаль векторын $\bar{n}_i$ деп белгілейік, яғни $\bar{n}_i$ векторы D облысқа тиісті емес бөлігіне бағытталған, D облыстағы ұзындығы l_i-ге тең доға арқылы бірлік уақытта D облыстан (об-лысқа) ағып шығатын (құйылатын) сұйық заттың мөлшері $|\Delta Q_i|$ болсын. Онда $|\Delta Q_i|$ саны қабырғаларының ұзындығы Δl_i мен $|c_i|$-ге тең $A_1 A_2 A_3 A_4$ параллелограмның ауданына тең, мұндағы $\bar{c}_i = \{u_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i), v_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\}$ және $\Delta Q_i = \Delta l_i(\bar{c}_i; \bar{n}_i)$.

Егер $(\bar{c}_i; \bar{n}_i)$ скаляр көбейтінді оң болса, онда сұйық зат D облыстан ағып шығады, бұл жағдайда $\Delta Q_i > 0$; ал егер $(\bar{c}_i; \bar{n}_i)$ скаляр көбейтінді теріс болса, онда сұйық зат D облысқа құйылады, яғни $\Delta Q_i < 0$.

Енді $\sum\limits_{i=1}^{n} (\bar{c}_i; \bar{n}_i) \cdot \Delta l_i$ интеграл қосындыдан $\Delta l = \max\{\Delta l_i\} \to 0$ болғанда шекке көшіп, D облыстан ағып шығатын (облысқа құйылатын) сұйық заттың мөлшерін табамыз:

$$Q=\int_L(\bar{c_i};\bar{n_i})dl,$$

мұндағы $\bar{n}$ векторы L тұйық сызық бойындағы $M(x,y)$ нүктедегі сыртқы бірлік нормаль вектор.

1-мысал. Тығыздығы $\rho(x,y)=|y|$-ке тең $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ қисық сызықтың массасын есептейік, $t\in[0,2\pi]$.

Шешуі. Массаны табу үшін $m=\int_L\rho(x,y)dl=\int_L|y|\,dl$ формуланы пайдаланамыз, ал бұл қисық сызықты интегралды есептеу үшін (11.5) формуланы қолданамыз: $x'=-a\sin t$, $y'=b\cos t$,

$$dl=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}dt,\ |y|=b|\sin t|.$$

Сонда

$$m=b\int_0^{2\pi}|\sin t|\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}dt=$$

$$=4b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\left(1-\cos^2 t\right)+b^2\cos^2 t}\sin t dt=$$

$$=-\frac{4b}{\sqrt{a^2-b^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-\left(\sqrt{a^2-b^2}\cos t\right)^2}d\left(\sqrt{a^2-b^2}\cos t\right)=$$

$$=-\frac{4b}{\sqrt{a^2-b^2}}\left(\begin{array}{l}\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}\cos t}{2}\sqrt{a^2-\left(\sqrt{a^2-b^2}\cos t\right)^2}+\\ +\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}\cos t}{a}\end{array}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=2b^2+\frac{2ba^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}.$$

2-мысал. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ циклоиданың ауырлық центрін есептейік, $t\in[0;\pi]$, $\rho(x,y)=1$.

Шешуі. Қисық сызықтың дифференциалын табайық:

$$x'(t)=a(1-\cos t),\ y'=a\sin t,$$

$$dl=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}dt=$$

$$=a\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}dt=a\sqrt{2-2\cos t}dt=2a\sin\frac{t}{2}dt.$$

Циклоиданың массасын есептейік:

$$m = 2a\int_0^{\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = 4a\int_0^{\pi} \sin\frac{t}{2}\,d\left(\frac{t}{2}\right) = -4acos\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi} = 4a.$$

Енді ауырлық центрінің координаттарын есептейік:

$$x_0 = \frac{1}{m}\int_L x\,dl = \frac{2a^2}{4a}\int_0^{\pi}(t-\sin t)\sin\frac{t}{2}\,dt = \frac{a}{2}\left(\int_0^{\pi} t\sin\frac{t}{2}\,dt - \int_0^{\pi}\sin t\sin\frac{t}{2}\,dt\right) =$$

$$= \frac{a}{2}\left(-2t\cos\frac{t}{2} + 4\sin\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{\pi} - a\int_0^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= 2a - 2a\int_0^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}\,d\left(\sin\frac{t}{2}\right) = 2a - 2a\cdot\frac{\sin^3\frac{t}{2}}{3}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{4a}{3},$$

$$y_0 = \frac{a}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}\,dt = \frac{4a}{3}.$$

3-мысал. Тығыздығы 1-ге тең $x^2 + y^2 = R^2$ шеңбердің диаметрі бойынша момент инерциясын анықтайық.

Шешуі. Шеңбердің кез келген диаметрін алайық және шеңбердің бойындағы кез келген $M(x,y)$нүктеден осы диаметрге дейінгі арақашықтықты $d(x,y)$ деп белгілейік. Енді поляр координат жүйеге көшейік: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, онда поляр координат жүйедегі шеңбердің теңдеуі $\rho = R$ болады. Онда іздестіріп отырған инерция момент мына формуладан анықталады: $J = \int_L d^2(x,y)\,dl$. Алынған шеңбердің диаметрі OX осімен φ_0 бұрыш түзесін, $\varphi_0 \in [0;\pi)$, сонда:

$$d(x,y) = d(R\cos\varphi, R\sin\varphi) =$$

$$= R\sqrt{(\cos\varphi - \cos\varphi_0)^2 + (\sin\varphi - \sin\varphi_0)^2} = R(2 - 2\cos(\varphi-\varphi_0)) = R\sin(\varphi - \varphi_0),$$

$$J = R^2\int_0^{2\pi}\sin^2(\varphi-\varphi_0)\sqrt{R^2}\,d\varphi = R^3\int_0^{2\pi}\sin^2(\varphi-\varphi_0) =$$

$$= \frac{R^3}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2(\varphi-\varphi_0))\,d\varphi = \pi R^3.$$

Сұрақтар мен тапсырмалар:

1. Тығыздығы $\rho(x,y)=3$-ке тең $x=a\cos t,\quad y=b\sin t$ қисық сызықтың массасын есепте, $t\in[0,2\pi]$.

2. Есепте: $\int\limits_L y^2dl$, мұндағы $L:\ x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$ циклоиданың бір аркасы, $t\in[0,2\pi]$.

11.4. Екінші текті қисық сызықты интегралдың анықтамасы және оның бар болуы

Бізге түзуленуші тұйықталмаған $AB=L$ қисық сызық параметр теңдеумен берілсін:

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t),\ t\in[\alpha;\beta], \tag{11.8}$$

мұнда $A=A(\varphi(\alpha),\psi(\alpha)),\ B=B(\varphi(\beta),\psi(\beta))$ және осы қисық сызық бойында анықталған әрі үзіліссіз $\rho(x,y)$ пен $Q(x,y)$ функцияларын қарастырайық.

Енді $[\alpha;\beta]$ сегментті $\alpha=t_0<t_1<t_2<...<t_n=\beta$ нүктелерімен n бөлікке бөліктейік, онда AB қисық сызығы да сәйкес A нүктеден B нүктеге қарай $A=A_0,A_1,A_2,...,A_n=B$ нүктелермен n доғаларға бөліктенеді. Әрбір A_iA_{i+1} доғалардың әрқайсысынан еркімізше $\overline{A}_i(\overline{x}_i,\overline{y}_i)$ нүктені алайық, мұндағы

$$\overline{x}_i=\varphi(\overline{t}_i),\ \overline{y}_i=\psi(\overline{t}_i),\ \overline{t}_i\in[t_i;t_{i+1}].$$

Осы доғаның ұзындығы Δl_i, яғни

$|A_iA_{i+1}|=\Delta l_i,\ \Delta x_i=x_{i+1}-x_i,\ \Delta y_i=y_{i+1}-y_i,\ \ i=\overline{1,n},\ \Delta l=\max\{\Delta l_i\}$

болсын.

Төмендегі екі интеграл қосындыны қарастырайық:

$$J_1(\overline{A}_i,A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(\overline{x}_i,\overline{y}_i)\cdot\Delta x_i,\quad J_2(\overline{A}_i,A_i)=\sum_{i=1}^{n}Q(\overline{x}_i,\overline{y}_i)\cdot\Delta y_i \tag{11.9}$$

Анықтама. Егер $\Delta l\to 0$ болғанда $J_k(\overline{A}_i,A_i)$ интеграл қосындылардың шектері бар болса, онда ол шектер сәйкес $P(x,y)$ және $Q(x,y)$ функциялардың L қисық сызық (L контурдың) бойымен алынған **екінші ретті қисық сызықты интегралдары** деп аталады ($k=1,2$) және былай белгіленеді:

$$\lim_{\Delta l\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\overline{x}_i,\overline{y}_i)\Delta x_i=J_1=\int\limits_{AB}P(x,y)dx,$$

$$\lim_{\Delta l \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\Delta y_i = J_2 = \int_{AB} Q(x, y)dy.$$

Жалпы түрде $J = J_1 + J_2$ қосынды мына түрде жазылады:

$$J = \int_{AB} P(x, y)dx + \int_{AB} Q(x, y)dy = \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Жалпы түрде, кеңістіктегі AB қисық сызығы

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = x(t),$$

$$t \in [\alpha; \beta],\ A = A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha), x(\alpha)), B = B(\varphi(\beta), \psi(\beta), x(\beta))$$

теңдеуімен берілсе, онда екінші текті интеграл мына түрде белгіленеді:

$$J = \int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

Егер AB тұйық қисық сызық болса, яғни A нүкте B нүктемен беттессе, онда екінші текті қисық сызықты интеграл былай белгіленеді:

$$J = \oint_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz. \qquad (11.10)$$

11.2-теорема. Егер (11.8) теңдеумен берілген AB тегіс қисық сызықтың ерекше нүктелері жоқ болса және $P(x, y)$, $Q(x, y)$ функциялары AB қисық сызық бойында үзіліссіз болса, онда мына теңдік орындалады:

$$\int_{AB} P(x, y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t))\varphi'(t)dt$$

$$\int_{AB} Q(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(x(t), y(t))\psi'(t)dt, \qquad (11.11)$$

Яғни, екінші текті қисық сызықты интеграл анықталған интеграл арқылы есептеледі.

Жалпы түрде (11.11) формула мына түрде жазылады:

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) +$$

$$+ Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)]dt. \qquad (11.11)'$$

Теореманың дәлелденуі бірінші текті қисық сызықты интегралдағы 11.1-теореманың дәлелдеуімен бердей.

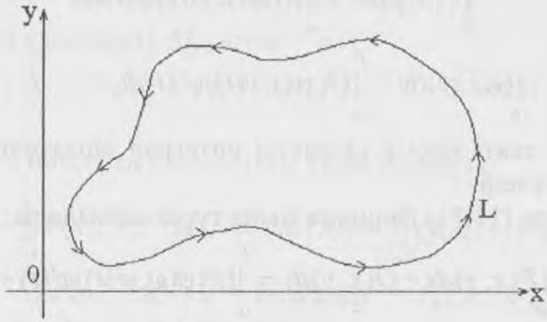
Екінші текті қисық сызықты интегралдың бірінші текті қисық сызықты интегралдан айырмашылығы мынада: екінші текті қисық сызықты интегралдың интеграл қосындысын анықтағанда функцияның $\overline{A}_i$ нүктедегі мәнін A_iA_{i+1} доғаның $\left(\overline{A}_i \in A_iA_{i+1}\right)$ ұзындығына емес, осы доғаның Ox, Oy, Oz осьтеріндегі проекциялары осы доғаның бағытына тәуелді. Сондықтан, егер AB қисық бойымен A нүктеден B нүктеге қарай интегралдағанда $+\Delta x_i, +\Delta y_i, +\Delta z_i$ болсын, енді B нүктеден A нүктеге қарай интегралдағанда $-\Delta x_i, -\Delta y_i, -\Delta z_i$ болады. Демек, мына теңдіктер орындалады:

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx = -\int_{BA} P(x,y,z)dx, \quad \int_{AB} Q(x,y,z)dy = -\int_{BA} Q(x,y,z)dy,$$

$$\int_{AB} R(x,y,z)dz = -\int_{BA} R(x,y,z)dz.$$

Сонымен, мына тұжырымға келеміз: екінші текті қисық сызықты интеграл L тұйық қисық сызықтың бастапқы нүктесіне тәуелді емес, ал ол тұйық қисық сызықтың бағытына тәуелді. Демек, L тұйық қисық сызық болса, онда L сызықтың бойымен бағытталған екі бағыттың бірі **оң бағыт** деп аталады (*11.7-сурет*), егер біз тұйық сызық бойымен қозғалғанымызда тұйық қисық сызықтың ішкі нүктелері үнемі біздің сол жағымызда қалып отырса; ал егер тұйық сызықтың ішкі нүктелері үнемі біздің оң жағымызда қалып отырса, онда ол бағыт **сол бағыт** деп аталады.

Жоғарыдағы екінші текті қисық сызықты интеграл оң бағыт бойымен интегралданды деп есептейміз.



11.7-сурет

Бірінші текті қисық сызықты интегралға анықталған интегралдың қасиеттері екінші текті интегралға да орындалады, бірақ та анықталған интегралдың модулін бағалау (*11.7-тақырып, 4-ескерту*), орта мән туралы теорема (*11.5-тақырып, 5-мысалды қара*) қасиеттері орындалмайды.

Екінші текті қисық сызықты интегралды жалпы түрде (11.11) формула бойынша есептейміз, яғни

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta}[P(\varphi(t),\psi(t),x(t))\varphi'(t) +$$
$$+Q(\varphi(t),\psi(t),x'(t))\psi'(t) + R(\varphi(t),\psi(t),\kappa(t))x'(t)]dt.$$

Сонымен, екінші текті қисық сызықты интеграл анықталған интегралға келтірілді. Енді екінші текті қисық сызықты интегралды есептегенде практикада жиі кездесетін жағдайларға тоқталайық.

Егер AB қисық сызық $y = f(x)$ функциямен берілсе, мұндағы $x \in [a;b]$, $x = a$ мәні қисық сызықтың бастапқы A нүктесі, ал $x = b$ мәні соңғы B нүкте, онда мына теңдік орындалады:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{a}^{b}[P(x,f(x)) + Q(x,f(x))f'(x)]dx. \quad (11.12)$$

Егер AB қисық сызық $y = y_0 - const$ түзу болса, онда қисық сызық бойында $y' = 0$, онда:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{a}^{b} P(x,y_0)dx. \quad (11.12)'$$

Егер AB қисық сызық $x = g(y)$ функциясымен берілсе, мұнда $y \in [c,d]$, $y = c$ нүктеге қисық сызықтың A бас нүктесі, ал $y = d$ нүктеге соңғы B нүкте сәйкес келеді, онда:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{c}^{d}[P(g(y),y)g'(y) + Q(g(y),y)]dy. \quad (11.13)$$

Осы сияқты, егер AB қисық сызық $x = x_0$ түзу болса, онда

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} Q(x_0,y)dy. \quad (11.13)'$$

11.5. Бірінші мен екінші текті қисық сызықты интегралдар арасындағы байланыс

Екінші текті қисық сызықты интегралды физика тұрғыда қарайық. Жазық облысты жазық күш өрісі деп қарастырайық және күш өрістің әрбір $M(x,y)$ нүктесіне $\vec{F}(x,y)$ күші әсер етсін. $\vec{F}(x,y)$ күштің OX пен OY осьтеріндегі проекцияларын сәйкес $P(x,y)$, $Q(x,y)$ деп белгілейік. Енді осы күш өрісінің әсерінен нүктенің AB бойымен қозғалғандағы жұмысты есептейік. Егер $\vec{F}(x,y)$ күш тұрақты (айнымалы), AB түзу сызық (қисық сызық) болса (күш

A-дан B нүктеге қарай әсер етеді), онда атқарылатын жұмыс $\vec{F}(x,y)$ вектормен AB вектордың скаляр көбейтіндісіне тең, яғни $(\vec{F};\, AB) = P(x,y)\Delta x_i + \; + Q(x,y)\Delta y_i$, мұндағы Δx пен Δy сандары $\vec{A}B$ вектор-дың координаттары. Демек, AB қисық сызық бойымен қозғалыстың бағыты өзгергенде атқарылатын жұмыстың күш өрісі де AB қисық сызық бойымен қарама-қарсы таңбаға өзгереді.

Енді осы қисық сызықты интегралдардың арасындағы байланысты қарастырайық. Бізге AB қисық сызығы (11.8) теңдеуімен берілсін және $P(x,y)$, $Q(x, y)$ функциялары AB сызықтың бойында анықталсын.

11.3-теорема. Егер бөлікті тегіс AB қисық сызықтың бойында $P(x,y)$, $Q(x, y)$ функциялары бөлікті үзіліссіз болса және $\bar{e} = \{\cos\alpha;\, \sin\alpha\}$ -бірлік векторы AB қисық сызықтың $M(x,\; y)$ нүктесіне жүргізілген жанама вектор әрі оның бағыты A-дан B нүктеге қозғалған бағытқа бағыттас болса, онда мына теңдік орындалады:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} (P(x,y)\cos\alpha + $$

$$+ Q(x,y)\sin\alpha)dl = \int\limits_{AB} (\bar{a};\bar{e})dl, \qquad (11.14)$$

мұндағы $\alpha = \alpha(M)$ бұрышы $M(x,y)$ нүктедегі $\bar{e}$ вектормен OX осі арасындағы бұрыш, $(\bar{a};\bar{e})$ – скаляр көбейтінді,

$$\bar{a} = P(x,\; y)\bar{i} + Q(x,y)\bar{j} = \; _=\{P(x,y);\; Q(x,y)\}.$$

Осылайша, $M(x,y)$ нүктенің қисық сызық бойымен қозғалу (айналу) бағытын анықтауды **қиысық сызықтың бағытын бағдарлау** дейміз.

Дәлелдеуі. Теореманы

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx = \int\limits_{AB} P(x,y)\cos\alpha(M)dl$$

теңдігін дәлелдеумен шектелейік. Берілген $\int\limits_{AB} P(x,y)dx$ интегралы екінші текті қисық сызықты интегралдың анықтамасы бойынша

$$J(\bar{A}_i, A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\Delta x_i$$

интеграл қосындының шегі. Осы қосындыны төмендегі қосындымен салыстырайық (бұл қосындылардың екеуі де бір бөліктеуге сәйкес келеді):

$$J^*(\overline{A}_i, A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(\overline{x}_i,\overline{y}_i)\cos\alpha(M_i)\Delta l_i$$

және оның шегі $\int\limits_{AB}P(x,y)\cos\alpha\, dx$ болсын.

Егер $x=\varphi(l)$ болса, онда AB қисық сызықтың әрбір $M(x, y)$ нүктесіне мына теңдік орындалады: $\frac{\partial x}{\partial l}=\cos\alpha(M)$ және $\Delta x_i=\int\limits_{l_{i+1}}^{l_i}\cos\alpha dl$. Анықталған интегралдың орта мән туралы теорема бойынша $A_i\, A_{i+1}$ доғаның бойынан $\overline{M}_i$ нүкте табылып,

$$\Delta x_i=\cos\alpha(\overline{M}_i)\Delta l_i$$

теңдігі орындалады. Онда:

$$|J(\overline{A}_i, A_i)-J^*(\overline{A}_i, A_i)|=$$

$$=|J(\overline{A}_i, A_i)-J^*(\overline{A}_i, A_i)|=$$

$$=\left|\sum_{i=1}^{n}P(\overline{x}_i,\overline{y}_i)\Delta x_i-\sum_{i=1}^{n}P(\overline{x}_i,\overline{y}_i)\cos\alpha(M_i)\Delta l_i\right|=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\sum\limits_{i=1}^{n}P(\overline{x}_i,\overline{y}_i)\cos\alpha(\overline{M}_i)\Delta l_i-\\ -\sum\limits_{i=1}^{n}P(\overline{x}_i,\overline{y}_i)\cos\alpha(M_i)\Delta l_i\end{array}\right|=$$

$$=\left|\sum_{i=1}^{n}P(\overline{x}_i,\overline{y}_i)[\cos\alpha(\overline{M}_i)-\cos\alpha(M_i)]\cdot\Delta l_i\right|\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}|P(\overline{x}_i,\overline{y}_i)|\cdot|\cos\alpha(\overline{M}_i)-\cos\alpha(M_i)|\cdot\Delta l_i$$

теңсіздігі орындалады. Бөлікті тегіс үзіліссіз AB қисық сызық бойында $\cos\alpha(M)$ функция үзіліссіз әрі бірқалыпты үзіліссіз, олай болса, кез келген $\varepsilon>0$ саны үшін және қисық сызықты қажеттілігінше (мейлінше) аз бөліктерге бөлгенде

$$|\cos\alpha(\overline{M}_i)-\cos\alpha(M)|<\varepsilon$$

теңсіздігі орындалады. Онда

$$|J(\overline{A}_i, A_i)-J^*(\overline{A}_i, A_i)|\le c\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\Delta l_i=c\varepsilon l,$$

мұндағы $c = \sup|P(x,y)|$, l саны AB қисық сызықтың ұзындығы. Демек, егер $J^*(\overline{A}_i, A_i)$ интеграл қосындының шегі бар болса, онда $J(\overline{A}_i, A_i)$ интеграл қосынды да осы шекке ұмтылады. Теорема дәлелденді.

Егер кеңістіктегі AB қисық сызық параметр теңдеуімен берілсе:

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \kappa(t),$$

$$A = A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha), \kappa(\alpha)),\ B = B(\varphi(\beta), \psi(\beta), \kappa(\beta)),$$

онда екінші мен бірінші текті қисық сызықты интеграл арасындағы байланыс мына түрде өрнектелінеді:

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_{AB} [P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta +$$

$$+ R(x,y,z)\cos\gamma]dl = \int_{AB} (\overline{a};\overline{e})dl, \qquad (11.15)$$

мұндағы

$\overline{a} = P(x,y,z)\overline{i} + Q(x,y,z)\overline{j} + R(x,y,z)\overline{k}$, $\overline{e} = \cos\alpha\cdot\overline{i} + \cos\beta\,\overline{j} + \cos\gamma\,\overline{k}$, α, β, γ бұрыштар қисық сызықтағы $M(x,y,z)$ $(M(x,y,z) \in AB)$ нүктеге жүргізілген жанаманың сәйкес OX, OY, OZ осьтерімен түзейтін бұрыштары.

Ескерту. $P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma$ өрнекті $\vec{F} = \{P(x,y,z); Q(x,y,z); R(x,y,z)\}$ векторы мен $\overline{e} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$– бірлік векторларының скаляр көбейтіндісі ретінде қарастыруға болады, яғни AB қисық сызықтың жанамасына түсірілген $\vec{F}$ вектордың проекциясы. Осы проекцияны F_e таңбамен белгілейік, онда (11.15) формуланы ескеріп, екінші текті қисық сызықты интегралды мына түрде жазуға болады:

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int_{AB} F_e dl = \int_{AB} (\vec{F}; \overrightarrow{dl}), \qquad (11.16)$$

мұндағы $\overrightarrow{dl} = \{dl\cos\alpha;\ dl\cos\beta;\ dl\cos\gamma\} = \{dx; dy; dz\}$.

Енді екінші текті қисық сызықты интегралды физика есептеріне қолданайық.

Мысалдар. 1. Егер $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\overline{i} + Q(x,y)\overline{j}$ күші массасы 1-ге тең материалды денені A нүктеден B нүктеге қарай AB қисық сызық бойымен қозғағанда атқарылатын жұмыс мына формуламен анықталады:

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

осы сияқты кеңістікте $\vec{F}(x,y) = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}$ күш атқаратын жұмысты мына формуладан есептейміз:

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

2. Егер жазықтықтың $M(x,y)$ нүктесіндегі сұйық тасқынының жылдамдығы $\bar{c} = \{u(x,y); v(x,y)\}$ болса, онда бірлік уақытта тұйық D облыстан ағып шығатын сұйық заттың Q мөлшері мына формуладан анықталынады:

$$Q = \int_{AB} (\bar{c};\bar{n})dl,$$

мұндағы $\bar{n}$ берілген AB қисықтың бойындағы $M(x,y)$ нүктеге жүргізілген сыртқы нормаль вектор. Егер де, AB қисық сызыққа жүргізілген $\bar{e}$ жанаманың бағыты оң бағыт болса, ал α бұрышы $\bar{e}$ векторы мен Ox осінің арасындағы бұрыш болса, онда

$$\bar{n} = \{\cos(\alpha - \frac{\pi}{2});\ \sin(\alpha - \frac{\pi}{2})\} = \{\sin\alpha;\ -\cos\alpha\}, \quad (\bar{c},\bar{n}) = u\cos\alpha - v\sin\alpha$$

теңдіктері орындалады. Олай болса, (11.14) теңдікті ескеріп, Q сұйықтың мөлшерін екінші текті қисық сызықты интеграл арқылы есептейміз:

$$Q = \int_{AB} \left(-v(x,y)\cos\alpha + u(x,y)\sin\alpha\right)dl = \oint_{L} -v(x,y)dx + u(x,y)dy,$$

мұндағы L таңба – D облыстың шекарасы.

3. Тұйық $L = AB$ өткізгіштің бойымен J ток әсерінен болған магнит өрісіндегі $\vec{B} = \{B_x; B_y; B_z\}$ магнит индукцияны $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктеде есептейік (токтың бағыты L контур бойынша интегралдау бағытымен бағыттас болсын).

Берілген L қисық сызықты токтың бағытымен бағыттас болатындай A нүктеден B нүктеге қарай $A = A_0, A_1, ..., A_n = B$ нүктелермен A_0A_1, $A_1A_2, ...,$ $A_{n-1}A_n$ кіші доғаларға бөлейік және $A_i\,A_{i+1}$ доғадан еркімізше $\bar{A}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ нүктені алайық. Әрбір $A_i\,A_{i+1}$ доғаны A_iA_{i+1} кесіндіге (түзу сызыққа) алмастырайық. Онда Био-Савар заңы бойынша A_iA_{i+1} кесіндіден ағып өткенде J электр токтың әсерінен магнит өрісі пайда болады, осы магнит өрісінің M_0 нүктедегі индукциясы мына формуламен анықталады:

$$\Delta B_i = \{\Delta B_{ix}; \Delta B_{iy}; \Delta B_{iz}\} = \frac{\gamma \cdot J}{r^3}[\overrightarrow{A_i A_{i+1}}; \bar{r}_i],$$

мұндағы γ – тұрақты сан,

$$r = |\bar{r}_i|, \ \bar{r}_i = \overline{M_0 A_i} = \{x_i - x_0; y_i - y_0; z_i - z_0\},$$

векторлық көбейтінің таңбасы $[\cdot;\cdot]$ – векторлық көбейтінді,

$$\overrightarrow{A_i A_{i+1}} = \{\bar{x}_i - x_0; \bar{y}_i - y_0; \bar{z}_i - z_0\} = \{\Delta x_i; \Delta y_i; \Delta z_i\}.$$

Онда:

$$[\overrightarrow{A_i A_{i+1}}; \bar{r}_i] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \Delta x_i & \Delta y_i & \Delta z_i \\ \bar{x}_i - x_0 & \bar{y}_i - y_0 & \bar{z} - z_0 \end{vmatrix} =$$

$$= \{(\bar{z}_i - z_0)\Delta y_i - (\bar{y}_i - y_0)\Delta z_i; (\bar{x}_i - x_0)\Delta z_i - $$
$$- (\bar{z}_i - z_0)\Delta x_i; (\bar{y}_i - y_0)\Delta z_i - (\bar{x}_i - x_0)\Delta y_i\}.$$

Осыдан:

$$\Delta B_{ix} = \frac{\gamma \cdot J}{r_i^3}[(\bar{z}_i - z_0)\Delta y_i - (\bar{y}_i - y_0)\Delta z_i],$$

$$\Delta B_{iy} = \frac{\gamma \cdot J}{r_i^3}[(\bar{x}_i - x_0)\Delta z_i - (\bar{z}_i - z_0)\Delta x_i],$$

$$\Delta B_{iz} = \frac{\gamma \cdot J}{r_i^3}[(\bar{y}_i - y_0)\Delta x_i - (\bar{x}_i - x_0)\Delta y_i].$$

Соңғы $\Delta \vec{B}_i$ вектордың координаттарынан i бойынша 1-ден n-ге дейін қосынды алайық және одан $\max\{\Delta l_i\} = \Delta l \to 0$ болғанда шекке көшейік (Δl_i таңба $A_i A_{i+1}$ доғаның ұзындығы), сонда

$$B_x = \gamma J \oint_L \frac{(z - z_0)dy - (y - y_0)dz}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}},$$

$$B_y = \gamma J \oint_L \frac{(y - y_0)dz - (z - z_0)dx}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}},$$

$$B_z = \gamma J \oint_L \frac{(y - y_0)dx - (x - x_0)dy}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}.$$

Енді $\vec{r} = \{x - x_0; \ y - y_0; \ z - z_0\}$, $\overrightarrow{dl} = \{dx; dy; dz\}$ болсын, онда магнит индукцияның $\bar{B} = \{B_x \bar{i}; \ B_y \bar{j}; \ B_z \bar{k}\}$ векторын мына түрде жазуға болады:

$$\vec{B} = \gamma J \oint_L \frac{[\vec{dl}; \vec{r}]}{r^3}.$$

4. $\int_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$ екінші текті қисық сызықты интегралды $L : y = x^2, \ -1 \le x \le 1$ парабола бойымен параметрдің өсу бағыты бойынша есептейік.

Шешуі. Бұл жағдайда (11.12) формуланы пайдаланамыз:

$$dy = 2xdx, \quad \int_L \left(x^2 - 2xy\right)dx + \left(y^2 - 2xy\right)dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[x^2 - 2x^3 + \left(x^4 - 2x^3\right) \cdot 2x\right]dx = -\frac{11}{3}.$$

5. $\int_L \left(x^2 + y^2\right)dx + \left(x^2 - y^2\right)dy$ қисық сызықты интегралды $L : \ y = \ = 1 - |1 - x|, \ 0 \le x \le 2$ түзуі бойымен параметрдің өсу бағыты бойынша интегралдайық.

Шешуі. Алдымен L түзуді мына түрге түрлендірейік:

$$x \ge 1, \ |1 - x| = x - 1: \quad y = 2 - x;$$

$$x < 1, \ |1 - x| = 1 - x: \quad y = x;$$

$$y = \begin{cases} x, \ 0 \le x \le 1, \\ 2 - x, \ 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Сонда L түзу бойымен алынған интеграл екі L_1 мен L_2 түзулер бойымен алынған интегралдардың қосындысына тең болады, мұндағы $L_1 : \ y = x, \ 0 \le x \le 1;$ $L_2 : \ y = 2 - x, 1 \le x \le 2$ және L_1 мен L_2 түзулер бойымен алынған екінші текті қисық сызықты интегралдарды (11.12) формула бойынша есептейміз:

$$\int_{L_1} \left(x^2 + y^2\right)dx + \left(x^2 - y^2\right)dy = \int_0^1 \left(x^2 + x^2 + x^2 - x^2\right)dx = 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3},$$

$$\int_{L_2} \left(x^2 + y^2\right)dx + \left(x^2 - y^2\right)dy = \int_1^2 [\, x^2 + (2 - x)^2 - x^2 +$$

$$+ (2 - x)^2 \,] dx = 2\int_1^2 (2 - x)^2 dx = \frac{2}{3}.$$

$$\int_L \left(x^2 + y^2\right)dx + \left(x^2 - y^2\right)dy = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

6. $\oint\limits_L (x+y)dx+(x-y)dy$ қисық сызықты интегралды сағат тілінің бағытына қарама-қарсы бағытта $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ эллипс бойымен интегралдайық.

Шешуі. Эллипстің параметр теңдеуін алайық:

$$x=a\cos t,\ y=b\sin t,\ t\in[0,2\pi],\ \ x'=-a\sin t,\ y'=b\cos t.$$

Енді $(11.11)'$ формуланы пайдаланайық, сонда

$$\oint\limits_L (x+y)dx+(x-y)dy=\int\limits_0^{2\pi}[(-a\cos t-b\sin t)a\sin t+$$

$$+(a\cos t-b\sin t)b\cos t]dt=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}[-a^2\cos t\sin t-ab\sin^2 t+ab\cos^2 t-b^2\sin t\cos t]dt=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left[-\frac{a^2+b^2}{2}\sin 2t+ab\cos 2t\right]dt=$$

$$=\left(\frac{a^2+b^2}{4}\cos 2t+\frac{ab}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=0.$$

7. $\int\limits_L (2a-y)dx+xdy$ қисық сызықты интегралды сағат тілінің қарама-қарсы бағытында $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ циклоида бойымен интегралдайық, $t\in[0,2\pi]$.

Шешуі. $(11.11)'$ формуланы пайдаланамыз:

$$x'=a(1-\cos t),\ \ y'=a\sin t,$$

$$\int\limits_L (2a-y)dx+xdx=\int\limits_0^{2\pi}\{[2a-a(1-\cos t)]a(1-\cos t)+$$

$$+a(t-\sin t)a\sin t\}dt=$$

$$=a^2\int\limits_0^{2\pi}[(1+\cos t)(1-\cos t)+t\sin t-\sin^2 t]dt=$$

$$=a^2\int\limits_0^{2\pi}t\sin t dt==a^2(t\cos t+\sin t)\Big|_0^{2\pi}=-2\pi a^2.$$

8. Екінші текті қисық сызықты интегралға анықталған интегралдағы орта мән туралы теорема орындалмайтынын тексерейік, яғни

$$\int_{AB} P(x,y)dx \neq P(x_0,y_0)\int_{AB} dx,$$

мұндағы AB – тегіс қисық сызық, $P(x,y)$ функция AB сызықтың бойында үзіліссіз, $M_0(x_0,y_0)$ нүкте AB сызықтың бойындағы нүкте.

Шешуі. $AB = \{x^2+y^2=1,\ x \leq 0\}$ – жарты шеңбер, контурдың бағыты $A(0,1)$ нүктеден $B(0,-1)$ нүктеге қарай бағытталсын және жарты шеңбер бойында $P(x,y)=y$ болсын. Осы жарты шеңбердің параметр теңдеуін қарастырайық:

$$x=\cos t,\ y=\sin t,\ t\in[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}].$$

Сонда:

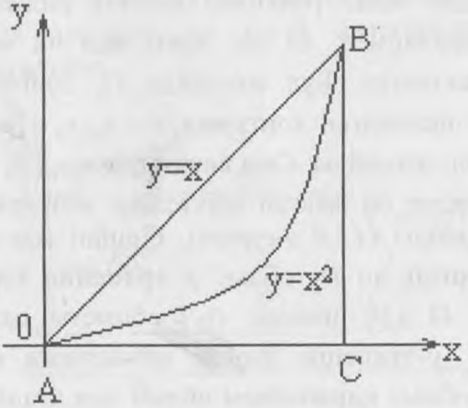
$$\int_{AB} P(x,y)dx = \int_{AB} ydx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin t\cos t dt = -\frac{\pi}{2};\ \int_{AB} dx = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin t dt = 0 \neq -\frac{\pi}{2}.$$

Демек, AB қисық сызық бойынан

$$\int_{AB} P(x,y)dx = P(x_0,y_0)\int_{AB} dx$$

теңдігі орындалатынай $M_0(x_0,y_0)$ нүкте табылмайды.

9. $\int 2xydx + x^2dy$ қисық сызықты интегралды $y=x$ түзу, $y=x^2$ парабола және $y=0,\ x=1$ түзулері бойымен жеке-жеке $A(0,0)$ нүктеден $B(1,1)$ нүктеге дейін интегралдайық (*11.8-сурет*).



11.8-сурет

Шешуі. а) Алдымен $y=x$ түзу бойымен интегралдайық, $y'=1$. (11.12) формуладан:

$$J_a=\int_0^1\left(2x^2+x^2\right)dx=3\int_0^1 x^2dx=1.$$

ә) $y=x^2$ парабола бойымен, $y'=2x$.

$$J_б=2\int_0^1\left(x^3+x^3\right)dx=4\int_0^1 x^3dx=1.$$

б) $y=0,\ x=1$ түзулер бойымен, яғни сынық ACB түзу бойымен интегралдайық. Сонда $J_б=J_{AC}+J_{CB}$.

$$AC:\quad y=0,\ y'=0,\ 0\le x\le 1;$$

$$J_{AC}=\int_{AC}2xydx+x^2dy=\int_0^1\left(2x\cdot 0+x^2\cdot 0\right)dx=0;$$

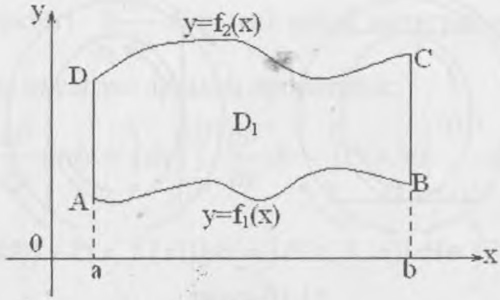
$$CB:\quad x=1,\ x'=0,\ 0\le y\le 1;$$

$$J_{CB}=\int_{CB}2xydx+x^2dy=\int_0^1(2\cdot 1\cdot y\cdot 0+1)dy=1.$$

Сонымен, $J_б=1$, демек, $J_a=J_б=J_в=1$.

11.6. Грин формуласы

Алдымен қарапайым, бір байланысты, көп байланысты облыстардың анықтамаларына тоқталайық. *11.9 а-суретте* тұйық D_1 облыс жоғарыдан және төменнен бөлікті үзіліссіз $y=f_1(x)$ пен $y=f_2(x)$ функциялармен, ал сол жағы мен оң жағы $x=a,\ x=b$ түзулерімен шектелген. Бұл жағдайда D_1 облыстың жоғарыдан және төменнен шектелген контурын $x=x_0, x_0\in[a;b]$ түзуі екіден артық нүктелерде қимайды. Осы сияқты, $y=y_0, y_0\in[c;d]$ түзуі D_2 облыстың сол және оң жақтан шектелген контурын екіден артық нүктелерде қимайды (*11.9 ә-сурет*). Бірінші жағдайда D_1 облыс x**-трапеция тәрізді,** ал D_2 облыс y**-трапеция тәрізді облыс** деп аталады. Егер D (D_1 немесе D_2) облысты саны санаулы не x-трапеция не y-трапеция тәрізді облыстарға бөлуге болатын болса, онда ол облыс **қарапайым облыс** деп аталады. D облысты саны санаулы



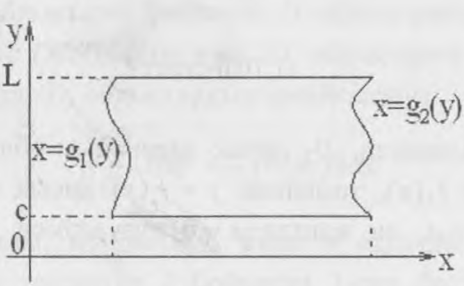
11.9 а-сурет

облыстарға бөлгенде облыстардың ішкі нүктелері ортақ болмауы керек. Мысалы, тік төртбұрыш, үшбұрыш, дөңгелек, сақина, т.б. қарапайым облыстарға жатады. *11.10 а-суретте* сақинаны x-трапеция, ал *11.10 ә-суретте* y-трапеция тәрізді облыстарға бөлу бейнеленген.

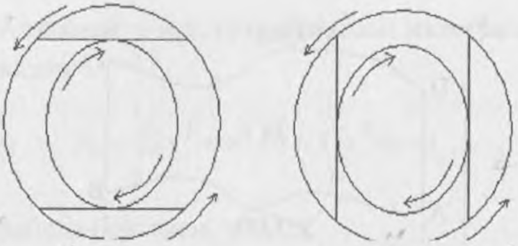
Жазықтықтағы D облыс **бір байланысты облыс** деп аталады, егер кез келген тұйық контурмен шектелген облыс осы облыста толық орналасса. Демек, бір байланысты облыста "тесік" болмауы керек, яғни сақина бір байланысты облыс болмайды (11.10-сурет). Мысалы, дөңгелек, үшбұрыш, тіктөртбұрыш бір байланысты облысқа жатады.

Бір байланысты облыс болмайтын облыс **көп байланысты облыс** деп аталады. Мысалы, сақина көп байланысты облысқа жатады.

Енді D облыстың тұйық L контуры бойымен алынған екінші текті қисық сызықты интеграл мен осы L контурмен шектелген D облыс бойынша алынған екі еселі интегралдың арасындағы байланысты көрсетейік.



11.9 ә-сурет



а) ә)

11.10-сурет

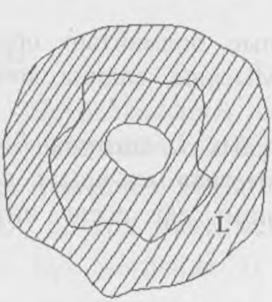
11.4-теорема. Егер $P(x,y)$ және $Q(x,y)$ функциялары және

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}, \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

дербес туындылар L контурмен шектелген D облыста үзіліссіз болса, онда **Грин формуласы** деп аталатын мына теңдік орындалады:

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy, \tag{11.17}$$

мұнда екінші текті қисық сызықты интеграл L контур бойымен оң бағытпен



11.10 б-сурет

алынады.

Дәлелдеуі. Алдымен, D_2 облыс қарапайым облыс болсын, яғни жоғарыдан $y = f_2(x)$, төменнен $y = f_1(x)$ қисық сызықтармен, ал сол жақтан $x = a$, оң жақтан $x = b$ түзулермен шектелсін (*11.9-сурет*).

(11.17) теңдіктегі $\iint\limits_{D_2}\frac{\partial P}{\partial y}dxdy$ екі еселі интегралды екінші текті қисық сызықты интеграл арқылы өрнектейік:

$$\iint\limits_{D_2}\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)}\frac{\partial P}{\partial y}dy=\int\limits_a^b P(x,y)\Bigg|_{f_1(x)}^{f_2(x)}dx=$$

$$=\int\limits_a^b[P(x,f_2(x))-P(x,f_1(x))]dx=\int\limits_a^b P(x,f_2(x))dx-\int\limits_a^b P(x,f_1(x))dx.$$

Мұндағы анықталған интегралдың әрқайсысын, сәйкес AB мен DC қисық сызықтары бойымен алынған қисық сызықты интеграл ретінде қарастыруға болады:

$$\int\limits_a^b P(x,f_2(x))dx=\int\limits_{DC}P(x,y)dx=-\int\limits_{CD}P(x,y)dx,$$

$$-\int\limits_a^b P(x,f_1(x))dx=-\int\limits_{AB}P(x,y)dx.$$

Сонда

$$\iint\limits_{D_2}\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=-\int\limits_{CD}P(x,y)dx-\int\limits_{AB}P(x,y)dx.$$

Соңғы теңдіктің оң жағына нөлге тең BC мен DA түзулері бойымен алынған екі екінші текті қисық сызықты интегралды қосайық:

$$\iint\limits_{D_2}\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=-\int\limits_{AB}P(x,y)dx-\int\limits_{BC}P(x,y)dx-\int\limits_{CD}P(x,y)dx-$$

$$-\int\limits_{DA}P(x,y)dx=-\int\limits_{ABCDA}P(x,y)dx. \qquad (11.18)$$

Сонымен, біз (11.18) формуланы x-трапеция тәрізді облысқа дәлелдедік. Осы формуланы саны санаулы және ішкі нүктелері ортақ емес D_i облыстарға бөлінетін D облыс үшін де дәлелдеуге болады. Ол үшін D облысты кіші D_i облыстарға бөлейік, $i=\overline{1,n}$ (*11.11-сурет*). Кіші D_i облыстардың әрқайсысына

$$\iint\limits_{D_i}\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=-\int\limits_{L_i}P(x,y)dx$$

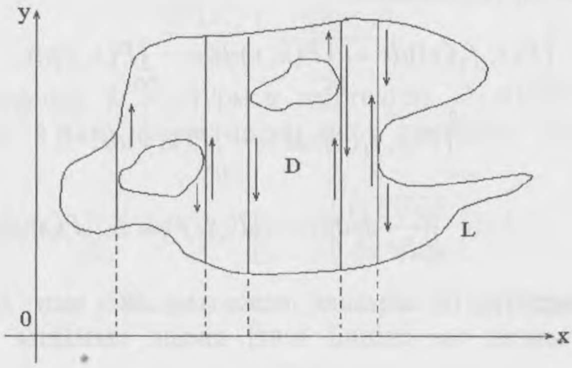
теңдік орындалады, мұндағы L_i саны – санаулы D_i облыстың контуры. Соңғы теңдіктен i бойынша 1-ден бастап n-ге дейін қосынды алайық:

$$\iint_{D_i} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int_{L_i} P(x,y)dx$$

$$\sum_{i=1}^{n} \iint_{D_i} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\sum_{i=1}^{n} \int_{L_i} P(x,y)dx.$$

Сол жағындағы қосынды бүкіл D облыс бойынша алынған екі еселі интегралға тең:

$$\iint_{D} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \sum_{i=1}^{n} \iint_{D_i} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy,$$



11.11-сурет

ал оң жағындағы қосынды L_i контур бойымен алынған қисық сызықты n интегралдардың қосындысы және L_i контурлардың әрқайсысы екі контурдан тұрады: біреуі L контурдың бөліктері, ал екіншісі D облысты саны санаулы D_i облыстарға бөліктегендегі қосымша түзу сызықтар (*11.11-сурет*). Қосымша түзу сызықтың әрқайсысының бойымен алынған қисық сызықты интеграл екеу және олардың интегралдау бағыты қарама-қарсы. Сондықтан олар жойылады да, тек қана L контурдың L_i бөліктерінің бойымен алынған интегралдардың қосындысы, яғни D облыстың L контур бойымен алынған екінші текті қисық сызықты интегралы қалады:

$$\iint_{D} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int_{L} P(x,y)dx. \tag{11.19}$$

Осылайша, алдымен $x=g_1(y)$, $x=g_2(y)$, $y=c$, $y=d$ облыспен шектелген қарапайым D_2 облыс үшін (11.11-сурет), содан соң кез келген облыс үшін мына теңдікті дәлелдеуге болады:

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_L Q(x,y)dy. \tag{11.20}$$

Енді (11.19) бен (11.20) теңдіктерді қосып, дәлелдеу керек Грин формуласын аламыз. Теорема дәлелденді.

Ескерту. 1. Грин формуласы қарапайым облыс үшін орындалып қана қоймайды, сонымен қатар бөлікті-тегіс контурмен шектелген облыс үшін де орындалады.

2. Егер Грин формуласындағы $Q(x,y)=x$, $P(x,y)=0$ ($Q(x,y)=0$, ($P(x,y)=y$) болса, онда D облыстың ауданын екі еселі интеграл арқылы есептейтін $\iint_D dxdy = S$ формуланы ескеріп, D облыстың ауданын екінші текті қисық сызықты интеграл көмегімен де есептейтін формуланы аламыз:

$$S=\oint_L xdy \qquad \left(S=-\oint_L ydx\right). \tag{11.21}$$

Егер α мен β сандары $\alpha+\beta=1$ теңдігін қанағаттандырса, онда (11.21) теңдіктің біріншісін α-ге, ал екіншісін β-ға көбейтіп және оларды қосып, D облыстың ауданын есептейтін екінші формуланы аламыз:

$$S=\oint_L \alpha\cdot xdy-\beta\cdot ydx, \quad \alpha+\beta=1. \tag{11.22}$$

Егер $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$ болса, онда $S=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx.$ Енді Гриннің екінші формуласын қорытып шығарайық.

11.5-теорема. Егер тұйық D облыс тегіс L қисық сызықпен шектелсе, $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ функцияларының өздері және олардың бірінші мен екінші дербес туындылары D облыста үзіліссіз болса, онда Гриннің екінші формуласы орындалады:

$$\iint_L \left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dl=\iint_D (u\,\Delta v-v\,\Delta u)dxdy, \tag{11.23}$$

мұндағы $\frac{\partial u}{\partial n}$ туынды L қисық сызықтың сыртқы нормаль бағыты бойынша алынған туынды, ол

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Лаплас операторы деп аталады, теңдіктің сол жағындағы интеграл бірінші текті қисық сызықты интеграл.

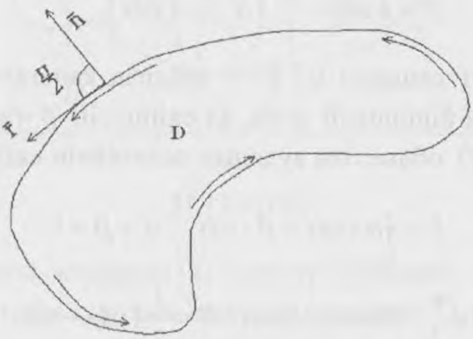
Дәлелдеуі. Алдымен мына теңдіктің орындалатынын дәлелдейік:

$$\oint_L v\frac{\partial u}{\partial n}dl = \iint_D \left(v\,\Delta u + \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy. \qquad (11.24)$$

Ол үшін L қисық сызықтың сыртқы нормаль векторының бірлік векторы $\overline{n} = \{\cos\varphi;\ \sin\varphi\}$ болсын (*11.12-сурет*) және

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos x + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi,$$

онда L қисық сызықтың жанама бойындағы бірлік векторын $\overline{r}$ таңбамен белгілейік, яғни $\overline{r} = \{\cos\alpha; \sin\alpha\}$ және $\overline{r}$ бірлік вектордың бағыты, $\overline{n}$ нормаль



11.12-сурет

векторды сағат тілі бағытына қарама-қарсы бағытта $\frac{\pi}{2}$ бұрышқа бұрғанда L контурдың оң бағытымен сәйкес келеді. Сондықтан $\alpha = \varphi + \frac{\pi}{2}$, осыдан $\cos\alpha = -\sin\varphi$, $\sin\alpha = \cos\varphi$. Осы теңдіктерді ескеріп, бірінші мен екінші текті қисық сызықты интегралдардың арасындағы байланысты өрнектейтін (11.14) формуланы мына түрде жазуға болады:

$$\oint_L v\frac{\partial u}{\partial n}dl = \oint_L \left(v\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + v\frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi \right)dl. =$$

$$= \oint_L \left(-v\frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha + v\frac{\partial u}{\partial x}\sin\alpha \right) dl = \oint_L \left(-v\frac{\partial u}{\partial y} \right) dx + \left(v\frac{\partial u}{\partial x} \right) dy.$$

Енді

$$-v\frac{\partial u}{\partial y} = P(x,y),\ v\frac{\partial u}{\partial x} = Q(x,y)$$

белгілеулерді енгізейік және $\frac{\partial Q}{\partial x}$ пен $\frac{\partial P}{\partial y}$-дербес туындыларды табайық:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-v\frac{\partial u}{dy} \right) = -\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} - v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Соңғы интегралға (11.17) Грин формуласын пайдаланайық:

$$\oint_L \left(-v\frac{\partial u}{\partial y} \right) dx + \left(v\frac{\partial u}{\partial x} \right) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy =$$

$$= \iint_D \left[v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} \right] dxdy =$$

$$= \iint_D \left[v\,\Delta u + \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} \right] dxdy. \qquad (11.24)'$$

Сонымен, (11.24) теңдік дәлелденді. Енді $u(x,y), v(x,y)$ функциялардың орындарын алмастырып, мына теңдікті аламыз:

$$\oint_L u\frac{\partial v}{\partial n} dl = \iint_D \left[u\,\Delta v + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} \right] dxdy. \qquad (11.24)''$$

Демек, $(11.24)'$ және $(11.24)''$ теңдіктерден дәлелдеу керек (11.23) теңдікті аламыз.

11.7. Екінші текті қисық сызықты интегралдың интегралдау жолына тәуелсіздігінің белгісі

Біз жоғарыдағы *11.5-тақырыпта* (*6-мысалды қара*) *A* нүкте мен *B* нүктені қосатын әртүрлі үш қисық сызықтар бойымен интегралданған екінші текті қисық сызықты үш интегралдардың мәндері тең болды. Осы нүктелерді қосатын кез келген бөлікті тегіс қисық сызықтар бойымен интегралданатын екінші текті қисық сызықты интегралдардың мәндері тең болатынын дәлелдеуге болады (*11.6-теорема*). Бұл жағдайда, екінші текті қисық сызықты интеграл **интегралдау жолына тәуелсіз** деп аталады. Демек, қисық сызықты интеграл екі нүктені қосатын қисық сызықтың жолына (түріне) тәуелді емес, ал ол осы екі нүктенің өздеріне тәуелді болады.

11.7-теорема. Егер $P(x,y)$, $Q(x,y)$ функциялары және олардың

$$\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$$

дербес туындылары бір байланысты D облыста анықталған әрі үзіліссіз болса, онда төмендегі төрт белгі эквивалентті, яғни олардың әрқайсысынан қалған үшеуін дәлелдеуге болады.

I. D облысына тиісті кез келген тұйық бөлікті-тегіс L қисық сызық бойымен алынған интеграл нөлге тең, яғни

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0. \qquad (11.25)$$

II. D облысына тиісті A мен B екі нүктені қосатын $(AB \subset D)$ кез келген AB қисық сызық бойымен алынған

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (11.26)$$

екінші текті қисық сызықты интеграл интегралдау жолына тәуелсіз.

III. $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ өрнегі $u = u(x,y)$ функцияның толық дифференциалы болады, яғни D облыста $u = u(x,y)$ функциясы табылып,

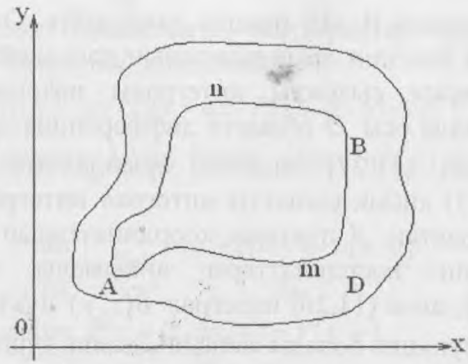
$$du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (11.27)$$

теңдік орындалады.

IV. Барлық D облыста мына теңдік орындалады:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (11.28)$$

Дәлелдеуі. Теореманы дәлелдеу үшін I белгіні орындалсын деп ұйғарып одан II белгінің орындалатынын, II-ден III белгінің, III-тен IV белгінің, IV-тен I белгінің орындалатынын дәлелдесек



11.13-сурет

жеткілікті. Демек, I-IV белгілердің эквивалентті болатыны дәлелденеді, яғни мына сұлбаны дәлелдейік: I→II→III→ IV →I. Ол үшін жазықтықтағы D облыстан еркімізше A мен B нүктелерді алайық және оларды әр түрлі екі қисық сызықпен қосайық: AmB және AnB (*11.13-сурет*). Сонда біз тұйық $AmBnA$ контур аламыз.

а) Теореманың I→II бөлігін дәлелдейік, яғни I белгі орындалғанда II белгінің орындалатынын дәлелдейік. Демек, мына теңдіктің орындалатынын дәлелдесек жеткілікті:

$$\int_{AmB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{AnB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Теореманың I белгісі бойынша, осы тұйық контур бойымен алынған екінші текті қисық сызықты интеграл нөлге тең, яғни

$$\int_{AmBnA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

Қисық сызықты интегралдың қасиеті бойынша

$$\int_{AmBnA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{AmB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy +$$

$$\int_{BnA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int_{AmB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy - \int_{AnB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

Осы теңдіктен теореманың дәлелдеу керек I→II бөлігін аламыз:

$$\int_{AmB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{AnB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

ә) Енді теореманың II→III бөлігін дәлелдейік. Ол үшін II белгі орындалғанда III белгінің орындалатынын дәлелдейік, яғни (11.26) екінші текті қисық сызықты интегралы интегралдау жолына тәуелсіз болса, онда осы D облыста дифференциалданатын $u(x,y)$ функция табылып, (11.27) теңдіктің орындалатынын дәлелдесек жеткілікті. (11.25) қисық сызықты интеграл интегралдау жолынан тәуелсіз болғандықтан, A нүктенің координаттарын тағайындайық, ал B нүктенің координаттары айнымалы болсын, яғни $A(x_0,y_0)$, $B(x,y)$, онда (11.26) интеграл $B(x,y)$ нүктеде x пен y-ке тәуелді $u(x,y)$ функция болады және оны мына түрге түрлендірейік (*11.14-сурет*):

$$\int_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=u(x,y).$$

Енді $u(x,y)$ функцияны зерттейік. Ол үшін x аргументке Δx өсімше берейік, онда:

$$u(x+\Delta x,y)-u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy-\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

Екінші текті қисық сызықты интеграл интегралдау жолына тәуелсіз болғандықтан, соңғы теңдіктегі бірінші интегралдың интегралдау жолы AB қисық сызық пен BB_1 түзуінен тұрады, ал екінші интегралдың интегралдау жолы AB қисық сызықтан тұрады. Сонда AB жол қысқарып, BB_1 жол ғана қалады, яғни

$$u(x+\Delta x,y)-u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy+$$

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy-$$

$$-\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$$

Мұнда, BB_1 түзуі бойында y айныма өзгермейді, яғни тұрақты, онда $dy=0$. Сондықтан:

$$u(x+\Delta x,y)-u(x,y)=\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P(x,y)dxdy=\int_{x}^{x+\Delta x} P(x,y)dx.$$

Соңғы теңдікке (анықталған интегралға) орта мән туралы теореманы (*6.8-тақырып*) қолданайық:

$$u(x+\Delta x, y)-u(x, y)=\Delta x\cdot P(x+\theta\cdot\Delta x, y),\ 0<\theta<1.$$

Теңдіктің екі жағын Δx-ке бөліп, одан $B(x, y)$ болғандағы шекті табайық, сонда:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x, y)-u(x, y)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}P(x+\theta\cdot\Delta x, y)=P(x, y). \tag{11.29}$$

Осы сияқты мына теңдікті аламыз:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x, y). \tag{11.30}$$

Онда (11.29) және (11.30) теңдіктерді және $u(x, y)$ функцияның толық дифференциал екендігін ескеріп, дәлелдеу керек (11.27) теңдікті аламыз, яғни

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=P(x, y)dx+Q(x, y)dy.$$

б) Енді теореманың III→IV бөлігін дәлелдейік, яғни III белгі орындалғанда, одан IV белгінің орындалатынын дәлелдесек жеткілікті.

Теореманың III белгісі орындалсын, яғни $P(x, y)dx+Q(x,\ y)dy$ өрнегі $u(x, y)$ функцияның толық дифференциалы болғандықтан,

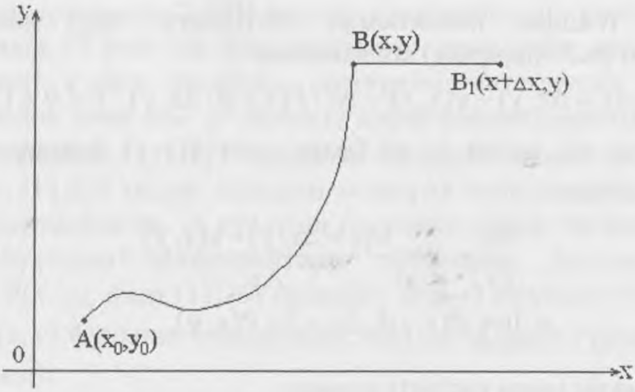
$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x, y),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=Q(x, y)$$

теңдіктері орындалады. Осыдан аралас дербес туындылардың теоремасы бойынша дәлелдеу керек (11.28) теңдікті аламыз:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},\ \ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

в) Теореманың IV→I бөлігін дәлелдейік, яғни (11.28) теңдік орындалсын және D облыстағы кез келген тұйық L контурды қарастырайық.

Теореманың шарты бойынша D бір байланысты облыс болғандықтан, L контурмен шектелген облыс D облысына тиісті



11.14-сурет

және онда (L контурмен шектелген облыста) $P(x,y), Q(x,y)$ функцияларының өздері және олардың дербес туындылары анықталған. Сондықтан,

$$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

қисық сызықты интегралға Грин формуласын қолданып, оны екі еселі интеграл арқылы өрнектейік:

$$\int\limits_L P(x,y)d + Q(x,y)dy = \iint\limits_{D'}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

мұндағы D' облысы L контурмен шектелген облыс ($D' \subset D$). Соңғы теңдіктің оң жағындағы екі еселі интеграл (11.28) формула бойынша нөлге тең, олай болса:

$$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0. \qquad (11.31)$$

Сонымен, (11.31) теңдік D облысындағы кез келген тұйық L контур үшін де орындалады (*11.14-сурет*). Теорема дәлелденді.

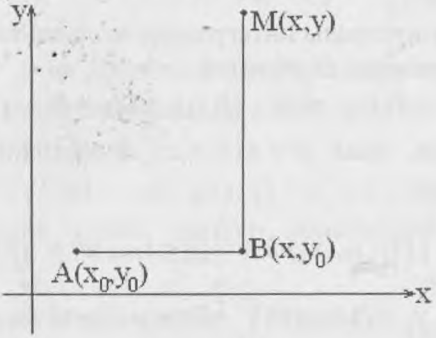
Ескерту. 1. III белгідегі $u(x,y)$ функцияны төмендегі формуладан анықтауға болады:

$$u(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(t,y)dt + Q(x_0,t)dt + C,$$

мұндағы теңдіктің оң жағындағы интеграл D облысында тағайындалған $A(x_0,y_0)$ мен $B(x,y)$ нүктелерді қосатын кез келген

L контур (L контурдың барлық нүктелері D облысына тиісті) бойымен алынған екінші текті қисық сызықты интеграл, $C-const$ (*11.15-сурет*). Көп жағдайда L контур ретінде Ox пен Oy осьтеріне параллель екі сынық түзуді қарастырған тиімді, онда жоғарыдағы екінші текті қисық сызықты интеграл анықталған интегралға түрленеді:

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(t,y)dt+Q(x_0,t)dt+C=$$
$$=\int_{x_0}^{x} P(x_0,y)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy+C. \tag{11.32}$$



11.15-сурет

2. (11.26) формуладағы интеграл астындағы $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ өрнек бірбайланысты D облыста $u(x,y)$ функцияның толық дифференциалы болсын. Егер $u=u(x,y)$ функция белгілі болса, онда

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=u(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)}=u(x_1,y_1)-u(x_0,y_0),$$

мұндағы $A_0(x_0,y_0)$ және $B_1(x_1,y_1)$ нүктелер – D облысының нүктелері.

Егер $u=u(x,y)$ белгілі болса, онда екінші текті қисық сызықты интегралдың интегралдау A_0B_1 жолына тәуелсіздігін пайдаланып, интегралдың интегралдау жолы ретінде сынық түзулерді аламыз және оларды координат параллель әрі D облыстың шекарасын қимайтындай етіп аламыз. Онда $y=y_0$ болғанда $dy=0$, $x=x_1$ болғанда $dx=0$. Сонымен мына теңдік орындалады:

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{x_0}^{x_1} P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y_1} Q(x_1,y)dy. \tag{11.33}$$

3. Кеңістіктегі $\overline{V}$ облыста интеграл астындағы $P(x,y,z)dx+$ $Q(x,y,z)dy+\ +R(x,y,z)dz$ өрнек толық дифференциал болу үшін

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}$$

теңдіктердің орындалуы қажетті әрі жеткілікті.

Бұл жағдайда, егер AB қисық сызығы $\overline{V}$ облысқа тиісті болса, онда

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

қисық сызықты интегралы интегралдау жолына тәуелсіз болады.

Егер бір байланысты D облыста

$$dw=P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

теңдік орындалса, онда $w=w(x,y,z)$ функцияны мына теңдіктен анықтауға болады:

$$w(x,y,z)=\int_{x_0}^{x} P(t,y_0,z_0)dt+\int_{y_0}^{y} Q(x,t,z_0)dt+\int_{z_0}^{z} R(x,y,t)dt+C,$$

мұндағы $M_0(x_0,y_0,z_0)$ нүкте $\overline{V}$ облысындағы тағайындалған нүкте, $C-const$.

4. Біз жоғарыда екінші текті қисық сызықты интегралға анықталған интегралдың модулін бағалау қасиеті орындалмайтынын атап өттік, дегенмен екінші текті қисық сызықты интегралға мына теңсіздік орындалады:

$$\left|\int_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy\right|\le l\,M,$$

мұндағы l саны – AB қисық сызықтың ұзындығы,

$$M=\max_{(x,y)\in D}\sqrt{P^2(x,y)+Q^2(x,y)}.$$

Шынында да, анықтық үшін D облыста AB тегіс қисық сызық болсын.

Онда бірінші мен екінші текті қисық сызықтардың арасындағы байланыс (11.14) формула бойынша

$$\left|\int_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy\right|=\left|\int_{AB} (P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\sin\alpha)dl\right|,$$

мұндағы $P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\sin\alpha$ өрнекті $\bar{a}(M) = \{P(x,y); Q(x,y)\}$ пен $\bar{e}(M) = \{\cos\alpha;\ \sin\alpha\}$ векторлардың скаляр көбейтіндісі ретінде қарастыруға болады, онда

$$\left| \int_{AB} (P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\sin\alpha) dl \right| \le \int_{AB} \left| P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\sin\alpha \right| dl =$$

$$= \int_{AB} \left| (\bar{a}(M);\ \bar{e}(M)) \right| dl \le \int_{AB} \left| \bar{a}(M) \right| \cdot \left| \bar{e}(M) \right| dl \le$$

$$\le \max_{(x,y)\in D} \sqrt{P^2(x,y) + Q^2(x,y)} \cdot \int_{AB} dl = M\,l.$$

1-мысал. Грин формуласын пайдаланып,

$$J = \int_{AO} \left(e^x\, sin\, y - qy\right)dx + \left(e^x\, cos\, y - q\right)dy$$

интегралды $x^2 + y^2 = ax$ шеңбердің жоғарғы жарты бөлігінің AO контуры бойымен интегралдайық, мұндағы $A(a,0)$, $O(0,0)$ (*11.16-сурет*).

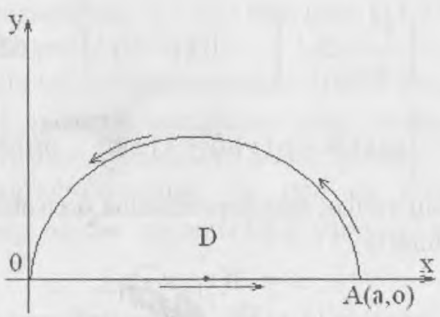
Шешуі. $P(x,y) = e^x \sin y - qy$, $Q(x,y) = e^x \cos y - q$. Интегралдың интегралдау контуры тұйық контур болатындай Ox осімен толықтырайық, онда

$$J = \oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy - \int_{OA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (11.17)$$

Грин формуласындағы

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = e^x \cos y - e^x \cos y + q = q.$$

Осыдан:



11.16-сурет

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D q dxdy,$$

мұндағы D облысы $x^2 + y^2 = ax,\ x \ge 0,\ y \ge 0$ дөңгелек, $R = \dfrac{a}{2}$ және дөңгелектің ауданы S-ке тең болса, онда $\int_{OA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$.

Олай болса,

$$J = \frac{\pi a^2}{8} \cdot q$$

2-мысал. $\int_{A(-2;-1)}^{B(3;0)} \left(x^4 + 4xy^3\right)dx + \left(6x^2y^2 - 5y^4\right)dy$ қисық сызықты интеграл астындағы өрнек толық дифференциал болатынын тексерейік және интегралды есептейік.

Шешуі. (11.27) формуладағы:

$Q(x,y) = 6x^2y^2 - 5y^4$ $P(x,y) = x^4 + 4xy^3$, , $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 12xy^2$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 12xy^2$.

Демек, интеграл астындағы

$$\left(x^4 + 4xy^3\right)dx + \ + \left(6x^2y^2 - 5y^4\right)dy$$

өрнек толық дифференциал болады. Енді интегралды есептеу үшін (11.33) формуланы пайдаланайық, сонда:

$$\int_{A(-2,-1)}^{B(3,0)} \left(x^4 + 4xy^3\right)dx + \left(6x^2y^2 - 5y^4\right)dy =$$

$$= \int_{-2}^{3} \left(x^4 - 4x\right)dx + \int_{-1}^{0} \left(54y^2 - 5y^4\right)dy =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right)\Bigg|_{-2}^{3} + \left(18y^3 - y^5\right)\Big|_{-1}^{0} = 62.$$

3-мысал. $J = \int_A^B \varphi(x)dx + \psi(y)dy + \kappa(z)dz$ интеграл астындағы өрнек функцияның толық дифференциалы болғанда, осы интегралды есептейік, мұндағы

$$A = A(x_1, y_1, z_1),$$

$B = B(x_2, y_2, z_2)$, $\varphi(x), \psi(y), \kappa(z)$ – үзіліссіз функциялар.

Шешуі. Интеграл астындағы өрнек функцияның толық дифференциалы болғандықтан, J интеграл интегралдау жолына тәуелсіз. Сондықтан (11.33) теңдікті пайдаланамыз, мұнда интегралдау AB жолды координат осьтеріне параллель сынық түзулер ретінде қарастырайық, онда

$$J = J_{AC} + J_{CD} + J_{DB}.$$

AC түзуі бойында ($AC \parallel Ox$): $x \in [x_1; x_2]$, $y = y_1$, $z = z_1$, $dy = 0$, $dz = 0$, онда

$$J_{AC} = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)dx.$$

CD түзуі бойында ($CD \parallel Oy$):

$$y \in [y_1; y_2],\ x = x_2,\ z = z_1,\ dx = 0,\ dz = 0,$$

онда

$$J_{CD} = \int_{y_1}^{y_2} \psi(y)dy.$$

DB түзуі бойында ($DB \parallel Oz$):

$$z \in [z_1; z_2],\ x = x_2,\ y = y_2,\ dx = 0,$$

$dy = 0$, онда

$$J_{DB} = \int_{z_1}^{z_2} \kappa(z)dz.$$

Сонымен,

$$J = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)dx + \int_{y_1}^{y_2} \psi(y)dy + \int_{z_1}^{z_2} \kappa(z)dz.$$

4-мысал. Көп байланысты облыста $J = \int\limits_{AB} \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ интегралын қарастырайық. (11.28) белгіден (11.25) белгінің орындалмайтынын тексерейік (IV$\to$I).

Шешуі. Ол үшін координат жүйенің $O(0,0)$ бас нүктесінде интеграл астындағы өрнектің мағынасы жоқ, сондықтан координат осінің бас нүктесінің маңайын алып (ойып) тастайық. Онда жазықтықтың қалған бөлігінде, dx пен dy коэффициенттерінің өздері әрі олардың дербес туындылары үзіліссіз және мына теңдік орындалады:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

Енді (11.28) теңдік орындалғанмен де (11.25) теңдіктің орындалмайтынын тексерейік. AB қисық сызығы шеңбер болсын, яғни $x = \cos t$, $y = \sin t$, онда

$$dx = -\sin t dt,\ dy = \cos t dt:$$

$$J = \int_0^{2\pi} \left[\frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot (-\sin t) + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot \cos t \right] dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.$$

Демек, көп байланысты облыста (11.28) белгіден (11.25) белгі орындалмайды.

Тапсырма

1. Грин формуласын пайдаланып,

$$J = \int_{AO} \left(e^x \sin y - qy\right) dx + \left(e^x \cos y - q\right) dy$$

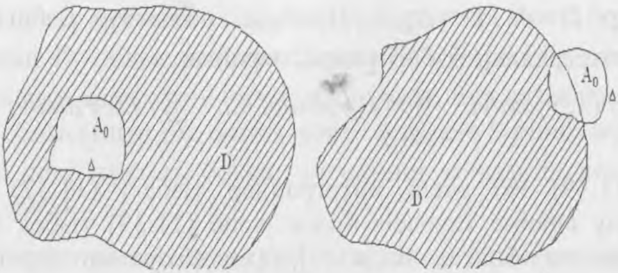
интегралды $x^2 + y^2 = 4x$ шеңбердің жоғарғы жарты бөлігінің AO контуры бойымен интегралда, мұндағы $A(4,0)$, $O(0,0)$.

11.8. Шектелмеген функцияның екі еселі меншіксіз интегралы

Біз [1], *6.14-6.15* тақырыптарда меншіксіз интегралдарды қарастырғанбыз. Ал төмендегі тақырыптарда негізінде екі еселі меншікті интегралдарды қарастыратын боламыз. Еселі меншіксіз интегралдың екі түрі бар: біріншісі, интеграл астындағы функция шектелмеген, ал екіншісі, интегралдау облыс шектелмеген. Алдымен шектелген облыстағы шектелмеген функцияның екі еселі меншіксіз интегралын қарастырайық.

Шектелген D облыстың $A_0(x_0, y_0) = A_0$ нүктесінен өзге нүктелерінде $f(x, y)$ функция үзіліссіз, ал $A_0(x_0, y_0)$ нүктенің маңайында шектелмесін, бұл жағдайда $A_0(x_0, y_0)$ нүкте **ерекше нүкте** деп аталады және $A_0(x_0, y_0)$ нүкте шектелген D облысқа тиісті кіші Δ облыстың ішкі нүктесі болсын немесе A_0 нүкте D облыстың шекарасында жатуы да мүмкін (*11.17-сурет*). Енді D облысынан Δ облысқа тиісті бөлігін алып тастайық және қалған D облыстың бөлігін $D - \Delta$ таңбамен белгілейік әрі осы облыста $f(x, y)$ функцияның екі еселі интегралы бар:

$$\iint_{D-\Delta} f(x, y) dxdy, \tag{11.34}$$



11.17-сурет

мұндағы D және Δ квадратталатын облыстар, онда $D-\Delta$ облыстары да квадратталады. *11.2-тақырыптағы* анықтама бойынша (11.34) интегралы интеграл қосындының $\lambda \to 0$ болғандағы шегі арқылы анықталады:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} f(\bar{x}_i, \bar{y}_k) \Delta x_i \Delta y_k = \iint_{D-\Delta} f(x,y)dxdy. \qquad (11.35)$$

Екі еселі интегралдың интегралдау облысының диаметрін d таңбамен белгілейік. Бұл жағдайда $d \to 0$ ұмтылғанда, Δ облыс $A_0(x_0, y_0)$ нүктеге шоғырланады, яғни Δ облыстың барлық нүктелері $A_0(x_0, y_0)$ нүктеге "топтасады" және де (11.35) интеграл Δ облыстың A_0 нүктеге қалай шоғырлануына тәуелсіз.

Анықтама. $f(x,y)$ функцияның D облыстағы **меншіксіз интегралы** деп мына шекті айтамыз:

$$\lim_{d \to 0} \iint_{D-\Delta} f(x,y)dxdy = \iint_{D} f(x,y)dxdy. \qquad (11.36)$$

Егер (11.36) шек бар болса әрі ол шек Δ облыстың $A_0(x_0, y_0)$ нүктеге шоғырлану әдісіне тәуелсіз болса, онда бұл **меншіксіз интеграл жинақты** деп аталады, кері жағдайда **меншіксіз интеграл жинақсыз** деп аталады.

Енді $A_0(x_0, y_0)$ нүкте

$$\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n, ... \qquad (11.37)$$

облыстар тізбегінің әрқайсысының ішкі нүктесі болсын әрі осы облыстардың d_n диаметрі $n \to \infty$ ұмтылғанда нөлге ұмтылсын, яғни

$$d_n \to 0, \text{ егер } n \to \infty, \quad n = 1, 2, ... \qquad (11.38)$$

және әрбір $D-\Delta_1, D-\Delta_2, ..., D-\Delta_n, ...$ облыстар тізбегіне сәйкес екі еселі интегралдар тізбегін қарастырайық:

$$\iint\limits_{D-\Delta_1} f(x,y)dxdy, \quad \iint\limits_{D-\Delta_2} f(x,y)dxdy, \ ..., \quad \iint\limits_{D-\Delta_n} f(x,y)dxdy, ... \qquad (11.39)$$

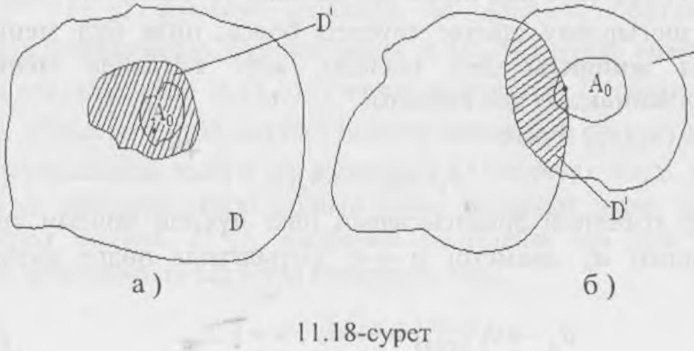
Егер (11.39) екі еселі интегралдар тізбегі (11.37) облыстар тізбегін алу әдісіне тәуелсіз болса және (11.39) тізбек шектелген J-ге жинақты болса, онда $\iint\limits_{D-\Delta} f(x,y)dxdy$ интегралы $d \to 0$ ұмтылғанда J-ге ұмтылады әрі ол Δ облыстың $A_0(x_0, y_0)$ нүктесіне шоғырлану әдісіне тәуелсіз дейміз. Бұл анықтамада (11.38) шарт орындалуы керек, ал Δ_i облыстары монотонды енгізілген облыстар $(\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset ... \supset \Delta_n \supset ...)$ болсын деп шарт қойылмаған.

Анықтама. $A_0(x_0, y_0)$ нүкте D облыстың ішкі нүктесі және (11.36) интеграл жинақсыз болсын, ал (11.37) облыстар тізбекті центрлері $A_0(x_0, y_0)$ нүктеге шоғырланатын әртүрлі дөңгелектер ретінде қарастырғанда да (11.39) екі еселі интегралдар тізбек бір ғана шекке ұмтылса, онда бұл шек **жинақсыз** (11.36) **екі еселі интегралдың негізгі мәні** деп аталады.

Егер $A_0(x_0, y_0)$ нүкте D облыстың ішкі нүктесі болса, онда (11.36) интегралды жинақтылыққа зерттеу үшін (11.36) интегралдың орнына

$$\iint\limits_{D'} f(x,y)dxdy \ (D' \subset D)$$

интегралын зерттеуге болады, мұндағы D' облысы D облысқа тиісті кез келген облыс әрі $A_0(x_0, y_0)$ нүкте D облыстың ішкі нүктесі болуы міндетті (*11.18-сурет*).



11.18-сурет

Ал егер де A_0 нүкте D облыстың шекарасына тиісті болса (*11.18-сурет*), онда D' облыс ретінде D мен D'' $(A_0 \in D'')$ облыстардың ортақ облысын қарастыру қажет. Сонымен, бұл екі жағдайда да D' облыс D облысының бір бөлігі және A_0 нүкте бірінші жағдайда D' облыстың ішкі нүктесі болса, ал екінші жағдайда оның шекара нүктесі болады.

11.9. Теріс емес функцияның шектелмеген облыстағы меншіксіз интегралы

Теріс емес функцияның меншіксіз интегралына орындалатын тұжырымдар айнымалы таңбалы функцияларға да орындалатын болғандықтан, біз осы тақырыпта теріс емес функцияларды ғана қарастыратын боламыз.

11.7-теорема. Екі еселі (11.36) интегралдағы интеграл астындағы $f(x, y)$ функция шектелген D облыста теріс емес болсын, ал (11.37) тізбек ретінде центрлері A_0 нүкте болатын монотонды енгізілген облыстар дөңгелек болсын, яғни

$$\Delta_1' \supset \Delta_2' \supset ... \supset \Delta_n' \supset ... \tag{11.40}$$

және Δ_i' облыстардың диаметрлері $d_i' \to 0$ ұмтылсын $i \to +\infty$ болғанда, онда (11.36) интеграл жинақты болу үшін Δ_i' дөңгелек облыстарға сәйкес келетін

$$\iint_{D-\Delta_1'} f(x, y)dxdy, \quad \iint_{D-\Delta_2'} f(x, y)dxdy, \ ..., \quad \iint_{D-\Delta_n'} f(x, y)dxdy, \ ... \tag{11.41}$$

мәндер тізбегі (сандар тізбегі) шектелген болуы қажетті әрі жеткілікті, мұндағы d_i' таңба Δ_i' дөңгелек облыстың диаметрі $(i = 1, 2, ...)$.

Қажеттілігі. (11.36) интеграл жинақты болсын деп ұйғарып, (11.41) тізбектің шектелген болуын дәлелдейік. (11.36) интеграл жинақты болғандықтан, анықтама бойынша (11.41) тізбектің шегі бар әрі ол шектелген.

Жеткіліктігі. (11.41) сандар тізбек шектелген болсын деп ұйғарып, (11.36) интегралдың жинақты болатынын дәлелдейік. Теореманың шарты бойынша, (11.37) облыс тізбегіне (11.40) шарт орындалатын болғандықтан, (11.41) интегралдың интегралдау $D - \Delta_i'$ облыстарына мына енгізу орындалады ($D - \Delta_n'$ облысы **монотонды ұлғайтылған облыс** деп аталады:)

$$D - \Delta_1' \subset D - \Delta_2' \subset ... \subset D - \Delta_n' \subset ...$$

және $f(x,y)$ теріс емес функция болғандықтан, (11.41) сандар тізбегі кемімейтін тізбек болады. Ұйғаруымыз бойынша, (11.41) сандар тізбегі шектелген, олай болса, онда оның шектелген шегі бар және ол шек J болсын:

$$J = \lim_{n\to\infty} \iint_{D-\Delta_n'} f(x,y)dxdy. \tag{11.42}$$

Енді теореманы толық дәлелдеу үшін A_0 нүктеге шоғырланатын кез келген (11.40) облыс тізбегіне сәйкес келетін (11.41) сандар тізбегі де J-ге ұмтылатынын дәлелдесек жеткілікті. Ол үшін қажеттілігінше үлкен натурал n саны үшін Δ_n облысқа

$$\Delta_{n_p}' \supset \Delta_n \supset \Delta_{n_q}'$$

енгізуі орындалатындай әрі Δ_{n_p}' мен Δ_{n_q}' облыстардың сәйкес d_{n_p}' мен d_{n_q}' радиустары $n\to\infty$ ұмтылғанда нөлге ұмтылатындай Δ_{n_p}' мен Δ_{n_q}' облыстарын табуға болады. Онда соңғы енгізуден мына енгізуді аламыз:

$$D-\Delta_{n_p}' \subset D-\Delta_n \subset D-\Delta_{n_q}' \tag{11.43}$$

Осыдан, теріс емес $f(x,y)$ функция үшін

$$\iint_{D-\Delta_{n_p}'} f(x,y)dxdy \le \iint_{D-\Delta_n} f(x,y)dxdy \le \iint_{D-\Delta_{n_q}'} f(x,y)dxdy$$

теңсіздігі орындалады. Теңсіздіктің сол және оң жақтарындағы интегралдарға

$$\lim_{d_{n_p}'\to 0} \iint_{D-\Delta_{n_p}'} f(x,y)dxdy = \lim_{d_{n_q}'\to 0} \iint_{D-\Delta_{n_q}'} f(x,y)dxdy = J$$

теңдіктері орындалатын болғандықтан,

$$\lim_{d\to 0} \iint_{D-\Delta_n} f(x,y)dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint_{D-\Delta_n} f(x,y)dxdy = J$$

теңдіктері де орындалады. Теорема дәлелденді.

11.8-теорема. Егер (11.36) интеграл астындағы $f(x,y)$ функция теріс емес функция және шоғырланатын (11.37) облыс тізбек ретінде кез келген Δ_k облысты алсақ, онда (11.36) мәншіксіз интеграл жинақты болу үшін Δ_k облыс тізбегіне сәйкес келетін (11.39) мәндер тізбегі шектелген болуы қажетті әрі жеткілікті $(k=1,2,...)$.

Қажеттілігін дәлелдеу үшін 11.7-теоремадағы қажеттіліктің дәлелдеуін қайталасақ болғаны. Енді **жеткіліктілігін** дәлелдеу үшін $A_0(x_0, y_0)$ нүкте центрі болатын (11.40) енгізуді қанағаттандыратын дөңгелек $\{\Delta_k\}$ облысты қарастырайық. Осы дөңгелек облыстарға сәйкес келетін (11.41) сандар тізбегі шектелген болатынын дәлелдейік, егер (11.39) тізбек шектелсе. Ол үшін

$$\iint_{D-\Delta_k} f(x,y)dxdy \le c < \infty \qquad (11.40)$$

теңсіздігі орындалсын, барлық k үшін $(k = 1,2...)$. k натурал саны $+\infty$-ке ұмтылғанда Δ_k облыстың сәйкес d_k диаметрі 0-ге ұмтылатын болғандықтан, яғни $\lim\limits_{k\to+\infty} d_k = 0$, онда n натурал саны қандай болса да k саны табылып, $\Delta_n' \supset \supset \Delta_k$ енгізуі орындалады. Осыдан $D - \Delta_n' \subset D - \Delta_k$. Онда $f(x,y)$ теріс емес функция болғандықтан, мына теңсіздік орындалады:

$$\iint_{D-\Delta_n'} f(x,y)dxdy \le \iint_{D-\Delta_k} f(x,y)dxdy.$$

Соңғы теңсіздікті (11.40) теңсіздікпен салыстырып, кез келген n үшін

$$\iint_{D-\Delta_n'} f(x,y)dxdy \le c < \infty$$

теңсіздікті аламыз. Теорема дәлелденді.

Мысал. Төмендегі J интеграл шектелген D облыста $\alpha < 2$ үшін жинақты, ал $\alpha \ge 2$ үшін жинақсыз болатынын дәлелдейік:

$$J = \iint_D \frac{c}{r^\alpha} dxdy,$$

мұндағы

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2},\ A_0(x_0, y_0) \in D,\ c - const.$$

Шешуі. Дәлелдеу үшін J интегралының орнына радиусы жеткілігінше аз радиусы R-ге тең, ал центрі $A_0(x_0, y_0)$ нүкте болатын D облыстағы дөңгелекті қарастырайық, яғни

$$J' = \iint_{D'} \frac{c}{r^\alpha} dxdy,$$

мұндағы $D' \subset D,\ A_0(x_0, y_0) \in D'$. Енді J' интегралды зерттейік. Ол үшін $A_0(x_0, y_0)$ нүктеге шоғырланатын кез келген енгізілген дөңгелектер тізбегін алайық: $D' = \Delta_R \supset \Delta_{R_1} \supset \Delta_{R_2} \supset \ldots \supset \Delta_{R_n} \supset \ldots$ және $d_n \to 0$ ұмтылады, егер $n \to +\infty$ ұмтылса, $A_0(x_0, y_0) \in \Delta_{R_i}$, $i = 1, 2, \ldots$ әрі $\iint\limits_{\Delta_R - \Delta_{R_n}} \frac{c}{r^\alpha} dxdy$ интегралын қарастырайық. Поляр координатқа көшейік, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$:

$$\iint\limits_{\Delta_R - \Delta_{R_n}} \frac{c}{r^\alpha} dxdy = \iint\limits_{\Delta_R - \Delta_{R_n}} \frac{c}{r^\alpha} rdrd\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{R_n}^{R} \frac{c}{r^\alpha} \cdot rdr =$$

$$= 2\pi c \int\limits_{R_n}^{R} r^{\alpha-1} dr = \begin{cases} 2\pi c \left(\dfrac{r^{2-\alpha}}{2-\alpha} \right) \Bigg|_{R_n}^{R}, & \alpha \neq 2, \\ 2\pi c (\ln r) \Big|_{R_n}^{R}, & \alpha = 2 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 2\pi c \cdot \dfrac{R^{2-\alpha} - R_n^{2-\alpha}}{2-\alpha}, & \alpha \neq 2, \\ 2\pi c \cdot \ln \dfrac{R}{R_n}, & \alpha = 2. \end{cases}$$

Егер $\alpha < 2$ болғанда, осыдан $R_n \to 0$ ұмтылғанда шекке көшсек, онда

$$\lim_{R_n \to 0} \iint \frac{c}{r^\alpha} dxdy = \lim_{R_n \to 0} 2\pi c \cdot \frac{R^{2-\alpha} - R_n^{2-\alpha}}{2-\alpha} \leq c_1 - const,$$

яғни интеграл шектелген; енді $\alpha \geq 2$ болғанда шекке көшейік, онда интеграл шектелмеген. Олай болса, $\alpha < 2$ болғанда J' интеграл және J интегралы да жинақты, ал $\alpha \geq 2$ болғанда J жинақсыз болады.

11.10. Меншіксіз интегралдың шектелмеген облыстағы абсолютті жинақтылығы

Берілген $f(x, y)$ функцияның D облыста тек бір ғана ерекше $A_0 = = A_0(x_0, y_0)$ нүктесі болсын әрі ол не D облысына, не оның шекарасына тиісті болсын және осы нүкте тиісті облысты Δ таңбамен белгілейік. $f(x, y)$ функция $D - \Delta$ облыста интегралдансын.

Алдымен меншіксіз интегралдың екі қасиетін атап өтейік.

1-қасиет. Егер $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ және $\iint\limits_D \varphi(x,y)dxdy$ меншіксіз интегралдары жинақты болса, онда $\iint\limits_D [f(x,y)\pm\varphi(x,y)]dxdy$ меншіксіз интегралдары да жинақты болады әрі мына теңдік орындалады:

$$\iint\limits_D [f(x,y)\pm\varphi(x,y)]dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy \pm \iint\limits_D \varphi(x,y)dxdy.$$

2-қасиет. Егер $c-const$ және $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ меншіксіз интегралы жинақты болса, онда $\iint\limits_D c\cdot f(x,y)dxdy$ меншіксіз интегралдары да жинақты және

$$\iint\limits_D c\cdot f(x,y)dxdy = c\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

Анықтама. $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ меншіксіз интеграл **абсолютті жинақты** деп аталады, егер $\iint\limits_D |f(x,y)|dxdy$ меншіксіз интеграл жинақты болса.

Егер $f(x,y)$ функция $A_0(x_0,y_0)$ нүктенің маңайында $f(x,y)\le 0$ болса, онда интегралдың алдына минус таңбаны шығарып, *11.9-тақырыптағы* жағдайға келеміз. Енді $f(x,y)$ функцияның таңбасы әртүрлі болсын, онда бұл жағдайда меншіксіз интегралды абсолютті жинақтылыққа зерттейміз.

11.9-теорема. Егер $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ меншіксіз интеграл абсолютті жинақты болса, онда ол жинақты болады.

Дәлелдеуі. Дәлелдеу үшін интеграл астындағы $f(x,y)$ функцияны теріс емес екі функцияның айырымы ретінде қарастырайық:

$$f(x,y)=|f(x,y)|-[|f(x,y)|-f(x,y)]=f_1(x,y)-f_2(x,y), \quad (11.44)$$

мұндағы

$$f_1(x,y)=|f(x,y)|,\ \ f_2(x,y)=|f(x,y)|-f(x,y).$$

Теореманың шарты бойынша:

$$\iint\limits_D f_1(x,y)dxdy = \iint\limits_D |f(x,y)|dxdy$$

меншіксіз интеграл жинақты және

$$f_2(x,y)=|f(x,y)|-f(x,y)\le 2|f(x,y)|$$

теңсіздігі орындалады, ал

$$\iint_D 2\,|f(x,y)|\,dxdy = 2\iint_D |f(x,y)|\,dxdy$$

меншіксіз интеграл теореманың шарты бойынша жинақты, онда қандай да болмасын шоғырланатын $\{\Delta_i\}$ тізбек облысқа сәйкес келетін $\iint\limits_{D-\Delta_n} 2\,|f(x,y)|\,dxdy$ интегралы шектелген. Сондықтан

$\iint\limits_{D-\Delta_n} f_2(x,y)dxdy \le \iint\limits_{D-\Delta_n} 2f(x,y)dxdy$ теңсіздіктен $\left\{\iint\limits_{D-\Delta_n} f_2(x,y)dxdy\right\}$ тізбегінің шектелетінін аламыз.

Онда *11.8-теорема* бойынша $\iint\limits_D f_2(x,y)dxdy$ интегралы жинақты болады.

Сонымен, $\iint\limits_D f_1(x,y)dxdy$ және $\iint\limits_D f_2(x,y)dxdy$ интегралдары жинақты болады, онда (11.44) формуладан $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ интегралының да жинақты болатыны шығады және 2-қасиет бойынша

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f_1(x,y)dxdy - \iint_D f_2(x,y)dxdy$$

теңдігі орындалады. Теорема дәлелденді.

11.10-теорема (салыстыру белгі). Егер $A_0(x_0, y_0)$ нүкте $f(x, y)$, $\varphi(x,y)$ функцияларының D облыстағы тек бір ғана ерекше (ішкі немесе шекара) нүктесі болса және D облыстағы барлық x нүктелер үшін

$$0 \le |f(x,y)| \le |\varphi(x,y)| \tag{11.45}$$

теңсіздік орындалса, онда егер:

$\iint\limits_D \varphi(x,y)dxdy$ меншіксіз интеграл жинақты болса, онда $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ меншіксіз интеграл абсолютті жинақты;

$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ меншіксіз интеграл жинақсыз болса, онда $\iint\limits_D \varphi(x,y)dxdy$ меншіксіз интеграл да жинақсыз болады.

Дәлелдеуі. Дәлелдеу үшін $A_0(x_0, y_0)$ нүктеге шоғырланатын (11.37) облыстар тізбегін алайық, онда (11.45) теңсіздіктен:

$$\iint_{D-\Delta_n} |f(x,y)|\,dxdy \le \iint_{D-\Delta_n} \varphi(x,y)dxdy. \tag{11.46}$$

1) тұжырымды дәлелдейік. Теореманың шарты бойынша $\iint\limits_D \varphi(x,y)dxdy$ меншіксіз интеграл жинақты болғандықтан, $\left\{ \iint\limits_{D-\Delta_n} \varphi(x,y)dxdy \right\}$ интегралдар тізбек шектелген, онда (11.45) теңсіздік бойынша $\left\{ \iint\limits_{D-\Delta_n} f(x,y)dxdy \right\}$ интегралдар тізбегі де шектелген. Олай болса, *11.8-теорема* бойынша $\iint\limits_D |f(x,y)|dxdy$ меншіксіз интеграл жинақты болады.

Енді 2) тұжырымды дәлелдейік. Теореманың шарты бойынша $\iint\limits_D |f(x,y)|dxdy$ меншіксіз интеграл жинақсыз, ал $\iint\limits_D |f(x,y)|dxdy$ меншіксіз интеграл жинақты болсын делік. Онда анықтама бойынша $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ меншіксіз интегралы абсолютті жинақты, осыдан және *11.9-теорема* бойынша ол жинақты болады. Ал $A_0(x_0,y_0)$ нүктеге шоғырланатын (11.37) облыстар тізбегін қандай етіп алсақ та, $\iint\limits_D |f(x,y)|dxdy$ интегралының жинақсыздығынан және *11.8-теоремадан* $\iint\limits_{D-\Delta_n} |f(x,y)|dxdy$ интегралының шектелмейтіндігін аламыз. Онда (11.46) теңсіздіктен $\left\{ \iint\limits_{D-\Delta_n} \varphi(x,y)dxdy \right\}$ интегралдар тізбегінің шектелмейтіндігі шығады, демек, $\iint\limits_D \varphi(x,y)dxdy$ интегралы жинақсыз. Теорема дәлелденді.

Салдар. Егер $A_0(x_0,y_0)$ нүкте $f(x,y)$ функцияның D облысындағы тек бір ғана ерекше (ішкі немесе шекара) нүктесі болса және

$$|f(x,y)| < \frac{c}{r^\alpha}, \quad c > 0 - const, \; r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \tag{11.47}$$

онда $\alpha < 2$ болғанда $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ меншіксіз интеграл жинақты және абсолютті жинақты болады.

Шынында да, (11.47) теңсіздіктен, *11.9-тақырыптағы* мысалдан және *11.10-теорема* бойынша $\alpha < 2$ болғанда $\iint\limits_D | f(x,y) | dxdy$ меншіксіз интеграл жинақты болады.

11.11. Меншіксіз интегралдың жинақтылығы мен абсолютті жинақтылығының эквиваленттілігі

11.11-теорема. Егер $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ меншіксіз интеграл жинақты болса, онда $\iint\limits_D | f(x,y) |dxdy$ меншіксіз интеграл да жинақты.

Дәлелдеуі. Анықтық үшін $f(x,y)$ функцияның D облыстағы $A_0(x_0, y_0)$ ерекше нүктесі ішкі нүкте болсын. Теореманың шарты бойынша, $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ жинақты, ал $\iint\limits_D | f(x,y) | dxdy$ интегралы жинақсыз болсын делік. Онда, центрі A_0 нүкте болатын концентрлі Δ_i дөңгелектер тізбегін қарастырайық:

$$D \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset ... \supset \Delta_n \supset ... \qquad (11.48)$$

$| f(x,y) |$ оң функция болғандықтан, мына шек орындалады:

$$\lim_{n \to +\infty} \iint\limits_{D-\Delta_n} | f(x,y) | dxdy < +\infty. \qquad (11.49)$$

Онда, (11.48) дөңгелектер тізбекті

$$\iint\limits_{\Delta_n - \Delta_{n+1}} | f(x,y) | dxdy \geq 2 \iint\limits_{D-\Delta_n} | f(x,y) |dxdy + 2n, \; n = 1, 2, ... \qquad (11.50)$$

теңсіздігі орындалатындай таңдап алуға болады. Енді D облыста теріс емес $f_+(x,y) \geq 0$, $f_-(x,y) \geq 0$ функцияларды енгізейік:

$$f_+(x,y) = \frac{1}{2}[| f(x,y) | + f(x,y)], f_-(x,y) = \frac{1}{2}[| f(x,y) | - f(x,y)]. \qquad (11.51)$$

Осыдан:

$$f(x,y) = f_+(x,y) - f_-(x,y), \quad | f(x,y) |= f_+(x,y) + f_-(x,y).$$

Соңғы теңдіктерден:

$$\iint\limits_{\Delta_n - \Delta_{n+1}} | f(x,y) | dxdy = \iint\limits_{\Delta_n - \Delta_{n+1}} f_+(x,y)dxdy + \iint\limits_{\Delta_n - \Delta_{n+1}} f_-(x,y)dxdy. \qquad (11.52)$$

Осыдан:

$$\iint\limits_{\Delta_n - \Delta_{n+1}} f_+(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Delta_n - \Delta_{n+1}} |f(x,y)|\, dxdy - \iint\limits_{\Delta_n - \Delta_{n+1}} f_-(x,y)dxdy.$$

Интеграл астындағы функциялар теріс емес функциялар болғандықтан,

$$\iint\limits_{\Delta_n - \Delta_{n+1}} f_+(x,y)dxdy \geq \iint\limits_{\Delta_n - \Delta_{n+1}} f_-(x,y)dxdy. \qquad (11.53)$$

Енді (11.48) дөңгелектер тізбекті (11.53) теңсіздік орындалатындай етіп таңдап алайық. Онда (11.52) және (11.50) теңсіздіктерден

$$\iint\limits_{\Delta_n - \Delta_{n+1}} f_+(x,y)dxdy > \iint\limits_{D-\Delta_n} |f(x,y)|\, dxdy + 2n \qquad (11.54)$$

теңсіздігін аламыз. Енді $\Delta_n - \Delta_{n+1}$ сақинаны жеткілігінше аз квадратталатын бөліктерге бөлсек, онда осы сақинада $\iint\limits_{\Delta_n - \Delta_{n+1}} f_+(x,y)dxdy$ интегралының төменгі

$$\sum_{\Delta_n - \Delta_{n+1}} m_i(f_+)\Delta x_i \Delta y_i$$

интеграл қосындысына (11.5) теңсіздік бойынша мына теңсіздік орындалады:

$$\sum_{\Delta_n - \Delta_{n+1}} m_i(f_+)\Delta x_i \Delta y_i > \iint\limits_{D-\Delta_n} |f(x,y)|\, dxdy + n, \ n = 1, 2, ..., \qquad (11.55)$$

мұндағы $m_i(f_+)$ саны $f_+(x,y)$ функцияның $\Delta x_i \Delta y_i$ сақина бөлігіндегі ең төменгі шекарасы және барлық сақина бөліктерінде $m_i(f_+) \geq 0$ (себебі $f_+(x,y) \geq 0$) болады. Енді (11.55) теңсіздік сақталатындай

$$\sum_{\Delta_n - \Delta_{n+1}} m_i(f_+)\Delta x_i \Delta y_i$$

қосындыдан $m_i(f_+) = 0$ болатын қосындыларды алып тастайық. Қосындыдан алынып тасталынған бөліктерді (облыстарды) D_n таңбамен белгілейік, онда D_n облыста $f(x,y) = f_+(x,y)$ теңдік орындалады және

$$\iint\limits_{D_n} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_n} f_+(x,y)dxdy \geq \sum_{D_n} m_i(f_+)\Delta x_i \Delta y_i >$$

$$> \iint\limits_{D-\Delta_n} |f(x,y)|\,dxdy + n. \tag{11.56}$$

Осыдан:

$$\iint\limits_{D-\Delta_n} f(x,y)dxdy > -\iint\limits_{D-\Delta_n} |f(x,y)|\,dxdy. \tag{11.57}$$

Енді (11.56) және (11.57) теңсіздіктерді қосып,

$$\iint\limits_{D_n'} f(x,y)dxdy > n, \quad n = 1, 2, ... \tag{11.58}$$

теңсіздікті аламыз, мұндағы $D' = (D - \Delta_n) + D_n$ және егер $D - D_n' = \Delta$ таңбамен белгілесек, онда $n \to \infty$ ұмтылғанда Δ бөліктің диаметрі нөлге ұмтылады. Онда (11.58) теңсіздіктен $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ меншіксіз интегралдың жинақсыздығын аламыз, ал бұл теореманың шартына қайшы келеді. Теорема дәлелденді.

Салдар. D облыстағы $f(x,y)$ функцияның меншіксіз интегралы жинақты болу үшін $|f(x,y)|$ функцияның осы облыстағы меншіксіз интегралы жинақты болуы қажетті әрі жеткілікті.

11.12. Шектелмеген облыстағы функцияның екі еселі меншіксіз интегралы

Бізге шектелмеген D облыста $f(x,y)$ функция берілсін.

Анықтама. Ұлғайтылған тізбектен құралған

$$\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset ... \subset \Delta_n \subset ... \tag{11.59}$$

шектелген ішкі облыстар D **облысты толықтырады** деп аталады, егер радиусы кез келген $R > 0$, ал центрі координат жүйенің бас нүктесі болатын дөңгелекке тиісті D облыстың барлық нүктелері жеткілігінше (мейлінше) үлкен n үшін барлық ішкі Δ_n облысқа тиісті болса.

Жоғарыдағы анықтама бойынша, $\{\Delta_n\}$ облысы D облысына тиісті және Δ_n облыстардың қосындысы D облысқа тең болады.

Анықтама. Егер шектелмеген D облыстың кез келген ішкі облысында $f(x,y)$ функция интегралданса және кез келген толықтыратын (11.59) облыстар бойынша алынған санды тізбек:

$$\iint\limits_{\Delta_1} f(x,y)dxdy,\ \iint\limits_{\Delta_2} f(x,y)dxdy,\ ...,\ \iint\limits_{\Delta_n} f(x,y)dxdy,\ ...$$

тек бір ғана шектелген J шекке ұмтылса, онда $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ меншіксіз интеграл **жинақты** деп аталады, ал кері жағдайда ол **жинақсыз** деп аталады.

Жинақтылықтың жеткілікті белгісі. Егер $f(x,y)$ функция жоғарыдағы анықтамадағы шарттарды қанағаттандырса және

$$|f(x,y)| \le \frac{c}{r^\alpha},\ c>0,\ \alpha>2,\ r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

орындалса, онда $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ меншіксіз интеграл жинақты, мұндағы $M_0(x_0,y_0)$ – кез келген тағайындалған нүкте.

Жоғарыдағы тақырыптарда дәлелденген *11.7-11.11-теоремалар* шектелмеген облыстағы меншіксіз интегралдарға да орындалады.

XII ТАРАУ. БЕТТІК ИНТЕГРАЛДАР

12.1. Негізгі ұғымдар және беттің ауданы

Осы бөлімнің *IX-тарауынан* беттің теңдеуі

$$z = f(x,y) \tag{12.1}$$

үзіліссіз функцияның сызбасы арқылы бейнеленетіні бізге белгілі, мұндағы $(x,y) \in D$, осы сияқты беттің теңдеулері

$$x = f(y,z), \;\; y = f(x,z) \tag*{(12.1)$'$}$$

үзіліссіз функциялары арқылы беріледі және (12.1), (12.1)$'$ теңдеулері беттің айқын түрдегі теңдеулері деп аталады. Беттің теңдеулері мына түрде де беріледі:

$$F(x,y,z) = 0, \tag{12.2}$$

яғни функциялық теңдеудегі z айнымалы қалған екеуі арқылы өрнектелінбейді. Демек, (12.2) теңдеуді (12.1) немесе (12.1)$'$ айқын түрдің біріне келтіре алмаймыз. (12.2) теңдеу беттің айқын емес түрде берілуі деп аталады. Сонымен, (12.2) теңдеуді қанағаттандыратын нүктелердің жиыны бетті айқындайды.

Көп жағдайда беттің теңдеуі параметр теңдеуімен де беріледі:

$$x = \varphi(u,v), \;\; y = \psi(u,v), \;\; z = x(u,v), \tag{12.3}$$

мұндағы $\varphi(u,v), \psi(u,v), x(u,v)$ – үзіліссіз функциялар және $(u,v) \in D'$, u мен v параметр деп аталады. Егер беттің теңдеуі (12.3) параметр теңдеумен берілсе, онда D' облыстағы кез келген (u,v) нүктеге үш өлшемді кеңістікте (x,y,z) нүкте сәйкес келеді. Кеңістіктегі осындай нүктелер жиыны бетті анықтайды (бейнелейді), мысалы:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \text{ және}$$

$$x = R\sin u\cos v,\; y = R\sin u\sin v,\; z = R\cos u, (u,v) \in D' = \{(u,v) : 0 \le u \le \pi,\; 0 \le v \le 2\pi\}$$

теңдеулердің екеуі де радиусы R-ге тең, ал центрі координат жүйенің бас нүктесі болатын сфераны анықтайды.

Параметр теңдеумен берілген (12.3) беттің векторлық теңдеуі мына түрде жазылады:

$$\bar{r} = \varphi(u,v)\bar{i} + \psi(u,v)\bar{j} + x(u,v)\bar{k}, \quad (u,v) \in D', \tag*{(12.3)$'$}$$

мұндағы $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ беттің $A(x,y,z)$ нүктенің радиус векторы, $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ – ортогональ базис вектор. Бет (12.3) параметр теңдеумен берілсін және мына шарттар орындалсын:

I. D' облыс шектелген және тұйық, ал оның шекарасы өзара қиылыспайтын бөлікті тегіс қисық сызық болсын;

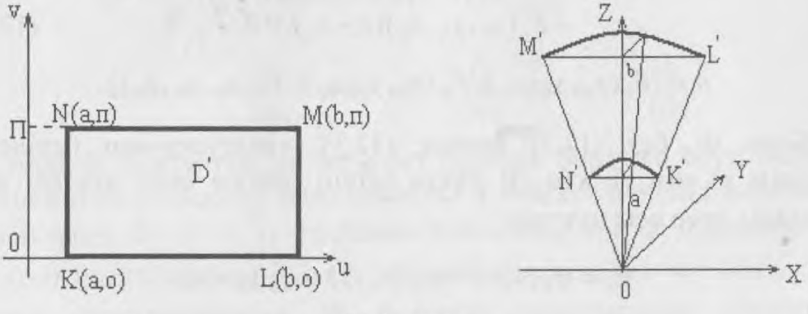
II. $\varphi(u,v), \psi(u,v), \kappa(u,v)$ функциялардың бірінші ретті дербес туындылары D' облыста үзіліссіз болсын, яғни үзіліссіз дифференциалданатын функциялар;

III. D' облыстың ішкі әртүрлі нүктелеріне беттің әртүрлі (x,y,z) нүктелері сәйкес келсін.

Егер III шарт D' облыстың шекара нүктелеріне орындалса, онда ол бет жай (қарапайым) бет деп аталады. D' облыстың шекара нүктелеріне сәйкес келетін нүктелер жиыны беттің шекарасы деп аталады. Мысалы, 12.1-суретте D' облыстың $KLMN$ шекарасына

$$x = u\cos v, y = u\sin v, z = u, (u,v) \in D' =$$
$$= \{(u,v) : 0 < a \le u \le b, 0 \le v \le \pi\}$$

беттің тұйық $K'L'M'N'$ контуры бейнеленген.



12.1-сурет

Беттің шекара нүктесі болмайтын нүктелер беттің ішкі нүктелері деп аталады. Егер де D' облыстың шекара нүктелеріне III шарт орындалмаса, онда беттің шекарасы болмауы мүмкін, бұл жағдайда бет тұйық деп аталады. Мысалы, жоғарыдағы сфера тұйық бетке мысал бола алады.

Жоғарыда келтірілген беттің ішкі нүктесінің анықтамасын басқаша келтіруге болады. $A(x, y, z)$ нүкте беттің ішкі нүктесі деп аталады, егер осы бетке тиісті емес A нүктенің маңайы (жиыны) табылып, ол байланыссыз жиын болса. Беттің ішкі нүктесі болмайтын нүктелер беттің шекара нүктелері деп аталады.

Бізге Ф бет (12.2) айқын емес теңдеумен берілсін және $F(x,y,z)$ үзіліссіз дифференциалдансын. Беттің $A_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесі ерекше емес нүкте деп аталады, егер осы нүктеде

$$F_x'^2(x_0,y_0,z_0)+F_y'^2(x_0,y_0,z_0)+F_z'^2(x_0,y_0,z_0)\neq 0$$

болса, ал кері жағдайда ол ерекше нүкте деп аталады.

Бізге Ф бет не айқын, не айқын емес, не параметр түрде берілсін. Ерекше нүктесі жоқ үзіліссіз дифференциалданатын бет тегіс бет деп аталады. Демек, тегіс беттің кез келген ішкі нүктесіне жанама жазықтық және нормаль жүргізуге болады. Мысалы, Ф бет (12.1) теңдеумен берілсе және $f(x,y)$ функция D облыста үзіліссіз дифференциалданса, онда бет тегіс болады, ал беттің нүктесіне жүргізілген жанама жазықтықтың теңдеуі мен нормаль вектордың теңдеуі *8.10-тақырыпта* қарастырылған.

Беттің ішкі әрі ерекше емес $A_0(x_0,y_0,z_0)$ нүктесіне жүргізілген жанама жазықтық пен нормаль векторының теңдеулері сәйкес мына формуладан анықталады:

$$F_x'(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y'(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+$$
$$+F_z'(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0, \qquad (12.4)$$
$$\overline{n}=\{F_x'(x_0,y_0,z_0);\ F_y'(x_0,y_0,z_0);\ F_z'(x_0,y_0,z_0)\}.$$

Бізге Ф бет (12.3) немесе (12.3)′ теңдеулерімен берілсін. $A_0(\varphi(u,\ v),\psi(u,v),\ \kappa(u,v))$ нүкте беттің ерекше емес нүктесі деп аталады, егер осы нүктеде

$$r_u'=\varphi_u'(u,v)\overline{i}+\psi_u'(u,v)\overline{j}+\kappa_u'(u,v)\overline{k},$$
$$r_v'=\varphi_v'(u,v)\overline{i}+\psi_v'(u,v)\overline{j}+\kappa_v'(u,v)\overline{k}$$

векторлары коллинеар болмаса, яғни олар сызықты тәуелсіз, ал кері жағдайда A_0 нүкте ерекше нүкте деп аталады. Беттің ерекше емес $A(\varphi(u,v),\psi(u,v),\ \kappa(u,v))$ нүктеге жүргізілген жанама жазықтықтың теңдеуі мен нормаль вектор теңдеуі бізге аналитикалық геометриядан белгілі:

$$A_1(x-x_0)+B_1(y-y_0)+C_1(z-z_0)=0,$$

мұндағы $x_0=\varphi(u,v),\ y_0=\psi(u,v),\ z_0=\kappa(u,v),$

$$A_1=\begin{vmatrix}\psi_u' & \kappa_u'\\ \psi_v' & \kappa_v'\end{vmatrix},\ B_1=\begin{vmatrix}\kappa_u' & \varphi_u'\\ \kappa_v' & \varphi_v'\end{vmatrix},\ C_1=\begin{vmatrix}\varphi_u' & \psi_u'\\ \varphi_v' & \psi_v'\end{vmatrix}, \qquad (12.5)$$
$$\overline{n}=[\overline{r}_u';\overline{r}_v']=A_1\overline{i}+B_1\overline{j}+C_1\overline{k}=\{A_1;B_1;C_1\},$$

$\bar{r}'_u, \bar{r}'_v$ векторлары жанама жазықтықтың бойындағы векторлар (*12.2-сурет)* және олар беттің *A* нүктесіне бекітілген. Ал $\bar{n}$ нормаль вектордың бағыттауыш векторы:

$$\cos(\bar{n}, x) = \frac{A_1}{|\bar{n}|},\ \cos(\bar{n}, y) = \frac{B_1}{|\bar{n}|},\ \cos(\bar{n}, z) = \frac{C_1}{|\bar{n}|}.$$

Егер бет

$$z = f(x, y) \text{ немесе } \bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + f(x, y)\bar{k}$$

теңдеуімен берілсе, онда:

$$A_1 = \begin{vmatrix} 0 & f'_x \\ 1 & f'_y \end{vmatrix} = -f'_x(x_0, y_0) = f'_x,\ \ B_1 = \begin{vmatrix} f'_x & 1 \\ f'_y & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -f'_y(x_0, y_0) = -f'_y,$$

$$C_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,\ \bar{n} = [\bar{r}'_x, \bar{r}'_y] = -f'_x\bar{i} - f'_y\bar{j} + \bar{k}, \tag{12.6}$$

$$\cos(\bar{n}, x) = -\frac{f'_x}{|\bar{n}|},\ \cos(\bar{n}, y) = -\frac{f'_y}{|\bar{n}|},\ \cos(\bar{n}, z) = \frac{1}{|\bar{n}|}.$$

Енді Ф шектелген әрі тегіс бет болсын. Берілген бетті бөлікті тегіс қисық сызықпен саны санаулы n бөлікке бөлейік және кіші бөліктерді Φ_i $(i = \overline{1, n})$ таңбамен белгілейік әрі Φ_i бөліктің кез келген нүктесіне жүргізілген жанама жазықтыққа Φ_i бөлік бірмәнді проекциялансын. Φ_i бөліктің әрқайсысынан еркімізше $A_i(x_i, y_i, z_i)$ нүкте алып, осы нүкте арқылы бетке жанама жазықтық жүргізейік және Φ_i беттің жанама жазықтықтағы проекциясының ауданын S_i деп белгілейік, мұндағы Φ_i беттің жанама жазықтықтағы проекциясы бөлікті тегіс қисық сызықпен шектелген, яғни квадратталады. Φ_i кіші беттердің жанама жазықтықтағы проекцияларының аудандарын қосайық:

$$S(\Phi_i, A_i) = \sum_{i=1}^{n} S_i$$

және кіші беттердің сәйкес диаметрі d_i, $\max_i d_i = d$ болсын.

Анықтама. Ф **бет квадратталады** деп аталады, егер $\max_i d_i = \ = d \to 0$-да мына шек бар болса

$$\lim_{d\to 0} S(\Phi_i, A_i) = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} S_i = S,$$

бұл жағдайда S **саны Ф беттің ауданы** деп аталады.

Бірнеше тегіс беттерден құралған бет бөлікті тегіс бет деп аталады және осы бөлікті тегіс беттердің әрқайсысы квадратталса, онда олардың аудандарының қосындысын тегіс беттің ауданы ретінде алуға болады.

12.1-теорема. Параметр теңдеумен берілген ерекше нүктесі жоқ Ф тегіс бет квадратталады және оның ауданы мына формуламен есептелінеді:

$$S = \iint_{D'} \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\, dudv, \tag{12.7}$$

мұндағы A_1, B_1, C_1 коэффициенттер (12.5) формуладан анықталынады.

Егер беттің саны санаулы ерекше нүктелері болған жағдайда да (12.7) теңдік орындалады. Егер бет (12.1) айқын түрде берілсе, онда оны параметр теңдеуі түрде берілді деп қарастыруға болады, мұндағы x пен y-ті параметр деп аламыз. Бұл жағдайда, (12.3) параметр теңдеу мына түрге түрленеді:

$$x = u,\ y = v,\ z = f(u,v),\ (u,v) \in D$$

және D облыс I шартты қанағаттандырса, ал $f(x,y)$ функция D облыста үзіліссіз дифференциалданса, онда (12.7) формуланы пайдаланып, Ф беттің ауданын мына формуласын есептейміз:

$$S = \iint_{D} \sqrt{1 + f_x'^2(x,y) + f_y'^2(x,y)}\, dxdy.$$

Енді бет (12.2) айқын емес түрде берілсін, онда айқын емес функцияның дербес туындыларын табу формуланы ескеріп, яғни соңғы

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$$

формуланы мына түрге түрлендіреміз:

$$S = \iint_{D} \frac{\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}\, dxdy.$$

12.2. Бірінші текті беттік интегралдың анықтамасы

Бізге бөлікті тегіс Φ бет берілсін және оның шекарасы (тұйық болуы да мүмкін) бөлікті тегіс қисық сызық болсын. Квадратталатын Φ бетте анықталған және шектелген $f(x,y,z)$ функцияны қарастырайық. Тегіс қисық сызықтармен Φ бетті кіші $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n$ n бөліктерге бөлейік (*12.2-сурет*) және Φ_i бөліктердің ауданын $S(\Phi_i)$ таңбамен белгілейік $(i=\overline{1,n})$. Осы Φ_i бөліктердің әрқайсысынан еркімізше $A_i(x_i, y_i, z_i)$ нүкте алып $((x,y,z)\in D)$, $f(x, \; y,z)$ функцияның интеграл қосындысы деп аталатын мына қосындыны қарастырайық:

$$J(\Phi_i, A_i) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot S(\Phi_i) \tag{12.8}$$

және Φ_i бөліктің диаметрі d_i, ал $d = \max\limits_i \{d_i\}$ болсын әрі $(x_i, \; y_i, z_i) \in \Phi_i$.

Анықтама. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ санына $\delta > 0$ саны табылып, $d < \delta$ теңсіздігі орындалатын кез келген бөліктеу әдісіне тәуелсіз әрі кез келген $A_i(x_i, y_i, z_i)$ нүкте үшін $|J(\Phi_i, A_i) - J| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда J саны $d \to 0$ ұмтылғандағы (12.8) интеграл қосындының шегі деп аталады. Бұл жағдайда J шек $f(x,y,z)$ функциядан Φ бет бойынша алынған бірінші текті беттік интеграл деп аталады және ол былай белгіленеді:

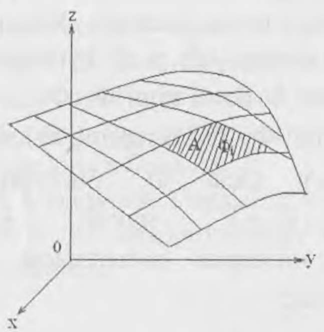
$$J = \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot S(\Phi_i) = \iint_{\Phi} f(x,y,z)ds. \tag{12.9}$$

12.3 Бірінші текті беттік интегралды екі еселі интегралға келтіру

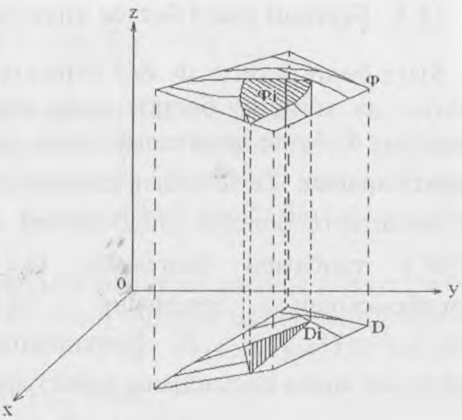
Егер бірінші текті беттік интегралды екі еселі интегралға келтіре алсақ, онда біз екінші текті интегралдың бар болуын және де оны қалай есептеу керек сияқты сұрақтарға оңай жауап бере аламыз. Сондықтан бірінші текті беттік интегралды екі еселі интегралға келтіру жағын қарастырайық.

12.2-теорема. Егер Φ тегіс бет $z = \varphi(x,y)$ теңдеумен берілсе, $(x,y)\in D$, D-тұйық шектелген облыс, ал $f(x,y,z)$ функция Φ бетте анықталған және шектелген болса, онда мына теңдік орындалады:

$$\iint_{\Phi} f(x,y,z)ds = \iint_{D} f(x,y,\varphi(x,y))\sqrt{1+\varphi_x'^2(x,y)+\varphi_y'^2(x,y)}dxdy. \tag{12.10}$$



12.2-сурет



12.3-сурет

Бұл жағдайда, (12.10) теңдіктің сол жағындағы бірінші текті беттік интеграл бар, егер оң жағындағы екі еселі интеграл бар болса.

Дәлелдеуі. Берілген Ф бетті бөлікті қисық сызықтармен n бөлікке бөлейік. Осы бөліктерді XOY жазықтығына проекциялайық, онда D облысы да квадратталатын D_i бөліктерге бөлінеді, бұл жағдайда D_i бөліктердің әрқайсысының диаметрі сәйкес Φ_i бөліктердің диаметрінен үлкен болмайды (*12.3-сурет*).

Енді бірінші текті беттік $\iint\limits_{\Phi} f(x,y,z)ds$ интегралға сәйкес келетін

$$J(\Phi_i, A_i) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot S(\Phi_i) \qquad (12.11)$$

интеграл қосындыны қарастырайық, мұндағы Φ_i бөліктің $S(\Phi_i)$ ауданы

$$S(\Phi_i) = \iint\limits_{\Phi_i} \sqrt{1 + \varphi_x'^{2}(x,y) + \varphi_y'^{2}(x,y)}dxdy$$

формуламен анықталады. $z = \varphi(x,y)$ тегіс бет болғандықтан, $\sqrt{1 + \varphi_x'^{2} + \varphi_y'^{2}}$ функция үзіліссіз, сондықтан $S(\Phi_i)$ функцияға орта мән туралы теореманы қолданайық, сонда:

$$S(\Phi_i) = \sqrt{1 + \varphi_x'^{2}(x_i^*, y_i^*) + \varphi_y'^{2}(x_i^*, y_i^*)} \cdot S_i$$

теңдік орындалады, мұндағы (x_i^*, y_i^*) нүкте D_i облыстың нүктесі, ал S_i – осы облыстың ауданы. Онда, осыдан және (12.11) теңдіктен

$$\overline{J}(\Phi_i, A_i) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, \varphi(x_i, y_i)) \times$$
$$\times \sqrt{1+\varphi_x'^{\,2}(x_i^*, y_i^*) + \varphi_y'^{\,2}(x_i^*, y_i^*)} \cdot S_i .$$

Енді осы интеграл қосындыны (12.10) теңдіктің оң жағындағы екі еселі интегралды, Φ беттің Φ_i бөліктеріне сәйкес келетін D облыстың D_i бөліктеуіндегі интеграл қосындымен салыстырайық:

$$\overline{J}(\Phi_i, A_i) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, \varphi(x_i, y_i)) \sqrt{1+\varphi_x'^{\,2}(x_i, y_i) + \varphi_y'^{\,2}(x_i, y_i)} \cdot S_i .$$

Онда $\overline{J}(\Phi_i, A_i)$ интеграл қосындыдағы f пен $\sqrt{1+\varphi_x'^{\,2} + \varphi_y'^{\,2}}$ функциялардың мәндері еркімізше алынған тек бір ғана $A_i(x_i, y_i, z_i)$ нүктедегі мәндері, ал $J(\Phi_i, A_i)$ интеграл қосындыдағы f функцияның мәні $\overline{J}(\Phi_i, A_i)$ қосындыдағы сияқты $A_i(x_i, y_i, z_i)$ нүктедегі мәні, ал $\sqrt{1+\varphi_x'^{\,2} + \varphi_y'^{\,2}}$ функцияның мәні орта мән туралы теореманың шартындағы нүктедегі мәні және (x_i^*, y_i^*) нүкте де D_i облысының нүктесі $(x_i \neq x_i^*, y_i \neq y_i^*)$. $\sqrt{1+\varphi_x'^{\,2} + \varphi_y'^{\,2}}$ функция үзіліссіз болғандықтан, тұйық және шектелген D облыста ол бірқалыпты үзіліссіз болады, яғни кез келген $\varepsilon > 0$ санына $\delta_i > 0$ саны табылып,

$$\left| \sqrt{1+\varphi_x'^{\,2}(x_i, y_i) + \varphi_y'^{\,2}(x_i, y_i)} - \sqrt{1+\varphi_x'^{\,2}(x_i^*, y_i^*) + \varphi_y'^{\,2}(x_i^*, y_i^*)} \right| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалады, егер $d < \delta_1$ болса. Теореманың шарты бойынша $|f(x, y)| \leq c - const$, онда

$$|J(\Phi_i, A_i) - \overline{J}(\Phi_i, A_i)| \leq$$
$$\leq \left| \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, \varphi(x_i, y_i)) \left[\sqrt{1+\varphi_x'^{\,2}(x_i^*, y_i^*) + \varphi_y'^{\,2}(x_i^*, y_i^*)} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \sqrt{1+\varphi_x'^{\,2}(x_i, y_i) + \varphi_y'^{\,2}(x_i, y_i)} \right] \cdot S_i \right| \leq c\,\varepsilon \sum_{i=1}^{n} S_i = c\,\varepsilon\, S. \qquad (12.12)$$

Енді теореманы толық дәлелдеу үшін мына тұжырымды дәлелдейік: егер (12.10) теңдіктің оң жағындағы интеграл бар болса, онда кез келген $\varepsilon > 0$ сан үшін $\delta_2 > 0$ саны табылып, D_i

облыстардың диаметрі δ_2-ден кіші болатындай бөліктеуге сәйкес келетін барлық $\overline{J}(\Phi_i, A_i)$ қосынды үшін

$$\left|\iint_D f(x,y,\varphi(x,y))\sqrt{1+\varphi_x'^2(x,y)+\varphi_y'^2(x,y)}dxdy-\overline{J}(\Phi_i,A_i)\right|<\varepsilon \qquad (12.13)$$

теңсіздігі орындалады. Ол үшін $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$ және D облысты $d_i<d$ теңсіздігі орындалатындай D_i облыстарға бөлейік, онда D_i облыстардың ($i=\overline{1,n}$) әрқайсысының диаметрі δ-дан кіші болады. Бұл жағдайда (12.12) және (12.13) теңсіздіктері орындалады, онда осы теңдіктерден мына теңсіздікті аламыз (жеткілігінше аз кез келген бөліктеу үшін):

$$\left|\iint_D f(x,y,\varphi(x,y))\sqrt{1+\varphi_x'^2(x,y)+\varphi_y'^2(x,y)}dxdy-\right.$$
$$\left.-J(\Phi_i,A_i)\right|<\varepsilon(1+kS).$$

Ал бұл соңғы теңсіздік $J(\Phi_i, A_i)$ интеграл қосындының шегі бар болуын және ол шек (12.10) теңдіктің оң жағындағы екі еселі интегралға тең болатынын айқындайды. Теорема дәлелденді.

12.3-теорема. Егер ерекше нүктесі жоқ Ф бет

$$x=\varphi(u,v),\ y=\psi(u,v),\ z=x(u,v), \quad (u,v)\in D'$$

параметр теңдеумен берілсе және $f(x,y,z)$ функция осы бетте үзіліссіз болса, онда (12.9) бірінші текті беттік интеграл бар және

$$\iint_\Phi f(x,y,z)ds=\iint_D f(\varphi(u,v),\psi(u,v),x(u,v))\times$$
$$\times\sqrt{EG-F^2}dudv$$

теңдігі орындалады, мұндағы

$$E=\varphi_u'^2(u,v)+\psi_u'^2(u,v)+x_u'^2(u,v),$$
$$G=\varphi_v'^2(u,v)+\psi_v'^2(u,v)+x_v'^2(u,v),$$
$$F=\varphi_u'\cdot\varphi_v'+\psi_u'\cdot\psi_v'+x_u'\cdot x_v'.$$

Бұл жағдайда (12.7) формуладағы $A_1^2+B_1^2+C_1^2$ өрнек $EG-F^2$ өрнегіне тең, яғни $A_1^2+B_1^2+C_1^2=\sqrt{EG-F^2}$.

Бірінші текті беттік интегралды физика мен механика есептерін шығаруға да қолданады, мысалы, егер де материалды Ф беттің $A(x,y,z)$ нүктесіндегі тығыздығы $\rho(x,y,z)$ функция болса, онда мына теңдіктер орындалады:

а) беттің массасы:

$$M = \iint_{\Phi} \rho(x, y, z) ds;$$

ә) беттің XOY, XOZ, YOZ координат жазықтықтарындағы сәйкес статикалық моменттері:

$$M_{xy} = \iint_{\Phi} z\, \rho(x, y, z) ds,$$

$$M_{xz} = \iint_{\Phi} y\, \rho(x, y, z) ds,$$

$$M_{yz} = \iint_{\Phi} x\, \rho(x, y, z) ds;$$

б) беттің ауырлық центрі:

$$x_0 = \frac{M_{yz}}{M},\ y_0 = \frac{M_{xz}}{M},\ z_0 = \frac{M_{xy}}{M};$$

в) беттің Ox, Oy, Oz координат осьтеріндегі сәйкес инерция моменттері:

$$J_x = \iint_{\Phi} \left(y^2 + x^2\right) \rho(x, y, z) ds,$$

$$J_y = \iint_{\Phi} \left(x^2 + z^2\right) \rho(x, y, z) ds,$$

$$J_z = \iint_{\Phi} y^2\, \rho(x, y, z) ds;$$

г) беттің yOz, xOy, xOz координат жазықтықтарындағы инерция моменттері:

$$J_{yz} = \iint_{\Phi} x^2\, \rho(x, y, z) ds,$$

$$J_{xy} = \iint_{\Phi} z^2\, \rho(x, y, z) ds,$$

$$J_{xz} = \iint_{\Phi} y^2 \rho(x, y, z) ds;$$

ғ) координат жүйенің бас нүктесі бойынша беттің инерция моменттері:

$$J_0 = \iint_{\Phi} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \rho(x, y, z) ds;$$

д) массасы M-ге тең материалды $A_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктенің материалды Ф бетке $\overline{F} = \{F_x; F_y; F_z\}$ тартылыс күші:

$$F_x = \gamma M \iint_{\Phi} \frac{x - x_0}{r^3} \rho(x, y, z) ds,$$

$$F_y = \gamma M \iint_{\Phi} \frac{y - y_0}{r^3} \rho(x, y, z) ds,$$

$$F_z = \gamma M \iint_{\Phi} \frac{z - z_0}{r^3} \rho(x, y, z) ds,$$

мұндағы $\bar{r} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$, $r = |\bar{r}|$, $\gamma - const$.

1-мысал. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$ жарты сферада $J = \iint_{\Phi} (x + y + z) ds$ интегралын есептейік.

Шешуі. J интегралды (12.10) формуламен есептейік:

$$z'_x = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \quad z'_y = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

$$z = \varphi(x, y) = +\sqrt{a^2 - x^2 - y^2},$$

$$ds = \sqrt{1 + \varphi_x'^2 + \varphi_y'^2}\, dxdy =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy = \frac{a\, dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

$$J = a \iint_D \left(x + y + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\right) \frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} =$$

$$= a \iint_D \left(\frac{x + y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} + 1 \right) dxdy,$$

мұндағы D – жарты сфераның xOy жазықтығындағы проекциясы, яғни $x^2 + \quad + y^2 \leq a^2$ дөңгелек. Енді поляр координат жүйеге көшейік (*10.5-тақырып*, полюс D дөңгелектің ішкі нүктесі): $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$

$$J = a \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \left(\frac{\rho \cos \varphi + \rho \sin \varphi}{\sqrt{a^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi - \rho^2 \cos^2 \varphi}} + 1 \right) \rho\, d\rho =$$

$$= a \int_0^{2\pi} (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi \int_0^a \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} + a \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho\, d\rho = 0 + \pi a^3.$$

2-мысал. $x = 2y^2 + 1,\ y \geq 0$ цилиндрлік бетті $x = y^2 + z^2$ және $x = 2, x = 3$ беттермен қиғанда пайда болған Φ бетте

$$J = \iint_{\Phi} y ds$$

интегралды есептейік.

Шешуі. Φ бетті xOz жазықтығына проекциялайық және осы облысты D таңбамен белгілейік. D облыстың шекарасын табу үшін $x = 2y^2 + 1,\quad x = \quad = y^2 + z^2$ теңдеулерден y-ті шығарып тастайық: $x = 2(x - z^2) + 1,\ 2z^2 - \ - x - 1 = 0$. Сонымен, D облыстың оң жағы мен сол жағы сәйкес $x = 3, x = 2$ түзулермен, ал қалған екі жақтары $z = +\sqrt{\frac{x+1}{2}}, z = -\sqrt{\frac{x+1}{2}}$ қисық сызықтармен шектелген. Енді Φ беттің теңдеуін мына түрге өрнектейік: $y = \sqrt{\frac{x-1}{2}}$. Осыдан

$$y'_x = \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{x-1}}.$$

Онда:

$$J = \iint_{\Phi} y ds = \iint_{D} \sqrt{\frac{x-1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{8x-7}{8x-8}} dxdy =$$

$$= \frac{1}{4}\int_2^3 \sqrt{8x-7}dx \int_{-\sqrt{\frac{x-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{x-1}{2}}} dz = = \frac{1}{4}\int_2^3 \sqrt{8x-7}\left(\sqrt{\frac{x-1}{2}} + \sqrt{\frac{x-1}{2}}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_2^3 \sqrt{8x^2 - 15x + 7}dx = \int_2^3 \sqrt{\left(x - \frac{15}{16}\right)^2 - \left(\frac{1}{16}\right)^2} dx =$$

$$= \left[\frac{16x-15}{32}\sqrt{\left(x - \frac{15}{16}\right)^2 - \left(\frac{1}{16}\right)^2} - \frac{1}{2 \cdot 256}\ln\left|x - \frac{15}{16} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sqrt{\left(x - \frac{15}{16}\right)^2 - \left(\frac{1}{16}\right)^2}\right|\right]_2^3 = \frac{1}{256}\left(\ln\frac{17 + \sqrt{288}}{33 + \sqrt{1088}} + 33\sqrt{1088} - 17\sqrt{288}\right).$$

12.4. Бір жақты және екі жақты беттер

Алдағы тақырыпта екінші текті беттік интегралдың анықтамасын келтіру үшін, алдымен беттің жақтары туралы түсінік алуымыз керек. Ол үшін Φ тегіс бетті қарастырайық.

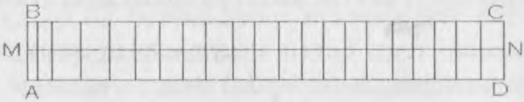
Егер Ф бет бір денені шектеп тұрса, онда ол беттің екі жағы бар: біреуі сыртқы, ал екіншісі ішкі жағы. Мысалы, сфера беттің екі жағы бар. Егер бет $z = f(x, y)$ теңдеумен берілсе, онда оның да ішкі және сыртқы жақтары бар. Беттердің бәрі тек қана екі жақта бет болып қана қоймайды, сол сияқты бір жақты беттер де бар, мысалы, Мёбиус жапырағы деп аталатын бет біржақты бетке мысал бола алады (*12.4-сурет*). Тегіс Ф беттің ішкі $A_0(x_0, y_0, z_0) = A_0$ нүктесін алайықта осы A_0 нүктеге $\bar{n}$ нормаль векторды тұрғызайық және осы нормаль вектордың мүмкін болатын екі бағытының бірін таңдап алайық. Енді беттің шекарасымен қиылыспайтын әрі осы бетке $A_0(x_0, y_0)$ нүктеден өтетін тұйық L контурды жүргізейік. Ішкі $A_0(x_0, y_0)$ нүктеге жүргізілген беттің $\bar{n}$ нормаль векторын осы нүктеден бастап L контур бойымен қозғағанда L контурдың барлық нүктелерінде нормаль вектор Ф бетке нормаль вектор болсын және нормаль вектордың бағыты үзіліссіз өзгерсін. Демек, бұл жағдайда $\bar{n}$ нормаль вектор бетке әр уақытта нормаль вектор болып қалады, онда вектордың бағытына екі жағдай орындалады. Біріншісі, L контур бойымен қозғалып, бастапқы $A_0(x_0, y_0)$ нүктеге оралғанда $\bar{n}$ вектордың бағыты бастапқы бағытпен бірдей болады, екіншісі $\bar{n}$ вектордың бағыты бастапқы бағытқа қарама-қарсы болады.

Анықтама. Егер Ф тегіс бетте жатқан кез келген L тұйық контур *осы* беттің шекара нүктелерімен ортақ нүктесі болмаса және контур бойымен айналған нормаль вектордың бетке қатысты бағыты өзгермесе, онда тегіс бет екіжақты бет деп аталады.

Егер Ф бетте жатқан L тұйық контур бар болса және контур бойымен айналған нормаль вектордың бағыты қарама-қарсы бағытқа өзгерсе, онда бет біржақты бет деп аталады.

Екіжақты бетке жазықтық, сфера, гиперболоидтар мысал бола алады және кез келген тұйық әрі өзара қиылыспайтын бет екіжақты бет болады.

Егер D облыстың кез келген $A(x, y, z)$ нүктесіне $\bar{a}(A) = \bar{a}(x, y, z)$ вектор сәйкес келсе, онда бізге D облыста $\bar{a}(A) = \{a_x(A); a_y(A); a_z(A)\}$ векторлық өріс берілді дейміз және $\bar{a}(A)$ векторлық өріс нормальдары D облыста үзіліссіз деп аталады, егер векторлық өрістің $a_x(A), a_y(A), a_z(A)$ координаттары D облыста үзіліссіз болса. Демек, егер Ф тегіс бет болса, онда оның әрбір $A(x, y, z)$ нүктесінің $\bar{n}(A)$ нормалі бар және де осы нүктенің маңайы ойып алынған беттің бөлігінде векторлық өріс нормальдары үзіліссіз болады. Сонымен, егер бүкіл бетке үзіліссіз векторлық өріс нормальдары берілсе, онда бізге екіжақты бет берілді дейміз. Үзіліссіз векторлық өріс нормальдары жоқ бетті біржақты бет дейміз. Әрбір екіжақты бетке бағыттары қарама-қарсы $+\bar{n}(A)$, $-\bar{n}(A)$ екі үзіліссіз векторлық өріс нормальдарын тұрғызайық. Осы екі векторлық өріс нормальдарының бірін қалап алу беттің екі жағының бірін қалап алу болып табылады, бұл жағдайда бет болжанған бет деп аталады. Мысалы, егер Ф бет $z = f(x, y)$ теңдеумен берілсе, мұндағы $f(x, y)$ – үзіліссіз дифференциалданатын функция, онда беттің сыртқы (жоғарғы) жағына үзіліссіз векторлық өріс нормальдарын вектор-функция $\bar{n}(A) = \{-f_x'(A); -f_y'(A); 1\}$ түрінде, ал ішкі (төменгі) жағына вектор-функция $-\bar{n}(A) = \{f_x'(A); f_y'(A); -1\}$ түрінде беруге болады. Ал егер Ф бет параметр теңдеуімен берілсе, онда беттің бір жағына $\bar{n} = \{A; B; C\}$, екінші жағына $-\bar{n}(A) = \{-A; -B; -C\}$ вектор функцияны алуға болады.



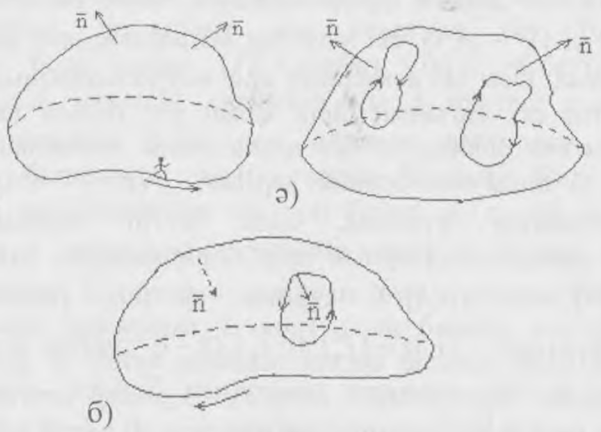
а)

ә)

12.4-сурет

Енді *12.4-суретте* бейнеленген, қағаздан жасалған $ABCD$ төртбұрышқа орта түзуін жүргізейік және A мен C нүкте және B мен D нүктелері беттесетіндей (AB мен DC түзулері беттесетіндей) қағазды бұрап жапсырайық та, M нүктеден бастап осы нүктедегі нормаль векторды орта сызық бойымен қозайық, қозғап осы нүктеге қайтып оралғанда нормаль вектордың бағыты кері баытқа өзгереді.

Біз болжанған бетті қарастырайық және ол бір немесе бірнеше контурлармен шектелсін. Болжанған беттің бойындағы контурлар бойымен оң бағытта айналу бағытын мына ереже бойынша анықтаймыз: егер бақылаушы беттің қалап алған жағында тұрса, яғни біздің аяғымыздан басымызға қарай бағытталған вектор беттің нормаль векторы болады, онда бақылаушы контур бойымен қозғалғанда бет біздің сол жағымызда қалуы керек (12.5 а, ә-сурет). Оң бағытқа кері теріс бағыт болады (12.5 б-сурет).



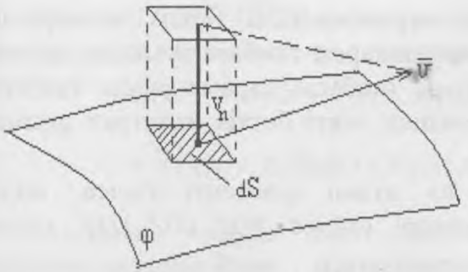
12.5-сурет

12.5. Екінші текті беттік интегралдың анықтамасы

Алдымен екінші текті беттік интегралдың анықтамасын бірінші текті беттік интегралдың анықтамасы арқылы бёрейік. Біз қозғалыста болатын сұйық затпен толтырылған кеңістікті қарастырайық және сұйық заттың кез келген $A(x,y,z)$ нүктедегі жылдамдығы $\bar{v}(x, y,z)=\{P(x,y,z);Q(x,y,z); R(x,y,z)\}$ вектор болсын. Осы кеңістіктің белгілі бір Ф бетінен бірлік уақытта ағып шығатын сұйық заттың П мөлшерін есептейік. Ол үшін Ф беттің шексіз аз ds элементін қарастырайық, онда бірлік уақытта ds элементтен $d\Pi = v_n ds$ сұйық зат ағып шығады, мұндағы v_n шама ds элементінің $\bar{n}$ нормаль векторындағы $\bar{v}$ вектордың проекциясы және ол $\bar{v}$ векторымен оның $\bar{v}^0=\{\cos(\bar{n},x);\cos(\bar{n},y);\cos(\bar{n},z)\}$ векторының скаляр көбейтіндісіне тең (*12.6-сурет*). Онда:

$$d\Pi = (P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + \\ + R(x,y,z)\cos\gamma)ds, \qquad (12.16)$$

мұндағы $\cos(\bar{n},x),\cos(\bar{n},y),\cos(\bar{n},z)$ нормаль вектор мен координат осьтерінің арасындағы α,β,γ бұрыштардың косинустары, яғни нормаль вектор бойындағы бірлік вектордың координаттары.



12.6-сурет

Соңғы өрнек ds элементтен бірлік уақытта ағып шығатын сұйық заттың мөлшерін анықтайды және ол сұйық зат тасқынының элементі деп аталады. Ал барлық Ф беттен ағып шығатын сұйық заттың П мөлшерін анықтау үшін (12.16) өрнектен Ф бет бойынша интеграл алсақ жеткілікті, яғни

$$\Pi = \iint_{\Phi} [P(x, y z)\cos\alpha + Q(x, y, z)\cos\beta +$$
$$+ R(x; y, z)\cos\gamma] ds.$$

Бұл интеграл жоғарыда қарастырылған

$$P(x, y, z)\cos\alpha + Q(x, \ y, z)\cos\beta + R(x, y, z)\cos\gamma$$

функциядан алынған бірінші текті беттік интеграл болып табылады. Негізінде бұл интеграл Ф бетте берілген $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ функцияларына ғана тәуелді болып қоймайды, сонымен қатар ол беттің әрбір нүктесіндегі нормаль вектордың бағытына да тәуелді болады.

Енді бізге екіжақты тегіс Ф бет берілсін және осы беттің кез келген бір жағын алайық. Ф бетте анықталған $\bar{a} = \{P(x, y, z); Q(x, y, z); R(x, y, z)\}$ вектор функцияны қарастырайық. Беттің $M(x, y, z)$ нүктесінің нормаль векторындағы $\bar{a}$ вектордың проекциясын a_n әрпімен белгілейік:

$$a_n = P(x, y, z)\cos\alpha + Q(x, \ y, z)\cos\beta + R(x, y, z)\cos\gamma.$$

Анықтама. Ф бет (таңдап алынған жағы бойынша) бойынша алынған мына интеграл:

$$\iint_{\Phi} [P(x, y, z)\cos\alpha + Q(x, y, z)\cos\beta + R(x, y, z)\cos\gamma] ds,$$

$\bar{a}(M) = \{P(x, y, z); Q(x, y, z); R(x, y, z)\}$ вектор функциядан алынған **екінші текті (немесе координаттары бойынша) беттік интеграл** деп аталады және ол қысқаша былай белгіленеді:

$$\iint_{\Phi} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy,$$

мұндағы $\cos\alpha = \cos(\bar{n}, x)$, $\cos\beta = \cos(\bar{n}, y)$, $\cos\gamma = \cos(\bar{n}, z)$ бағыттаушы косинустар.

Енді беттің екінші жағын қарастырғанда бірлік вектордың координаттарының таңбасы қарама-қарсы таңбаға ауысады, демек екінші текті беттік интегралдың таңбасы қарама-қарсы таңбаға ауысады. Ал біржақты бетке екінші текті беттік интеграл ұғымы енгізілмейді.

Егер ds беттің шексіз аз аудан элементі болса, онда $\cos\alpha\, ds, \cos\beta\, ds, \cos\gamma\, ds$ өрнектері сәйкес YOZ, XOZ, XOY координат жазықтықтарындағы проекциясы, олай болса, оларды сәйкесінше $dydz$, $dxdz$, $dxdy$ таңбалармен белгілейік. Онда екінші текті беттік интеграл жалпы түрде былай белгіленеді:

$$\iint\limits_{\Phi}[P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]ds =$$

$$= \iint\limits_{\Phi} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy. \qquad (12.17)$$

Енді екінші текті беттік интегралдың анықтамасын интеграл қосынды арқылы берейік. Ол үшін $\overline{a}(M)$ вектордың $R(x,y,z)$ координатын ғана қарастырайық. Болжанған Φ тегіс бетті Φ_i кіші беттерге бөліктейік, осы Φ_i бөліктің әрқайсысынан кез келген $M_i(x_i,\ y_i, z_i)$ нүкте алып, интеграл қосындыны қарастырайық:

$$\sum_{i=1}^{n} R(x_i, y_i, z_i)\cdot s_i, \qquad (12.18)$$

мұндағы s_i шама Φ_i беттің xOy координат жазықтығындағы проекциясы және оның таңбасы оң (теріс) болады, егер Φ_i бөліктің кез келген нүктесіндегі нормаль вектордың оң бағыты Oz осімен сүйір (доғал) бұрыш түзесе.

Егер $R(x,y,z)$ функциясы тегіс Φ бетте үзіліссіз болса және осы бетті аз бөліктерге шексіз бөлгенде (12.18) интеграл қосындының шегі бар әрі ол мына интегралға тең болады:

$$\iint\limits_{\Phi} R(x,y,z)dxdy. \qquad (12.19)$$

Осы сияқты

$$\sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_i, z_i)\cdot s_i, \quad \sum_{i=1}^{n} Q(x_i, y_i, z_i)\cdot s_i \qquad (12.18)'$$

интеграл қосындылары арқылы сәйкес екінші текті беттік интегралдарды аламыз (мұнда әрбір қосындыдағы s_i әртүрлі):

$$\iint\limits_{\Phi} P(x,y,z)dydz, \quad \iint\limits_{\Phi} Q(x,y,z)dxdz. \qquad (12.20)$$

Сонда (12.19)-(12.20) екінші текті беттік интегралдарды қосып, екінші текті беттік интегралдың жалпы түрін аламыз:

$$\iint\limits_{\Phi} P(x,y,z)dydz + \iint\limits_{\Phi} Q(x,y,z)dxdz + \iint\limits_{\Phi} R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\Phi} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy.$$

Сонымен, екінші текті беттік интегралдың анықтамасы бойынша, екінші текті беттік интеграл беттің қай жағын (бетін) алуымызға тәуелді болады, яғни алдын ала болжанған беттің жағын өзгертсек, онда (12.18) бен (12.18)′ интеграл қосындылардағы $P(x_i,y_i,z_i)$, $Q(x_i,y_i,z_i)$, $R(x_i,y_i,z_i)$ және s_i мәндері өзгермейді, ал M_i нүктедегі нормаль вектор мен координат остерінің арасындағы бұрыштардың косинустары мәндерінің таңбасы қарама-қарсы таңбаға өзгереді.

12.6. Екінші текті беттік интегралды есептеу

1. Бізге тегіс (бөлікті-тегіс) Ф бет берілсін әрі ол $z = f(x,y)$ теңдеуімен анықталсын және осы бетте шектелген $R = R(x,y,z)$ берілсін. Онда, *12.2-теорема* және екінші текті беттік интегралдың анықтамасы бойынша

$$\iint\limits_{\Phi} R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{D_1} R(x,y,f(x,y))dxdy \qquad (12.21)$$

теңдік орындалады. Егер осы теңдіктің оң жағындағы D_1 облыс бойынша алынған екі еселі интеграл бар болса, онда (12.21) теңдіктің сол жағындағы екінші текті беттік интеграл да бар, мұндағы D_1 облыс Ф беттің xOy координат жазықтығындағы проекциясы.

Шынында да, (12.21) теңдіктегі беттік интегралды мына түрде жазуға болады:

$$\iint\limits_{\Phi} R(x,y,z)\cos\gamma\, ds. \qquad (12.21)'$$

Осы интегралға (12.13) формуланы пайдаланып, (12.21) теңдікті аламыз.

Сонымен, мына тұжырымға келеміз: $z = f(x,y)$ теңдеумен берілген Ф беттің жоғарғы беті бойынша алынған $\iint\limits_{\Phi} R(x,y,z)ds$ екінші текті беттік интегралын екі еселі интегралға келтіру үшін интеграл астындағы $R(x,y,z)$ функциядағы z-тің орнына $f(x,y)$ функцияны қойып, ал Ф бет бойынша интегралдауды осы беттің

$$y=+\sqrt{z-x^2}, \text{ егер } y\geq 0; \quad y=-\sqrt{z-x^2}, \text{ егер } y\leq 0$$

теңдеулермен анықталады әрі ол беттерді сәйкес Φ_1 мен Φ_2 әріптермен белгілейік. Φ_1 мен Φ_2 беттердің xOz координат жазықтығындағы проекциясы $z=x^2$ парабола мен $z=2$ түзуден тұрады, яғни $\Phi_1=\{(x,z):-\sqrt{2}\leq x\leq \leq\sqrt{2},\ x^2\leq z\leq 2\}$. Енді Φ_1 мен Φ_2 беттер бойынша алынған екінші текті беттік интегралды екі еселі интегралға өрнектейік:

$$\iint\limits_{\Phi_1} ydzdx=-\iint\limits_{D} y(x,z)dzdx=-\iint\limits_{D}\sqrt{z-x^2}\,dzdx,$$

мұнда $\cos\beta(M)<0$ болғандықтан, екі еселі интегралдың алдындағы таңба теріс болады. Осы сияқты:

$$\iint\limits_{\Phi_2} ydzdx=\iint\limits_{D} y(x,z)dzdx=\iint\limits_{D}\left(-\sqrt{z-x^2}\right)dzdx.$$

Демек, $J=\iint\limits_{D} ydzdx=\iint\limits_{\Phi_1} ydzdx-\iint\limits_{\Phi_2} ydzdx=-\iint\limits_{D}\sqrt{z-x^2}\,dzdx-$

$$-\iint\limits_{D}\sqrt{z-x^2}\,dzdx=-2\iint\limits_{D}\sqrt{z-x^2}\,dzdx=-2\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}dx\int\limits_{x^2}^{2}\sqrt{z-x^2}\,dz=$$

$$=-2\cdot\frac{2}{3}\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(z-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{x^2}^{2}dx=-\frac{4}{3}\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}dx.$$

Соңғы интегралды есептеу үшін $x=\sqrt{2}\sin t$ алмастыруын пайдаланайық, сонда: $\sin t=\dfrac{x}{\sqrt{2}}$, $\sin t=1$, $t=\dfrac{\pi}{2}$, $\sin t=-1$, $t=-\dfrac{\pi}{2}$.

Онда:

$$J=-\frac{3}{4}\cdot 2^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2dt=-\frac{4}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos 2t+\cos^2 2t\right)dt=$$

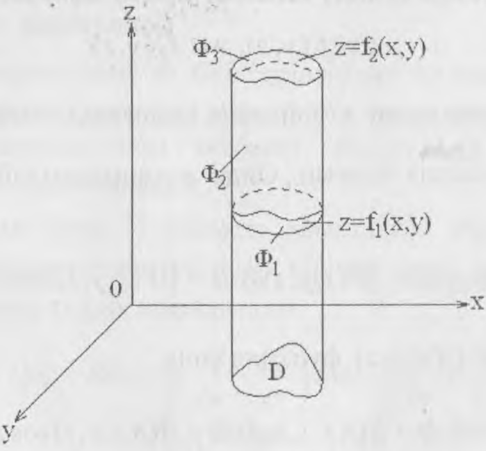
$$=-\frac{4}{3}\left[\left(t+\sin 2t\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 4t\right)dt\right]=2\pi.$$

12.7. Остроградский формуласы

Кеңістіктегі $\overline{V}$ цилиндрлік облыс екі бөлікті тегіс Φ_1 мен Φ_2 беттермен және олар сәйкес $z=f_1(x,y)$, $z=f_2(x,y)$ теңдеулермен анықталсын, ал бүйір жақтары (жасаушылары) Oz осіне параллель Φ_3 бетпен шектелсін (*12.7-сурет*). Біз Φ беттің сыртқы (жоғарғы) бетін қарастырайық, мұндағы Φ бет Φ_1, Φ_2, Φ_3 беттерден тұрады және $\overline{V}$ облыста анықталған әрі үзіліссіз $R(x,y,z)$, $\dfrac{\partial R}{\partial z}$ функцияларды қарастырайық. Онда:

$$\int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = R(x,y,f_2(x,y)) - R(x,y,f_1(x,y))$$

теңдік орындалады. Осы тепе-теңдікті $\overline{V}$ облыстың xOy координат жазықтығындағы D проекциясында интегралдайық:



12.7-сурет

$$\iiint\limits_{\overline{V}} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{D} R(x,y,f_2(x,y))dxdy -$$

$$- \iint\limits_{D} R(x,y,f_1(x,y))dxdy. \qquad (12.27)$$

Соңғы теңдіктің оң жағындағы бірінші екі еселі интегралды (12.21) формула бойынша $R(x,y,z)$ функциядан алынған екінші текті беттік интеграл (Φ_2 бет бойынша) арқылы жазуға болады. $z=f_2(x, y)$ беттің жоғарғы беті бойынша

$$\iint_D R(x,y,f_2(x,y))dxdy = \iint_{\Phi_2} R(x,y,f_2(x,y))dxdy.$$

Сонымен, соңғы теңдіктің оң жағындағы бірінші интеграл Φ_2 беттің жоғарғы, ал екінші интеграл Φ_1 беттің төменгі беті бойынша алынған. (12.28) теңдіктің оң жағына мәні нөлге тең Φ_3 беттің сыртқы беті бойынша алынған $\iint_{\Phi_3} R(x,y,z)dxdy$ интегралды қосайық. Сонда (12.28) теңдіктің оң жағында $\overline{V}$ облысты шектеп тұрған Φ беттің сыртқы беті бойынша алынған екінші текті беттік интегралды аламыз:

$$\iiint_{\overline{V}} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_{\Phi} R(x,y,z)dxdy = \iint_{\Phi} R(x,y,z)\cos\gamma\, ds. \qquad (12.29)$$

Енді $\overline{V}$ облыстың бүйір беті Ox осіне параллель, ал жоғарғы мен төменгі беттері бөлікті-тегіс беттермен шектелсін:

$$z = f_1(y,z),\ z = f_2(y,z)$$

$P(x,y,z)$ және оның x бойынша алынған дербес $\frac{\partial P}{\partial x}$ туындысы $\overline{V}$ облыста үзіліссіз болсын. Онда жоғарыдағыдай мына теңдікті аламыз:

$$\iiint_{\overline{V}} \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \iint_{\Phi} P(x,y,z)dydz = \iint_{\Phi} P(x,y,z)\cos\alpha\, ds. \qquad (12.30)$$

Осы сияқты $Q(x,y,z)$ функция үшін

$$\iiint_{\overline{V}} \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \iint_{\Phi} Q(x,y,z)dxdz = \iint_{\Phi} Q(x,y,z)\cos\rho\, ds \qquad (12.31)$$

теңдігі орындалады. Жоғарыдағы (12.29)-(12.31) формулалардан мына тұжырымға келеміз.

12.4-теорема.

Егер $\overline{V} = \{(x,y,z) : (x,y)\in D,\ f_1(x,y) \le z \le f_2(x,y)\}$ цилиндрлік облыс, ал $P(x,y,z), Q(x,y,z),\ R(x,y,z)$ функциялары және олардың $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ дербес туындылары осы облыста және оның шекарасында үзіліссіз (тұйық облыста үзіліссіз) болса, онда бөлікті тегіс шектелген Φ бетте Остроградский формуласы орындалады:

$$\iiint_{\overline{V}}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\iint_{\Phi}Pdydz+Qdxdz+Rdxdy. \qquad (12.32)$$

Бұл формула **Остроградский-Гаусс формуласы** деп те аталады.

Ескерту. Егер $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ функциияларьі үшін $\frac{\partial P}{\partial x}+\ +\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=1$ теңдік орындалса, онда (12.32) формуланың сол жағындағы интеграл $\overline{V}$ облыстың көлеміне тең, яғни

$$V=\iiint_{\overline{V}}dxdydz \qquad (12.33)$$

немесе $\overline{V}$ облыстың көлемін екінші текті беттік интеграл арқылы есептеуге болады:

$$V=\iint_{\Phi}Pdydz+Qdxdz+Rdxdy. \qquad (12.34)$$

12.8. Стокс формуласы

Бізге болжанған тегіс Ф бет берілсін әрі ол болжанған бөлікті тегіс L контурмен шектелсін және Ф бет үш өлшемді $\overline{V}$ облыстың ішінде орналассын; осы облыста $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ функцияларын қарастырайық.

12.5-теорема. Егер $\overline{V}$ облыста анықталған $P(x,y,z),Q(x,y,z),$ $R(x,y,z)$ функциялардың үзіліссіз бірінші ретті туындылары бар болса, онда мына теңдік орындалады:

$$\oint_{L}Pdx+Qdy+Rdz=\iint_{\Phi}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz+$$
$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy, \qquad (12.35)$$

мұндағы L контурдың бағыты – оң бағыт. Бұл формула **Стокс формуласы** деп аталады.

Дәлелдеуі. Алдымен Ф бет $z=f(x,y)$ теңдеуімен берілсін және D облыс Ф беттің xOy координат жазықтығындағы проекциясы болсын, ал L' контуры D облыстың шекарасы болсын, яғни ол L контурдың xOy жазықтығындағы проекциясы болады. Енді L контур бойымен алынған

$$\oint_{L}Pdx+Qdy+Rdz \qquad (12.36)$$

екінші текті қисық сызықты интегралды Ф бет бойынша алынған екінші текті беттік интегралға өрнектейік. Бұл өрнектеуді мына схема бойынша іске асырайық:

$$\oint_L \to \oint_{L'} \to \iint_D \to \iint_\Phi, \tag{12.37}$$

яғни кеңістіктегі L контур бойымен алынған қисық сызықты интегралды xOy жазықтықтағы L' контур бойымен алынған қисық сызықты интегралға, содан соң оған Грин формуласын пайдаланып (*11.6-тақырып*) D облыста екі еселі интегралға, ал соңында Ф бет бойынша алынған беттік интегралға өрнектейік. Ол үшін

$$J_1 = \oint_L P(x,y,z)dx \tag{12.38}$$

интегралын қарастырайық, мұнда L контур $z = f(x,y)$ теңдеуімен берілген Ф бетте жатқандықтан, мына теңдік орындалады:

$$J_1 = \oint_{L'} P(x,y,f(x,y))dx.$$

Енді осы теңдікке (11.17) Грин формуласын қолданайық:

$$J_1 = \oint_{L'} P(x,y,f(x,y))dx = -\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \tag{12.39}$$

Нормаль вектордың бағыттауыш косинустарының (12.6) формуланы пайдаланайық, сонда:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\cos(\bar{n},y)}{\cos(\bar{n},z)} = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}.$$

Онда:

$$J_1 = -\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} \right) dxdy.$$

Соңғы теңдікке (12.21)′ формуланы D облыс бойынша алынған екі еселі интегралды Ф бет бойынша алынған беттік интегралға түрлендіреміз:

$$J_1 = -\iint_\Phi \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} \right) \cos\gamma \, ds = -\iint_\Phi \left(\frac{\partial P}{\partial y} \cos\gamma - \frac{\partial P}{\partial z} \cos\beta \right) ds.$$

Осы теңдікті ескеріп, (12.38) теңдік (12.37) сұлба бойынша мына түрге түрленеді:

$$J_1 = \oint_{\Phi} P(x,y,z)dx = \iint_{\Phi}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)ds. \tag{12.40}$$

Біз осы тақырыптың басында Ф бет $z = f(x,y)$ теңдеумен берілсін деп ұйғарып, (12.40) теңдікті алдық, ал егер бет $y = \varphi(x, z)$ теңдеуімен берілсе де біз (12.40) теңдікке келеміз, бұл жағдайда Ф бетті xOy координат жазықтығына емес, xOz жазықтығына проекциялаймыз және Ф бет саны санаулы бөліктерден анықталса да жоғарыдағы формула орындалады. Осы сияқты, $Q(x,y,z)$ және $R(x,y,z)$ функциялары үшін мына теңдіктерді аламыз:

$$\oint_{L} Q(x,y,z)dy = \iint_{\Phi}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right)ds, \tag{12.41}$$

$$\oint_{L} R(x,y,z)dz = \iint_{\Phi}\left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right)ds. \tag{12.42}$$

Жоғарыдағы (12.40)-(12.41) теңдіктерді қосып мына формулаға келеміз:

$$\oint_{L} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \iint_{\Phi}\left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta\right]ds. \tag{12.43}$$

Бұл формула Стокс формуласы деп аталады және оны мына түрде де жазуға болады:

$$\oint_{L} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \iint_{\Phi}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz. \tag{12.44}$$

Сонымен, Стокс формуласы тұйық L контур бойымен алынған екінші текті қисық сызықты интеграл мен осы L контурмен шектелген Ф бет бойынша алынған екінші текті беттік интеграл арасындағы байланысты айқындайды.

Егер Ф бет жазықтықтағы облыс болса (облыс координат жазықтықтарының біреуіне параллель), онда да Стокс формуласы орындалады, бірақ бұл жағдайда Стокс формуласы Грин формуласына айналады. Мысалы, егер Ф бет xOy координат жазықтығына параллель болса, онда $\bar{n}=\{0;0,1\}$,

$$\oint_L R(x,y,z)dz=0.$$

Бұл жағдайда (12.44) теңдіктен Грин формуласын аламыз:

$$\oint_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy=\iint_\Phi\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

Енді *11.7-тақырыптағы 11.6-теоремадай* төмендегі теорема да орындалады және оны дәлелдеусіз қабыл алайық.

Анықтама. Үш өлшемді $\bar{V}$ облыс бірбайланысты бет деп аталады, егер $\bar{V}$ облыстың ішінде, шекарасы L тұйық контур (контур $\bar{V}$ облыста жатыр) болатын бет бар болса.

Бірбайланысты бетке шар және концентрлі сферамен шектелген облыс мысал бола алады, ал бірбайланысты емес бетке тор мысал бола алады.

12.6-теорема. 1. Егер $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ функциялары бірбайланысты $\bar{V}$ облыста анықталған әрі үзіліссіз болса, онда төмендегі үш белгілер эквивалентті, яғни олардың әрқайсысынан қалған екеуін алуға болады.

$\bar{V}$ облысына тиісті кез келген бөліктітегіс L контур үшін

$$\oint_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=0 \qquad (12.45)$$

теңдік орындалады;

II. $\bar{V}$ облыстың кез келген A мен B нүктелерін қосатын әрі осы облыста жататын AB қисық сызығы бойымен алынған

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

интеграл интегралдау бағытына тәуелсіз;

$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ өрнегі толық дифференциал болады, яғни $\bar{V}$ облыстан $u=u(x,y,z)$ функция табылып, $du=P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+\quad+R(x,y,z)dz$ теңдігі орындалады. Бұл жағдайда $\bar{V}$ облыста жатқан кез келген бөлікті тегіс AB қисық сызық үшін

$$\oint_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = u(B) - u(A) \qquad (12.46)$$

теңдігі орындалады.

2. $\overline{V}$ бірбайланысты облыс, ал $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ функциялардың осы облыста бірінші ретті дербес туындылары болса, онда I-III белгілер IV белгіге эквивалентті болады.

IV. $\overline{V}$ облыста мына теңдіктер орындалады:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \ \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}. \qquad (12.47)$$

Ескерту. (12.46) формуладағы $u = u(x,y,z)$ функцияны мына формуладан анықтауға болады:

$$u(x,y,z) = \int_{M_0}^{M} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_{x_0}^{x} P(x,y_0,z_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y,z_0)dy + \int_{z_0}^{z} R(x,y,z)dz + C, \quad (12.48)$$

Мұндағы $C - const$, x_0, y_0, z_0 тағайындалған M_0 нүктенің координаттары $M = M(x,y,z)$ нүкте және қисық сызық ретінде координат осьтеріне параллель сынық түзулер алынған.

XIII ТАРАУ. ӨРІСТЕР ТЕОРИЯСЫ

13.1. Скалярлық өріс және оның градиенті

Біз үш өлшемді кеңістікте (жазықтықта) Φ облысты қарастырайық.

Анықтама. Егер Φ облыстың әрбір $M = M(x,y,z)$ нүктесіне белгілі бір заңдылық бойынша $u(M)$ саны сәйкес қойылса, онда бізге осы облыста скаляр өріс берілді дейміз.

Скалярлық өріске денедегі өріс температурасы, беттегі заряд тығыздығының өрісі, денедегі масса тығыздығының өрісі, т.б. мысал бола алады.

Жоғарыдағы анықтама мен функция анықтамасын ескерсек, онда скалярлық өріс ұғымы мен функция ұғымы Φ облыста бірдей. Демек, төменде Φ облыстағы скалярлық өрісті $u(M)$ функция түрінде қарастыратын боламыз, $M \in \Phi$. Осы өрісте XYZ декарт координат жүйесін тұрғызсақ, онда $u(M)$ функцияны M нүктенің координаттары арқылы жазуға болады, яғни $u(M) = u(x,y,z)$.

Осы тарауда, $u(x,y,z)$ функция Φ облыста үзіліссіз әрі оның x,y,z аргументтері бойынша алынған бірінші ретті дербес туындылары осы облыста үзіліссіз деп қарастыратын боламыз, яғни ол Φ облыста дифференциалданатын функция.

Егер скалярлық өрісті тағайындалған декарт координат жүйеде қарастыратын болсақ, онда скалярлық өрісте болатын құбылыс жайлы толық мағлұмат ала алмаймыз. Сондықтан толық мағлұмат алу үшін беттік деңгейлер және сызықты деңгейлер деп аталатын жаңа ұғымдарды енгізуіміз қажет.

Анықтама. $u(M)$ функция тұрақты санды қабылдайтын бет скалярлық өрістің беттік деңгейі деп аталады.

$u(M)$ функцияға әртүрлі тұрақты C сандарын қабылдатып, қарастырып отырған скалярлық өрістің беттік деңгейлерінің үйірін аламыз. Беттік деңгей

$$u(x,y,z) = C \tag{13.1}$$

теңдеуімен анықталады, мұндағы $C - const$. Әртүрлі тұрақты C санына сәйкес келетін беттік деңгейлер бүкіл Φ облыстағы скалярлық өрісті толтырады және кез келген екі беттік деңгейлердің ортақ нүктелері жоқ. Барлық беттік деңгейлер Φ облыстағы скалярлық өрісті анықтайды.

Берілген Ф облыстағы скалярлық өрістің сызықты деңгейлері де беттік деңгейлер тәрізді анықталады. Егер скалярлық өріс кеңістікте емес, жазықтықта берілсе, онда осы өрісте сызықты деңгей берілді дейміз, демек скалярлық өрістің сызықты деңгейі екі айнымалы функция арқылы анықталады:

$$u(x, y) = C. \tag{13.2}$$

Бұл теңдеу жазықтықтағы түзу немесе қисық сызықтар. Типографиялық картада теңіздің немесе көлдің және таудың жер беті деңгейінен қаншалықты тереңдікте және биіктікте орналасқаны сызықты деңгейлер арқылы белгіленеді.

Осы бөлімнің *8.13-тақырыбында* $f(x, y, z)$ функцияның бірлік $\bar{l} = \{\cos\alpha;\ \cos\beta; \cos\gamma\}$ вектор бағыты бойынша алынған туындыны қарастырғанбыз. Осы сияқты $u(M)$ скалярлық өрістің l бағыт бойынша алынған туындысын $\dfrac{\partial u(M)}{\partial l}$ таңбамен белгілейік.

Онда $\dfrac{\partial u(M)}{\partial l}$ таңба $u(M)$ шаманың l бағыт бойындағы жылдамдығының өзгеруін сипаттайды. Онда (8.33) формула бойынша, $u(M)$ скалярлық өрістен $M(x, y, z) = M$ нүктеде l бағыт бойынша алынған туындысы деп мына өрнекті айтамыз:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u(M)}{\partial l} = \frac{\partial u(M)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u(M)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u(M)}{\partial z}\cos\gamma, \tag{13.3}$$

мұндағы $\bar{l} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$ векторы l бағыт бойындағы бірлік вектор, α, β, γ бұрыштар l бағыттың сәйкес OX, OY, OZ осьтерімен түзейтін бұрыштары.

Анықтама. Дифференциалданатын $u(M)$ скалярлық өрістің градиенті деп мына вектор-функцияны айтамыз:

$$\begin{aligned} grad\, u(M) = grad\, u &= \left\{\frac{\partial u(M)}{\partial x}; \frac{\partial u(M)}{\partial y}; \frac{\partial u(M)}{\partial z}\right\} = \\ &= \frac{\partial u(M)}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u(M)}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u(M)}{\partial z}\bar{k}, \end{aligned} \tag{13.4}$$

мұндағы $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – координат осьтеріндегі бірлік векторлар.

Осы анықтамадан және (13.3) теңдіктен, скалярлық өрістен l бағыт бойынша алынған туындыны $grad\, u(M)$ мен $\bar{l}$ векторлардың скаляр көбейтіндісі ретінде қарастыруға болады:

$$\frac{\partial u(M)}{\partial l} = \left(grad\, u;\, \bar{l}\right). \qquad (13.5)$$

Осы теңдіктен

$$\frac{\partial u(M)}{\partial l} = |\, grad\, u\, | \cdot |\, \bar{l}\, | \cdot \cos\varphi = |\, grad\, u\, | \cdot \cos\varphi,$$

мұндағы φ – берілген M нүктедегі $grad\, u$ мен $\bar{l}$ векторларының арасындағы бұрыш, $\frac{\partial u}{\partial l}$ саны ең үлкен мәнді қабылдайды, егер $\varphi = 0$ болса, ал $|\, grad\, u\, |$ модулі l бағыттағы $u(M)$ функцияның жылдамдығының өсуін анықтайды.

Сонымен, $grad\, u(M)$ векторы жүйеге тәуелді емес, ал оның модулі мен оның бағыты әрбір нүктеде $u(M)$ функцияның өзі арқылы анықталады.

Берілген Ф облыста дифференциалданатын $u(M)$, $v(M)$ скалярлық өрістің градиентіне мына қасиеттер орындалады:

1. $grad(u(M) \pm v(M)) = grad\, u(M) \pm grad\, v(M);$
2. $grad(u(M) \cdot v(M)) = v(M)\, grad\, u(M) + u(M)\, grad\, v(M);$
3. $grad\left(\frac{u(M)}{v(M)}\right) = \frac{v(M)\, grad\, u(M) - u(M)\, grad\, v(M)}{v^2(M)}, v(M) \neq 0;$
4. $grad(c_1 u(M) \pm c_2 v(M)) = c_1\, grad\, u(M) \pm c_2\, grad\, v(M),\ c_1, c_2 - const;$
5. $grad\, F(u(M)) = F'(u) \cdot grad\, u(M),$

мұндағы $F(u(M))$ – дифференциалданатын скалярлық өріс.

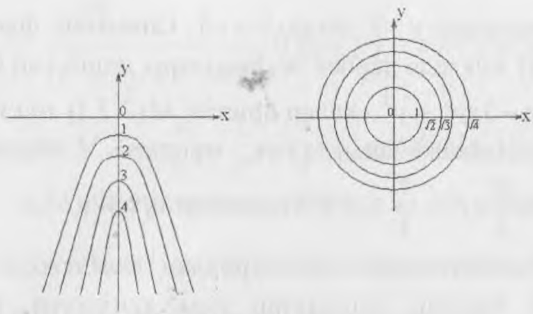
Егер кез келген бағыт бойынша алынған туынды нөлге тең болса, онда скалярлық өріс стационарлық өріс деп аталады. Демек, M нүктеде кез келген бағыт бойынша алынған туынды нөлге тең болу үшін (13.3) формуладағы дербес туындылар M нүктеде нөлге тең болуы қажетті әрі жеткілікті, яғни

$$\frac{\partial u(M)}{\partial x} = \frac{\partial u(M)}{\partial y} = \frac{\partial u(M)}{\partial z} = 0.$$

Мысалдар. 1. $u(x, y) = x^2 + y$, $u(x, y) = x^2 + y^2$ скалярлық өрістердің $u = 1, 2, 3, 4$ мәндеріндегі сызықты деңгейлердің графигін тұрғызайық (*13.1-сурет*).

Шешуі. u-дің мәндерін скалярлық өріске қойып сызықты деңгейлердің сәйкес теңдеулерін табамыз:

$$y = 1 - x^2,\ y = 2 - x^2,\ y = 3 - x^2,\ y = 4 - x^2;$$
$$x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = (\sqrt{2})^2,\ x^2 + y^2 = (\sqrt{3})^2,\ x^2 + y^2 = 2^2.$$



13.1-сурет

2. $u=\sqrt{xyz}$ скалярлық өрістің $M(4,3,2)$ нүктедегі а) градиентін; ә) $\bar{a}= =\{2;2;3\}$ вектор бағытындағы туындысын табайық.

Шешуі. а) Градиенттің анықтамасы бойынша

$$grad\, u(M)=\left\{\frac{\partial u(M)}{\partial x};\ \frac{\partial u(M)}{\partial y};\ \frac{\partial u(M)}{\partial z}\right\}=$$

$$=\left\{\frac{\sqrt{yz}}{2\sqrt{x}};\frac{\sqrt{xz}}{2\sqrt{y}};\frac{\sqrt{xy}}{2\sqrt{z}}\right\}_M=\left\{\frac{\sqrt{6}}{4};\sqrt{\frac{2}{3}};\sqrt{\frac{3}{2}}\right\}.$$

ә) Берілген $\bar{a}=\{2;2;3\}$ векторының бірлік векторы $\bar{l}=\frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}=\frac{1}{\sqrt{17}}\{2;2;3\}$ болады. Енді (13.5) формуланы пайдаланайық, сонда

$$\frac{\partial u(M)}{\partial l}=\frac{\sqrt{6}}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{17}}+\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{2}{\sqrt{17}}+\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{3}{\sqrt{17}}=\frac{1}{\sqrt{17}}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}+2\sqrt{\frac{2}{3}}+3\sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

3. Мына функцияның қандай нүктелерде дербес туындылары нөлге тең болады:

$$u=e^x(x-y^2+2y+3)?$$

Шешуі. Берілген функцияның дербес туындыларын табайық:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x(x-y^2+2y+3)+e^x,\ \frac{\partial u}{\partial y}=e^x(-2y+2).$$

Осыдан, $\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ \frac{\partial u}{\partial y}=0$. Сонда

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x(x-y^2+2y+4)=0,\ \frac{\partial u}{\partial y}=e^x(-2y+2)=0.$$

Екінші теңдеуден $y=1$, онда $x=-5$. Сонымен, функция тек бір ғана $A_0(-5,1)$ нүктеде дербес туындылары нөлге тең болады.

4. $u=xyz-3xy^2+y^3$ скаляр өрістің $M(2,3,1)$ нүктедегі l бағыт бойынша туындысын анықтайық, мұндағы l бағыт координат өстерімен $\alpha=\frac{\pi}{4}$, $\beta=\frac{\pi}{3}$ сүйір бұрыштар түзейді.

Шешуі. Аналитикалық геометриядан $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ теңдігі бізге белгілі, сондықтан осы теңдіктен γ бұрыштың косинусын табайық: $\cos^2\frac{\pi}{4}+\ +\cos^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\gamma=1$. Сонда, γ сүйір бұрыш болғандықтан $\cos\gamma=\pm\frac{1}{2}$. Енді (13.3) формуланы пайдалану үшін дербес туындылардың $M(2,3,1)$ нүктедегі мәндерін есептейік:

$$\frac{\partial u(M)}{\partial x}=\left(yz-3y^2\right)_M=-24,\ \frac{\partial u(M)}{\partial y}=\left(xz-6xy+3y^2\right)_M=$$

$$=-7,\qquad \frac{\partial u(M)}{\partial z}=(xy)_M=6.$$

Сонда, $\frac{\partial u(M)}{\partial l}=-24\cos\frac{\pi}{4}-7\cos\frac{\pi}{3}+6\cdot\frac{1}{2}=-12\sqrt{2}-\frac{1}{2}$.

5. $u(M)=\frac{8}{x^2+xy+z^2+2}$ скалярлық өріс $M(x,y,z)$ нүктеден $M_0(1,2,1)$ нүкте арқылы өткенде қандай ең үлкен жылдамдықпен өсетінін және $u(M)$ скалярлық өріс ең үлкен жылдамдықпен кему үшін M нүкте M_1 нүктеден өткенде M нүкте қай бағытта қозғалады?

Шешуі. $u(M)$ функцияның ең үлкен жылдамдықпен өсуі мен кемуі M нүкте M_0 нүкте арқылы өткендегі бағыты M_0 нүктедегі градиент функцияның бағытымен бағыттас немесе қарама-қарсы болуына байланысты. Сондықтан, $u(M)$ функцияның кез келген нүктедегі градиентін табайық (13.4) формуладан:

$$grad\,u=-\frac{16x+8y}{\left(x^2+xy+z^2+2\right)^2}\bar{i}-$$

$$-\frac{8x}{\left(x^2+xy+z^2+2\right)^2}\bar{j}-\frac{16z}{\left(x^2+xy+z^2+2\right)^2}\bar{k}=$$

$$= -\frac{8}{\left(x^2+xy+z^2+2\right)^2}\left((2x+y)\bar{i}+x\bar{j}+2z\bar{k}\right).$$

Осыдан, $grad\,u(M_0) = -\frac{8}{9}\bar{i} - \frac{2}{9}\bar{j} - \frac{4}{9}\bar{k}$, $|\,grad\,u(M_0)| = \frac{2\sqrt{21}}{9}$.

Сонымен, $u(M)$ функциянын $M(x,y,z)$ нүктеден $M(1,\ 2,1)$ нүкте арқылы өткендегі ең үлкен жылдамдықпен өсуі $\frac{2\sqrt{21}}{9}$-ге тең. Ал $M_1(2,1,1)$ нүктедегі функцияның градиенті

$$grad\,u(M_1) = -\frac{8}{81}\left((2x+y)\bar{i}+x\bar{j}+2z\bar{k}\right)_{M_1} = -\frac{40}{81}\bar{i} - \frac{16}{81}\bar{j} - \frac{16}{81}\bar{k}.$$

Сонда, іздестіріп отырған вектордың бағыты $grad\,(M_1)$ векторының бағытына қарама-қарсы болады, яғни $grad\,u(M_1) = \frac{40}{81}\bar{i} + \frac{16}{81}\bar{j} + \frac{16}{81}\bar{k}$.

Сонымен, $u(M)$ скалярлық өріс M_1 нүктеден өтіп ең үлкен жылдамдықпен кему үшін M нүкте $grad\,u(M_1)$ вектордың бағытымен қозғалуы керек.

6. xyz координат жүйенің қай нүктелерінде $u(M) = x^3+y^3+z^3-3xyz$ өрістің градиенті а) Ox осіне перпендикуляр; ә) Oz осіне параллель болады; б) нөлге тең болады.

Шешуі. Алдымен, скалярлық өрістің градиентін табайық, ол үшін скалярлық өрістен дербес туындыларды табайық:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2-3yz\,,\ \ \frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2-3xz\,,\ \ \frac{\partial u}{\partial z} = \ = \frac{\partial u}{\partial z} = 3x^2-3yx\,.$$

Скаляр өрістің градиентін (13.4) формула бойынша табайық:

$$grad\,u(M) = (3x^2-3yz)\bar{i} + (3y^2-3xz)\bar{j} + (3z^2-3xy)\bar{k}.$$

а) Скаляр өрістің градиенті Oz осіне перпендикуляр болу үшін аналитикалық геометрия курсынан ([15]) $3x^2-3zy=0$ болуы керек. Осыдан $x^2 = zy$. Сонымен, $x^2 = zy$ бетке тиісті барлық нүктелерде $grad\,u(M)$-градиент-вектор Ox осіне перпендикуляр болады.

ә) $grad\,u(M)$-градиент-векторы $\bar{k}$ векторына коллинеар болады, сондықтан $3x^2-3yz=0,\ 3y^2-3xz=0$. Осы теңдіктерден z айнымалыны шығарайық: $z=\frac{x^2}{y},\ z=\frac{y^2}{x},\ \frac{x^2}{y}=\frac{y^2}{x},\ x^3-y^3=0,$

$(x-y)(x^2+xy+y^2)=0$. Осыдан, $x=y$ және $x^2+xy+y^2=0$. Екінші теңдік $x=0$, $y=0$ болғанда ғана орындалады. Енді $x=y$ теңдікті алғашқы теңдіктерге қойып, $x=y=z$ теңдіктерді аламыз. Демек, $u(M)=x^3+y^3+z^3-3xyz$ өріс $x=0$, $y=0$ мен $x=y=z$ нүктелерде Oz осіне параллель болады.

б) Енді $grad\,u(M)$-градиент-векторы нөлге тең болу үшін мына теңдіктер орындалуы керек: $3x^2-3yz=0$, $3y^2-3xz=0$, $3z^2-3xy=0$ теңдіктері орындалуы керек. Онда ә) жағдайды қайталап, $x=y=z$ нүктелерде $grad\,u(M)$ нөлге тең болатынын табамыз.

7. $A(1,2,2)$ және $B(-3,1,0)$ нүктелеріндегі $u(M)=\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$ скалярлық өріс градиентінің арасындағы бұрыштың косинусын есептейік.

Шешуі. A мен B нүктелеріндегі градиенттердің арасындағы косинусын төмендегі формуладан есептейміз:

$$\cos\varphi=\frac{(grad\,u(A);\,grad\,u(B))}{|\,grad\,u(A)\,|\cdot|\,grad\,u(B)\,|}.$$

Берілген скаляр өрістің A мен B нүктелеріндегі градиенттерін есептейік:

$$grad\,u(A)=\left(\frac{x^2+y^2+z^2-2x^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}\right)_A\bar{i}-$$

$$-\left(\frac{2yx}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}\right)_A\bar{j}-\left(\frac{2xz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}\right)_A\bar{k}=\frac{7}{81}\bar{i}-\frac{4}{81}\bar{j}-\frac{4}{81}\bar{k},$$

$$grad\,u(B)=\left(\frac{x^2+y^2+z^2-2x^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}\right)_B\bar{i}-$$

$$-\left(\frac{2yz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}\right)_B\bar{j}-\left(\frac{2xz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}\right)_B\bar{k}=-\frac{2}{25}\bar{i}+\frac{3}{50}\bar{j}.$$

Сонда $$cos\,\varphi=\frac{-\frac{7}{81}\cdot\frac{2}{25}-\frac{4}{81}\cdot\frac{3}{50}}{\sqrt{\left(\frac{7}{81}\right)^2+\left(\frac{4}{81}\right)^2+\left(\frac{4}{81}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{-2}{25}\right)^2+\left(\frac{3}{50}\right)^2}}=-\frac{8}{9}.$$

Тапсырмалар

1. $u(x,y)=x+y^2$, $u(x,y)=x^2+y^2$ скалярлық өрістердің $u=1,2,3,4$ мәндеріндегі сызықты деңгейлердің сызбасын тұрғызыңдар.

2. $u=\sqrt{xy+z^2}$ скалярлық өрістің $M(2,1,-3)$ нүктедегі а) градиентін; б) $\overline{a}=\{1;-2;2\}$ вектор бағытындағы туындысын табайық.

3. xyz координат жүйенің қай нүктелерінде $u(M)=x^2+y^2+z^2-3xy$ скаляр өрістің градиенті а) Oz осіне перпендикуляр; б) Oz осіне параллель; в) нөлге тең болады

13.2. Векторлық өрістер

Анықтама. Берілген Ф облыста векторлық өріс берілді дейміз, егер облыстың әрбір $M=M(x,y,z)\,(M\in D)$ нүктесіне $\overline{a}(M)$ векторы сәйкес қойылса.

Электр зарядтар жүйесіндегі электрлік өріс, электр тогының әсерінен пайда болатын магнит өрісі, жүйелер массасы әсерінен анықталған тартылыс күш өрісі (гравитациялық өріс), сұйық заттың ағын жылдамдығының әсерінен пайда болатын өріс (жылдамдық өріс) векторлық өріске мысал бола алады.

Анықтамадағы $\overline{a}(M)$ векторының геометриялық сипаттамасы векторлық сызықтар, яғни қисық сызықтар болады және векторлық өріс координат жүйеге тәуелді емес, яғни әрбір M нүктеде $\overline{a}(M)$ векторлық өріс өзінің $|\overline{a}(M)|$ модулі, бағыты арқылы анықталады. Кеңістіктегі XYZ координат жүйеде $\overline{a}(M)$ векторлық өріс $\overline{a}(x,\ y,z)$ үш айнымалы векторлық функция арқылы анықталады:

$$\overline{a}(x,\ y,z)=\{P(x,y,z);Q(x,y,z);\ R(x,y,z)\},$$

мұндағы $P=P(x,y,z), Q=Q(x,y,z), R=R(x,y,z)$ функциялары және оның бірінші ретті дербес туындылары үзіліссіз.

Осы бөлімнің *8.13-тақырыбында* қарастырылғандай, $\overline{a}(M)$ векторлық өрістің l бағыт бойынша алынған M нүктедегі туындысы деп $\dfrac{\partial\overline{a}(M)}{\partial l}= \quad =\left\{\dfrac{\partial P}{\partial x};\dfrac{\partial Q}{\partial y};\dfrac{\partial R}{\partial z}\right\}$ вектор-функцияны айтамыз.

Енді $u(M)$ скаляр өрісті қарастырайық. Әрбір M нүктеде $grad\,u(M)$ векторды тұрғызып, $u(M)$ скаляр шаманың векторлық өрісін аламыз.

Анықтама. $\bar{a}(M)$ векторлық өріс Ф облыста потенциалды деп аталады, егер оны осы облыста $u(M)$ скалярлық өрістің градиенті ретінде бейнелей алсақ, яғни

$$\bar{a}(M) = grad\,u(M). \tag{13.6}$$

Бұл жағдайда $u(M)$ скалярлық өрістің өзі $\bar{a}(M)$ векторлық өрістің скалярлық потенциалы деп аталады. Егер $\bar{a} = \{P;Q;R\}$ векторлық өріс болса, онда (13.6) формуладағы векторлардың теңдігін пайдаланып, мына теңдікті аламыз:

$$P = \frac{\partial u}{\partial x},\ Q = \frac{\partial u}{\partial y},\ R = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Кейбір жағдайларда, $\bar{a}(M)$ векторлық өрістің потенциалы ретінде $\bar{a}(M) = -grad\,u(M)$ теңдігі орындалатын $u(M)$ функцияны қарастырамыз.

13.1-теорема. Бір байланысты Ф облыстағы $\bar{a}(M) = \{P;Q;R\}$ векторлық өріс потенциалды болу үшін

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \tag{13.7}$$

теңдіктерінің орындалуы қажетті әрі жеткілікті, мұндағы P, Q, R функциялары және олардың бірінші ретті дербес туындылары үзіліссіз.

Бұл теңдіктерді біз *12.6-теоремада* дәлелдегенбіз.

Егер $\bar{a}(M)$ векторлық өріс потенциалды болса, онда оның потенциалын табу

$$du = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

толық дифференциалының u функциясын, (12.48) формула бойынша табу болып табылады.

Сұрақтар

1. Скаляр өріс.
2. Скалярлық өрістен нүктеде бағыт бойынша алынған туындысы.
3. Скалярлық өрістің градиенті.
4. Скалярлық өрістің қасиеттері.

5. Стационарлық және потенциалды өрістер.
6. Векторлық өрістің потенциалды болу белгісі.

13.3. Векторлық өрістің дивергенциясы, роторы және циркуляциясы

Біз осы бөлімнің *12.5-тақырыбында* сұйық заттың Ф беттен (облыстан) $\bar{n}(M)$ нормаль вектор бағытымен ағып шығатын мөлшерін

$$\Pi = \iint_{\Phi}[P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]ds \quad (13.8)$$

формуламен есептедік, интеграл астындағы функция $\bar{a}(M)$ векторлық өрістің координаттары:

$$\bar{a}(M) = P(x,y,z)\cos\alpha + + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma,$$

ал $\cos\alpha(M), \cos\beta(M), \cos\gamma(M)$ бағыттауыш косинустар Ф бетке жүргізілген $\bar{n}(M)$ нормаль вектордың бойындағы бірлік вектордың координаттары. Онда (13.8) теңдіктегі интеграл астындағы функцияны $\bar{a}(M)$ мен $\bar{n}(M)$ векторларының скаляр көбейтіндісі ретінде қарастыруға болады:

$$(\bar{a}(M);\bar{n}(M)) = P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma.$$

Сонда

$$\Pi = \iint_{\Phi}(\bar{a}(M);\bar{n}(M))ds = \iint_{\Phi}P(x,y,z)dydz +$$
$$Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy \quad (13.9)$$

интеграл Ф беттен таңдап алған бет бойындағы $\bar{a}(M)$ векторлық өрістің ағыны (тасқыны) деп аталады. Егер $\bar{a}(M)$ векторлық өріс M нүктеден ағатын сұйық заттың жылдамдығы болса, онда Ф беттен таңдап алған (болжанған) бет бойындағы сұйық заттың ағыны

$$\Pi = \iint_{\Phi}(\bar{v}(M);\bar{n}(M))ds$$

формуламен есептелінеді.

Векторлық өрістің ағынын үш еселі интегралмен де есептеуге болады (13.11).

Егер $\Pi > 0$ болса, онда Φ беттен ағып шығатын сұйық зат мөлшері осы бетке ағып келетін сұйық заттың мөлшерінен көп болады, бұл жағдайда Φ бетте сұйық заттың қосымша көзі бар екендігін білдіреді.

Егер $\Pi < 0$ болса, онда Φ беттен ағып шығатын сұйық зат мөлшері осы бетке ағып келетін сұйық заттың мөлшерінен аз болады, бұл жағдайда Φ бетте сұйық затқа қату немесе буға айналу үдерістері жүреді.

Егер $\Pi = 0$ болса, онда Φ беттен ағып шығатын мен ағып келетін сұйық заттардың мөлшерлері тең болады.

Анықтама. $\bar{a}(M) = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}$ векторлық өрістің $M = M(x,y,z)$ нүктедегі дивергенциясы деп мына скаляр функцияны айтамыз:

$$div\,\bar{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \qquad (13.10)$$

Φ облыстағы $\bar{a}(M)$ векторлық өріс соленоидалды деп аталады, егер $div\,\bar{a}(M) = 0$ болса. Бұл жағдайда тұйық бет бойынша алынған векторлық өрістің ағыны нөлге тең, себебі Остроградский-Гаусс формуласы бойынша

$$\Pi = \iint_{\Phi} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy =$$

$$= \iiint_{\bar{V}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \iiint_{\bar{V}} div\,\bar{a}(M)dxdydz, \qquad (13.11)$$

мұндағы $\bar{V}$ цилиндрлік облыс.

Егер $div\,\bar{a}(M_0) > 0$ болса, онда $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктеде сұйық заттың көзі бар, яғни M_0 нүктенің кез келген маңайында сұйық заттың мөлшері ұлғаяды.

Егер $div\,\bar{a}(M_0) < 0$ болса, онда $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктеде сұйық заттың көзі жоқ, яғни M_0 нүктенің кез келген маңайында сұйық заттың мөлшері азаяды.

Векторлық өрістің дивергенциясының модулі (абсолют шамасы) сұйық зат көзінің қуатын білдіреді.

Векторлық өрістің дивергенциясына мына қасиеттер орындалады:

$div\,\bar{a}(M) = 0$, егер $\bar{a}(M)$ – тұрақты векторлық өріс;

$$div\left(c_1\bar{a}_1(M) \pm c_2\bar{a}_2(M)\right) = c_1 div\,\bar{a}_1(M) \pm c_2 div\,\bar{a}_2(M),$$

мұндағы $c_1, c_2 - const;$

$u(M)$ скалярлық өріс пен $\bar{a}(M)$ векторлық өрістер көбейтіндісінің дивергенциясына мына теңдік орындалады:

$$div\left(u(M)\cdot \bar{a}(M)\right)=u(M)\,div\,\bar{a}(M)+\bar{a}(M)\,grad\,u(M).$$

Дәлелдеуі. 3-қасиетті дәлелдейік.

$$div\left(u(M)\cdot \bar{a}(M)\right)=div\left(u(M)(P\bar{i}+Q\bar{j}+R\bar{k})\right)=$$

$$=\frac{\partial(u(M)\cdot P)}{\partial x}+\frac{\partial(u(M)\cdot Q)}{\partial y}+\frac{\partial(u(M)\cdot R)}{\partial z}=$$

$$=P\cdot\frac{\partial u(M)}{\partial x}+Q\cdot\frac{\partial u(M)}{\partial y}+R\cdot\frac{\partial u(M)}{\partial z}+$$

$$+u(M)\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)=\bar{a}(M)\,grad\,u(M)+u(M)\,div\,\bar{a}(M).$$

Егер векторлық өріс $\bar{E}(M)$ электр зарядтарының өрісі болса, онда Ф облыстың кез келген $M(x,y,z)$ нүктесінде $div\,\bar{a}(M)=div\,\bar{E}(M)=0$ болады. Шынында да,

$$\bar{a}(M)=\bar{E}(M)=\frac{k\,e}{r^3}\bar{r}(M)=\frac{k\,e}{r^3}\left(x\,\bar{i}+y\,\bar{j}+z\,\bar{k}\right),$$

мұндағы

$$\bar{r}(M)=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k},\ |\bar{r}|=r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Сонда:

$$div\,\bar{E}(M)=k\,e\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right)\right]=$$

$$=k\,e\left[\frac{r^2-3x^2}{r^5}+\frac{r^2-3y^2}{r^5}+\frac{r^2-3z^2}{r^5}\right]=$$

$$=k\,e\frac{3r^2-3\left(x^2+y^2+z^2\right)}{r^5}=0.$$

Демек, қарастырып отырған векторлық өріс соленоидальды, ал $div\,\bar{a}(M)=0$ теңдіктің физикалық мағынасы Ф облыстың кез келген нүктесінде электр өрісінің көзі жоқ болатынын білдіреді (координат осьтерінің бас нүктесінен өзге нүктелерде).

Анықтама. $\bar{a}(M)=P(x,y,z)\bar{i}+Q(x,y,z)\bar{j}+R(x,y,z)\bar{k}$ векторлық өрістің роторы (немесе құйыны) деп мына вектор-функцияны айтамыз:

$$rot\,\bar{a}(M) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\bar{i} +$$

$$+\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\bar{k}. \qquad (13.12)$$

Векторлық өрістің роторына мына қасиеттер орындалады:

$rot\,\bar{a}(M) = 0$, егер $\bar{a}(M)$ тұрақты вектор болса;

$$rot\,[c_1 \bar{a}_1(M) \pm c_2 \bar{a}_2(M)] = c_1\, rot\,\bar{a}_1(M) \pm c_2\, rot\,\bar{a}_2(M),$$

мұндағы c_1, c_2 – *const;*

$u(M)$ скалярлық өріс пен $\bar{a}(M)$ векторлық өрістің көбейтіндісінің роторына мына теңдік орындалады:

$$rot\left(u(M)\cdot \bar{a}(M)\right) = u(M)\, rot\,\bar{a}(M) + \; grad\left(u(M)\cdot \bar{a}(M)\right).$$

Егер қатты дене Oz осінің бойымен ω бұрыштық жылдамдықпен айналса, онда векторлық өрістегі дене нүктесінің жылдамдығын

$$\bar{v}(M) = [\bar{\omega}, \bar{r}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega\, y\, \bar{i} + \omega\, x\, \bar{j}$$

түрінде жазуға болады, мұндағы $[\cdot,\cdot]$ – векторлық көбейтінді. Енді $\bar{v}(M)$ жылдамдықтың роторын табайық:

$$rot\,\bar{v}(M) = 0\cdot \bar{i} + 0\cdot \bar{j} + 2\omega\, \bar{k}.$$

Сонымен, $rot\,\bar{v}(M)$ векторы OZ осінің бағытымен бағытталған тұрақты вектор, ал оның модулі дененің екі еселенген бұрыштық жылдамдығына тең, яғни $|\, rot\,\bar{v}(M)\,| = 2\omega$.

Енді $\bar{r} = x\bar{i} + y\,\bar{j} + z\,\bar{k}$ потенциалды өрісті қарастырайық. Оның потенциалы $u(M) = \dfrac{r^2}{2} = \dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}$. Осы өрістің роторын есептейік:

$$rot\,\bar{a}(M) = rot\,\bar{r}(M) = 0\cdot \bar{i} + 0\cdot \bar{j} + 0\cdot \bar{k} = 0.$$

Сонымен, потенциалды өрістің роторы нөлге тең, демек потенциалды өрісте құйын жоқ.

Енді $\overline{a}(M)=\{P(x,y,z);Q(x,y,z);R(x,y,z)\}$ векторлық өріс, L тегіс немесе бөлікті тегіс қисық сызық болсын. Онда:

$$Ц=\int_L\left(\overline{a}(M),\overline{e}\right)dl=\int_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

қисық сызықты интеграл $\overline{a}(M)$ векторлық өрістің L контур бойымен алынған циркуляциясы деп аталады, мұндағы $e=\overline{e}(M)$ қисық сызық бойындағы M нүктеге жүргізілген жанама вектордың бірлік векторы, dl – қисық сызықтың дифференциалы.

Егер векторлық өріс соленоидальды әрі потенциалды болса, онда мұндай векторлық өрісті гармоникалық өріс дейміз.

Егер L қисық сызық параметр теңдеулерімен берілсе:

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)$$

және t параметрге интегралдау бағытының алғашқы (бастапқы) және соңғы нүктелеріне $t=\alpha$ және $t=\beta$ мәндері сәйкес келсе, онда векторлық өрістің циркуляциясын мына формуладан есептейміз:

$$Ц=\int_\alpha^\beta[P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+$$

$$+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]dt.$$

Егер L қисық сызық $y=y(x),\ z=z(x),\ x\in[a;b]$ теңдеулерімен берілсе, онда:

$$Ц=\int_a^b[P(x,y(x),z(x))+Q(x,y(x),z(x))y'(x)+$$

$$+R(x,y(x),z(x))z'(x)]dx\,.$$

Векторлық өрістің ағынын дөңгелек цилиндрдің немесе сфераның беті бойынша есептеу үшін цилиндрлік немесе сфералық координат жүйеге көшіп есептеуге болады (денені координат жазықтығына проекцияламай).

Біз $x^2+y^2=R^2$ цилиндрлік бет пен $z=f_1(x,y)$, $z=f_2(x,y)$ беттермен шектелген Ф бетті қарастырайық. Енді цилиндрлік координат жүйесіне көшейік, яғни $x=R\cos\varphi$, $y=R\sin\varphi, z=z$, онда берілген беттер үшін $\left(f_1(x,y)\le f_2(x,y)\right)$:

$$0\le\varphi\le2\pi,\ f_1(R\cos\varphi,R\sin\varphi)\le z\le$$
$$\le f_2(R\cos\varphi,R\sin\varphi),\ ds=Rd\varphi dz$$

болады. Сондықтан Ф беттің сыртқы жағы бойымен алынған $\overline{a}(M)$ векторлық өрістің ағынын мына формуламен есептейміз:

$$\Pi = R\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{f_1(R\cos\varphi,\, R\sin\varphi)}^{f_2(R\cos\varphi,\, R\sin\varphi)} \left(\overline{a}(M), \overline{n}(M)\right) dz,$$

мұндағы

$$\overline{n}(M) = \frac{grad(x^2+y^2-R^2)}{|\, grad(x^2+y^2-R^2)\,|} = \frac{1}{R}\left(x\cdot\overline{i} + y\cdot\overline{j}\right).$$

Егер $x^2+y^2+z^2=R^2$ сфера мен сфералық координат жүйеде $\theta_1 = F_1(\varphi)$, $\theta_2 = F_2(\varphi)$ теңдеулері беттермен шектелген Ф бетті қарастырайық. Сфералық координат жүйеге көшейік, яғни

$$x = R\cos\varphi\sin\theta,\ y = R\sin\varphi\sin\theta,\ z = R\cos\theta,$$

мұндағы

$$\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2,\ \theta_1 \le \theta \le \theta_2,\ ds = R^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Сонда Ф беттің сыртқы беті бойынша $\overline{a}(M)$ векторлық өрістің ағынын мына формуладан есептейміз:

$$\Pi = R^2\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\overline{a}(M), \overline{n}(M)\right)\sin\theta\, d\theta,$$

мұндағы $\overline{n}(M) = \frac{1}{R}\left(x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}\right)$ (егер толық сфера болса, онда

$$0 \le \varphi \le 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}).$$

Мысалдар. 1. $\overline{a}(M) = x^3\overline{i} + y^3\overline{j} + z^3\overline{k}$-векторлық өрістің $x^2+y^2+z^2 \le x$ сферадағы ағынын есептейік.

Шешуі. Векторлық өрістің ағынын үш еселі интеграл көмегімен есептейік, яғни (13.11) формула:

$$\Pi = \iiint_{\overline{V}} div\,\overline{a}(M)\, dxdydz,$$

мұндағы $\overline{V}$ тұйық шар: $x^2+y^2+z^2 \le x$. Сонда:

$$div\,\overline{a}(M) = 3x^2+3y^2+3z^2,\quad \Pi = 3\iiint_{\overline{V}}\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$$

Соңғы интегралды есептеу үшін сфералық координат жүйеге көшейік:

$$x^2+y^2+z^2 = \rho^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + \rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta +$$
$$+\rho^2\cos^2\theta = \rho^2\sin^2\theta\left(\cos^2\varphi + \sin^2\theta\right) + \rho^2\cos^2\theta =$$

$$=\rho^2 \sin^2\theta+\rho^2\cos^2\theta=\rho^2,\ \rho^2\le\rho\cos\varphi\sin\theta,\ \rho\le\cos\varphi\sin\theta.$$

Сонда:

$$\Pi=3\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\cos\varphi\sin\theta}\rho^4d\rho=\frac{3}{5}\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi\sin^5\theta\,d\varphi=$$

$$=\frac{3}{5}\int_0^{\pi}\sin^6\theta d\theta\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi\,d\varphi=\frac{12}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\theta\,d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi\,d\varphi=\frac{\pi}{5}.$$

2. $M_1(-2,3,-3)$, $M_2(1,3,-2)$ нүктелерде $\bar{a}(M)=x^2y\bar{i}+y^2x\bar{j}+z^2y\bar{k}$ векторлық өрістің дивергенцияларын есептейік.

Шешуі. Дивергенцияларды (13.10) формуламен есептейік:

$$div\,\bar{a}(M)=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2y\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2x\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(z^2y\right)=2xy+$$

$$+2yx+2zy=4xy+2zy.$$

Сонда:

$$div\,\bar{a}(M_1)=4\cdot(-2)\cdot3+2\cdot(-3)\cdot3=-42<0.$$

Демек, M_1 нүктеде сұйық заттың көзі жоқ. Енді M_2 нүктедегі дивергенцияны есептейік:

$$div\,\bar{a}(M_2)=4\cdot1\cdot3+2\cdot(-2)\cdot3=0.$$

Демек, M_2 нүктеде сұйық заттың көзі бірқалыпты.

3. $M_1(1,1,1)$ мен $M_2(2,4,8)$ нүктелер арасындағы кесінді бойында

$$\bar{a}(M)=\frac{1}{y}\bar{i}+\frac{1}{z}\bar{j}+\frac{1}{x}\bar{k}$$

векторлық өрістің жұмысын есептейік.

Шешуі. $\overline{M_1M_2}$ вектордың бірлік векторын табайық:

$$\bar{e}=\frac{\overline{M_1M_2}}{|\overline{M_1M_2}|}=\frac{1}{\sqrt{59}}\{2-1;\ 4-1;\ 8-1\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{59}};\ \frac{3}{\sqrt{59}};\ \frac{7}{\sqrt{59}}\right\}.$$

Енді берілген M_1 мен M_2 нүктелерден өтетін түзудің канонды теңдеуін анықтайық:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{7}.$$

Осы теңдіктегі x параметр болсын, онда:

$$x-1=\frac{y-1}{3},\ y=3x-2,\ dy=3dx, x-1=\frac{z-1}{7},$$

$$z=7x-6,\ dz=7dx.$$

Сонда:

$$dl=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}=$$

$$\sqrt{(dx)^2+9(dx)^2+49(dx)^2}=\sqrt{59}dx.$$

Енді векторлық өрістің M_1 нүктеден M_2 нүктеге дейінгі жұмысын есептейік:

$$A=\int_{M_1M_2}\left(\bar{a}(M),\bar{e}\right)dl=\int_1^2\left(\frac{1}{3x-2}+\frac{3}{7x-6}+\frac{7}{x}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{1}{3}\ln(3x-2)+\frac{1}{7}\ln(7x-6)+7\ln x\right)\Bigg|_1^2=\frac{188}{21}\ln 2.$$

4. $\bar{a}(M)=-y\bar{i}+x\bar{j}+c\bar{k}$ векторлық өрістің

а) $x^2+y^2=1,\ z=0;$

ә) $(x-2)^2+y^2=1,\ z=0$ шеңберлер бойындағы сәйкес циркуляцияларын есептейік, мұндағы $c-const$.

Шешуі. Тұйық L контур бойындағы векторлық өрістің циркуляциясы мына формуламен есептеледі:

$$Ц=\oint_L\left(\bar{a}(M),\bar{e}\right)dl,$$

мұндағы $\bar{e}=\bar{e}(M)$ – бірлік вектор.

а) $x^2+y^2=1, z=0$ теңдеулердің орнына оның параметр теңдеулерін алайық:

$$x=\cos\varphi,\ y=\sin\varphi,\ z=0,\ \varphi\in[0;2\pi].$$

Сонда:

$$Ц=\int_L\left(\bar{a}(M),\bar{e}\right)dl=\int_0^{2\pi}d\varphi=2\pi.$$

ә) Берілген теңдеулердің орнына $x=2+\cos\varphi,\ y=\sin\varphi,\ z=0$ параметр теңдеулерін қарастырайық және

$$\bar{e}=\{-\sin\varphi;\ \cos\varphi;\ 0\},\ \bar{a}(M)=-\sin\varphi\bar{i}+(2+\cos\varphi)\bar{j}+$$

$$+c\bar{k},\ dl=d\varphi.$$

Сонда:

$$Ц = \int_0^{2\pi}(1+2\cos\varphi)d\varphi = (\varphi + 2\sin\varphi)\Big|_0^{2\pi} = 2\pi.$$

5. $\bar{a} = x^2\bar{i} + y^2\bar{j} + z^2\bar{k} = \{x^2; y^2; z^2\}$ векторының $(x-a)^2+(y-b)^2+$ $+(z-c)^2 = R^2$ сфераның сыртқы беті бойынша тасқынын есептейік.

Шешуі. Есептің шарты бойынша

$$P(x,y,z) = x^2,\ Q(x,y,z) = y^2,\ R(x,y,z) = z^2$$

және (12.16) формуладан:

$$П = \iint_Ф\left(x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma\right)ds.$$

Сфераның сыртқы бетінің нормаль векторын табайық (12.4-тақырып): $\bar{n} = = \{2(x-a); 2(y-b); 2(z-c)\}$, ал оның бойындағы

$$\bar{n}^0 = = \left\{\frac{x-a}{R}; \frac{y-b}{R}; \frac{z-c}{R}\right\}$$

бірлік вектор сфераның сыртқы бетін анықтайды. Онда:

$$П = \iint_Ф\left(x^2\frac{x-a}{R} + y^2\frac{y-b}{R} + z^2\frac{z-c}{R}\right)ds.$$

Бұл интегралды *5.3-теореманы* пайдаланып есептейік. Ол үшін сфераның параметр теңдеуін қарастырайық (*12.1-тақырып*):

$$x = a + R\cos v\sin u,\ y = b + R\sin v\sin u,\ z = c + R\cos u,$$
$$0 \le u \le \pi,\ 0 \le v \le \pi.$$

Сонда

$$\sqrt{EG-F^2} = R^2\sin u,$$

$$E = R^2\cos^2 v\sin^2 u + R^2\sin^2 v\cos^2 u + R^2\sin^2 u,$$

$$G = R^2\sin^2 v\sin^2 u + R^2\cos^2 v\sin^2 u,$$

$$F = R^2\cos v\sin v\sin^2 u + R^2\sin v\cos v\cos u\sin u,$$

$$П = \int_0^{2\pi}dv\int_0^{\pi}R^2\sin u[(a+R\cos v\sin u)^2\cos v\sin u +$$
$$+(b+R\sin v\sin u)^2\sin v\sin u +$$
$$+(c+R\cos u)^2\cos u]du = 2aR^3\int_0^{2\pi}\cos^2 v dv\int_0^{\pi}\sin^3 u du +$$

$$+2bR^3\int_0^{2\pi}\sin^2 v dv\int_0^{\pi}\sin^3 u du+$$

$$+2cR^3\int_0^{2\pi}dv\int_0^{\pi}\cos^2 u\sin u du=\frac{8\pi R^3}{3}(a+b+c).$$

Сұрақтар мен тапсырмалар

1. Векторлық өрістің ағыны (тасқыны).
2. Векторлық өрістің нүктедегі дивергенциясы.
3. Векторлық өрістің дивергенциясына орындалатын қасиеттер.
4. Векторлық өрістің роторы (немесе құйыны).
5. Векторлық өрістің роторына орындалатын қасиеттер.
6. Векторлық өрістің контур бойымен алынған циркуляциясы.
7. Гармоникалық өріс.
8. $\bar{a}(M)$ векторлық өрістің $x^2+y^2+z^2=y$ сферадағы ағынын есепте.
9. $M_1(-1,3,-4)$, $M_2(2,1,-3)$ нүктелерде $\bar{a}(M)=xy\bar{i}+yx\bar{j}+zy\bar{k}$ векторлық өрістің дивергенцияларын есепте.
10. $\bar{a}(M)=-y\bar{i}+x\bar{j}+c\bar{k}$ векторлық өрістің а) $x^2+y^2=4$, $z=0$; ә) $(x-1)^2+y^2=16$, $z=0$ шеңберлер бойындағы сәйкес циркуляцияларын есепте, мұндағы $c-const$.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТ

1. Қасымов Қ.Ә., Қасымов Е.Ә. Жоғары математика курсы. Математикалық анализ. 3-том, 1-бөлім. – Алматы: ҚазҰУ, Қазақ университеті. 2006.

2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1974.

3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. – Москва: Наука, 1985.

4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1980.

5. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. 2-том. – М.: Высшая школа, 1981.

6. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. Математический анализ в вопросах и задачах. – Москва: Высшая школа, 1984.

7. Карташев А.П., Рождественский Б.Л. Математический анализ. – Москва: Наука, 1984.

8. Темиргалиев Н. Математикалық анализ.1-3-том. – Алматы: Мектеп, 1987.

9. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – Москва: Наука, 1977.

10. Демидович Б.П. Сборник упражнений по математическому анализу. – Москва: Наука, 1990.

11. Қасымов Қ.Ә., Қасымов Е.Ә. Жоғары математика курсы. Аналитикалық геометрия. Алматы: Санат, 1994.

12. Қасымов Қ.Ә., Қасымов Е.Ә. Жоғары математика курсы. Сызықты алгебра. – Алматы: Санат, 1997.

13. Қасымов Е.Ә.. Векторлық алгебра. – Алматы: МНО РК РУМК, 1991.

14. Қасымов Е.Ә., С.А. Баймулдина, К.Қ. Мустафина. Санды тізбектер. Бір айнымалы функциялар. – Алматы: МНО РК РУМК, 1991.

15. Қасымов Е.Ә.. Аналитикалық геометрия. Алматы: МНО РК РУМК, 1992.

16. Қасымов Е.Ә.. Анықталмаған және анықталған интегралдарды құрылыста қолдану. – Алматы: МНО РК РУМК, 1994.

17. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. 1-том. – Москва: Наука,1982.

18. Қасымов Е.Ә.. Математиканың арнайы курстары анализ. – Алматы: ҚазҰТУ, 2005.

19. Қасымов Е.Ә. Жоғары математика. 1-бөлім. – Алматы: ҚазҰТУ, 2003.

20. Сүлеймен Ж. Дифференциалдық теңдеулер курсы. – Алматы: ҚазНУ, Қазақ университеті, 2009.

21. Бектаев Қ. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика. Алматы, «Рауан» баспасы. 1991.

22. Жаңбырбаев Б.С. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика. – Алматы. Мектеп, 1988.

23. Қасымов Е.Ә., Баймолдина С.А., Алшынбаева Е.Қ., Мустафина К.Қ. Жоғары математикадан дәріс курсы. 4-бөлім. Алматы: МНО РК РУМК, 1998.

24. Қасымов Е.Ә., Қасымов Ә.Ә. Дифференциал теңдеуді құрылыста қолдану. – Алматы. МНО РК РУМК, 1999.

25. Хасеинов К.А. Каноны математики. – Алматы: Атамұра, 2002.

26. Хасеинов К.А. Математика канондары. – Алматы: Атамұра, 2003.

27. Хасеинов К.А. Задачи и упражнения по инженерной математики. Часть 1. – Алматы: Атамұра, 2008.

28. Хасеинов К.А. Задачи и упражнения по инженерной математики. Часть 2. – Алматы: Атамұра, 2009.

29. Khasseinov K. Canons of mathematics. – Moscow: Nauka, 2007.

30. Айдос Е.Ж. Жоғары математика. – Алматы: ҚазҰТУ, 2003.

31. Айдос Е.Ж. Студенттердің өзіндік тапсырмалары. 1-4 бөлімдер. – Алматы: ҚазҰТУ, 2008.

32. Әубәкір С.Б. Жоғары математика. 1, 2 бөлім. – Алматы: ҚазҰТУ, 2000.

Еділ Әбдіқалықұлы Қасымов
Құлжабай Әбдіқалықұлы Қасымов

ЖОҒАРЫ МАТЕМАТИКА КУРСЫ

Математикалық анализ

2-бөлім

Оқулық

Басуға 18.08.2014 ж. қол қойылды. Пішімі 60х90$^{1}/_{16}$.
Қағазы офсеттік. Қаріп түрі «Times».
Баспа табағы 24,1.
Таралымы Мемлекеттік тапсырыспен
1200 дана. Тапсырыс № 3/120-14
"Экономика" баспасы ЖШС-нан тапсырыс берушінің дайын
файлдарынан басылып шықты.

ISBN 978-601-225-694-9