1

Танымдық! Қызықты!

Қ. Нұрсұлтанов

Ертегі есептер

ҚЫЗЫҚТЫ МАТЕМАТИКА

Қажи Нұрсұлтанов

Ертегі есептер

Таймас
Баспа Үйі

Алматы 2011

УДК 510 (07)
ББК 22. 1я73
Н86

Қазақстан Республикасының
Байланыс және ақпарат министрлігі
Ақпарат және мұрағат комитеті
“Әдебиеттің әлеуметтік маңызды түрлерін басып шығару”
бағдарламасы бойынша шығарылды

Нүрсұлтанов Қ.
Н83 **Ертегі есептер.** — Алматы: “Таймас” баспа үйі, 2011. — 72 бет.
Сер.: Қызықты математика.

ISBN 978–601–264–062–5

Оқушылардың сабақтан тыс уақытта оқуына арналған бұл кітаптың мақсаты олардың математикаға деген қызығушылығын тудырып, ынтасын арттыру.

Кітап жеке-жеке әңгімелерден тұрады. Әр әңгімеде белгілі бір математикалық ұғым, есеп, тарихи дерек не әдіспен байланысты мәселе ғана қарастырылды. Бірақ кітаптың өн бойында бір ғана баяндау тәсілі сақталған. Сондықтан әр әңгіме оның бір тарауы іспетті. Бұл тарауларда алдымен күнделікті өмірден алынған есепке қатысы бар қандай да бір жайт ертегі не әңгіме түрінде беріледі де, артынан сол жайттың мәнісін түсініп, талдауда қолданылатын математикалық тәсіл сөз болады.

Мектеп оқушылары мен математика пәні мұғалімдеріне, сондай-ақ көпшілік оқырманға арналған.

УДК 510 (07)
ББК 22. 1я7

ISBN 978–601–264–062–5

Ертегіні жазғам жоқ ермек үшін

(Алғы сөз орнына)

Білмекке құмар қымбатты оқырманым, менің әжем асқан ертегіші адам еді. Мен де сен сияқты ертегі тыңдаудан, һәм айтшы-айтшылап оны әжемнен сұраудан еш жалықпастың бірі болғам. Сөйлей-сөйлей шешен болады дегендей, ертегі біткенді ести келе, енді соның кейбірін сендерге өзім әңгімелеп көрсем қайтер еді деп отырмын. Шындығына келгенде, мен әжемнің ертегісін қаз қалпында қайталамаймын, тек сол кісінің әңгімелеу әдісін, жолын ғана ұстанамын.

Бірде әжемнен: “Сізге осыншама көп ертегіні кім үйретті?” — деп сұрағаным бар.

Сонда әжем: “Ешкім де үйреткен жоқ. Өзім қиыстырам. Бірақ жанымнан жалған еш нәрсе қоспаймын, тек көргендерім мен естігендерімді сен ұғатындай, қызығатындай етіп ертегілерге қосып әңгімелеймін”, — деген еді.

Қазір бақсам, әжем қалтқысыз шынын айтқан екен. Ол кісінің ертегілерінде “арғымақ ат”, “алып батыр”, “көк өгіз”, “қасқыр”, “түлкі”, “таутеке”, “сиқырлы таяқ”, “қу құйыршық”, “Шолпан жұлдыз” т.с.с. көп кездесетін. Мұның бәрі әжем екеуіміздің сол кездегі өмірден күнде көріп, араласып жүрген нәрселерге қатысты алынғанын енді аңғару қиын емес сияқты. Ал әжемнің кей әңгімелерінде кезігетін “жын”, “пері”, “шайтан”, “дию” сияқтылар ол кісінің басқалардан естігені болар деп ойлаймын, өйткені олардың не екенін әжемнің өзі де маған анық айырып атап бере алмайтын.

Әжемнің ол кезде ғылымнан хабары болған жоқ. Мен де әлі мектепке бармаған едім. Сондықтан әжем айтқан ертегілерінде оқуға қатысты жайттар мен сөздер де кезікпейді.

Егер, — деп ойлаймын іштей, — әжем әлі жасап, шөберелеріне әңгіме айтар болса, оқу жайлы да небір қызық ертегілер естір едік ол кісіден. Сондай айтулы әңгімелер санатына, әжемнің өзінше термелеп айтсам, салдыр-салақ пен жалқау-жалтақ үшін қабағынан қар жауған, кірпігінен мұз тамған, ал ыждағатты да ынталы оқушыларға арыстандай айбат, жолбарыстай қайрат беретін қаһарлы да қайырымды ноян дерлік небір қызықты, қиын есептер де ертегі боп енер ме еді деп ойлаймын. Міне, осы ой келесі беттердегі ертегі-есептерді жазуыма себепкер, басшы болды. Мұнда, әжем айтқандайын, мен өз ойымнан еш нәрсе шығарғам жоқ, тек естігенімді, көргенімді және оқығанымды, жеткіншектер, сендер ұғатындай әмбе қызықты болсын деп, өздеріңе қанық ертегілерге қосып әңгімелеп қана отырмын. Ондағы мақсатымды да, әжем салтына бағып, былайша бір шумақпен айтып берейін:

Ертегіні жазғам жоқ ермек үшін,
Есеп-қисап, сан, цифр термек үшін.
Есеп не, есептеудің жолы қалай, —
Жаздым айтып соларды бермек үшін.

Автор.

Тоғыз тоңқылдақ, бір шіңкілдек

Баяғы өткен заманда ғылым деген кең дүниенің *математика* деп аталатын әулетінде *Арифметика* атты патша өмір сүрген екен. Осы патша үнді елінде үстемдік құрып, ел билеп тұрған дәуірде оның он ұлы болыпты. Патшаның перзенттері еш жоқшылық көрмей, еркін өсіп, ер жетеді.

Патша өзінің Тұрмыс атты үлкен бәйбішесінен туған тоғыз ұлдың атын біріне-бірін ұйқастырып Бірлік, Екілік, Үштік, Төрттік, Бестік, Алтылық, Жетілік, Сегіздік, Тоғыздық деп қояды да, тоқалдан туған баласын кемсітіп, Нөл деп атапты. Бұл атты кемсіту, қорлау дейтін себебіміз — нөл немесе нуль латынша "түк емес" деген мағына береді. Ал осы ең кенже ұлды анасы еркелетіп Цифр деп атап жүріпті. Жаңағы бір бәйбішеден туған тоғыз ұл тоқалдан туған кенжені кемсітіп, алдап-арбай жүріп, тіпті тізесін де батырып, әлгі әдемі атты бәріне балап, ортақ етіп алады. Қазір 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 түрінде жазылып жүрген таңбалардың цифрлар деп аталуы осылай шыққан екен деседі.

Өз анасының еркелетіп атаған Цифр деген атынан ажырап қалған Нөл тоғыз ағасының дөкір озбырлығын халыққа Жаяу Мұса[1] әнімен паш етеді:

Ақ сиса, қызыл сиса, сиса, сиса,
Қалмайды кімдер жаяу зорлық қылса,
Зорлықшыл тоғыз ағам атымды алып,
Нөл болдым, секілденіп Жаяу Мұса.

---

[1] Жаяу Мұса (1835–1929) — қазақтың атақты әнші-ақыны. Оның көпке әйгілі бір өлеңіндегі "Шорманның Мұстафасы атымды алып..." деген жолдың не мақсатпен айтылғаны туралы ел аузында әр түрлі сөз бар. Соның бірі мынадай: Шорманның Мұстафадан басқа Мұса деген тағы бір ұлы болған. Бек әулетіне дарытпай айыра атамақ боп, Шорман төңірегіндегілер қарашаның баласы ақын Мұсаға оны кемсіте "Жаяу Мұса" деген лақап ат тағады. Әу баста ата-анасы қойған атын (астындағы атын емес), есімін бұзған Шорман озбырлығына ашынған әнші-ақын өз ызасын осылай паш етіпті.

Нөл өлеңіне, міне, осы сөз негіз етілген.

Ақ сиса, қызыл сиса, сиса, сиса,
Жаңадан бір сан тусаң маған ұқса.
Жиылып сан атаулы Нөлсің дейді,
Көрер ем мен нөлдікті күнім туса.

Тоғыз ағаның зорлығы Нөлдің атын тартып алумен ғана тынбаған. Бәйбіше мен тоғыз ұлдың ырқында кеткен патша күндердің күнінде "Сандарды нөлге бөлуге болмайды" деген қатал үкім шығарыпты. Жүріп-жүріп әкесіне ыза болған Нөл өзінің үлесін шексіз қиырдан іздеп, ат сабылтып алысқа кеткен екен дейді *(1-сурет)*. Біздің қазір $a : 0 = \infty$ деп жазып жүрген себебіміз де содан екен. Мұндағы "∞" — шексіздік белгісі.

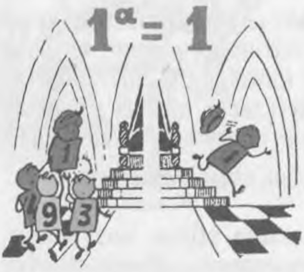
Қатыгез әкеден мирас ала алмайтындығына әбден көзі жетіп, ақылы ойран болған Нөл сорлы енді өзі сандарға көбеюді немесе бөлінуді ойлай бастайды. Тоғыз аға бұл жерде де оған қатты тор құрады. Олар өздерінің қаупін шешесіне айтады, шешесі патшаға жеткізеді. Патша тағы да қаһарға мініп, "нөл санға бөлінсе де, көбейсе де нөл болады" деген әмір айтады. Сөйтіп, нөл сандарға көбейсе де, бөлінсе де сол баяғы нөл күйінде қалып қойыпты. Біздің күні бүгінге дейін $0 : a = 0$ және $0 \cdot a = 0$ деп жазып жүргеніміздің себебі осы болса керек.

Арифметика ұлдарының цифр деген атқа ие болғаннан кейінгі атқаратын қызметі сан жасау, сан құрау екені бәрімізге мәлім. Жаңағы тоғыз аға Нөлді қызмет бабында да шетке шығармай қоймайды. Олар өзара сан құраған кезде қай жерде бос орын болса, сол жерге Нөлді жіберіп, қосақ арасына қыстыра беретін болған. Мұндай бос орындарды математика тілінде *бос разрядтар* деп атайды. Тоғыз ұлдың зорлық-зомбылығына ұшыраған Нөлді жұрт мүсіркеп Бір шіңкілдек деп, ал шіңкілдекті тоқпақтауды ғана білген томырық мінез тоғызды Тоғыз тоңқылдақ деп атаған екен.

1-сурет

Тоғыз тоңқылдақтың Бір шіңкілдекке жасаған кесапаттары математика әулетіне кеңінен тарап, солай қалыптасып та кетсе керек. Мысалы, математиканың кейінірек өсіп-өнген бір саласы шектер теориясында Нөл жазғанды төмендетіп, "Шексіз аз" шама деп атау ұйғарылған. Бара-бара Нөлдің бұл бір қыры өмірде кеңінен көрініп, қазіргі математиканың "Дифференциалдық және интегралдық есептеулер" деп аталып жүрген өркенді ұрпағы өздерін осы шексіз аздардан тарадық деседі.

Тұрмыс бәйбішенің тұла бойы тұңғышы Бірлік басқаларынан енжар, ынжық болады. Оны әке-шешесі, туған-туыстары қанша қолпаштап көтерсе де, кежегесі кейін тартып, сол Бірлік қалпынан өзгермеген, елдің алдына шыға алмаған. Біздің қазір $1^a = 1$ деп жазатынымыздың себебі сондықтан *(2-сурет)*. Осы бірлікті қанша көтеріп, сүйемелдеп еш нәрсе шығара алмаған ағайындары, бір өзгеріс болар ма екен деген оймен, бірлікті бірлікке бөліп көреді. Бірақ жетесінде, жаратылысында айырып айтар түк жоқ Бірлік сол қалпында қалып қояды. Сол себепті 1 : 1 = 1 деп жазамыз. Тоңқылдақ атанған тоғыз ағайынды патша баласының ел арасында беделге ие болуына ең кенжесі Тоғыздықтың ықпалы көп болса керек. Замандастары Тоғыздықты асқан өнерпаз, сегіз қырлы, бір сырлы азамат деседі екен. Шынында да, бұл санның басқа ағайындарына ұқсамайтын қасиеттері өте көп.



2-сурет

Сондықтан да күні бүгінге дейін бүтін сандарға қолданылатын кейбір арифметикалық амалдар осы Тоғыздыққа байланысты келеді. Ал мұндай ерекшеліктерді қазіргі математика тілінде *теорема* не *ереже* дейді. Ендігі сөз осы ережелер жайлы. Әуелгі әңгімені сандардың тоғыздыққа бөлінгіштік ережесінен бастайық.

Бірінші ереже. *Цифрларының қосындысы тоғыздыққа қалдықсыз бөлінетін сандардың бәрі тоғыздыққа қалдықсыз бөлінеді.*

Мысал келтірейік. 564 381 саны тоғыздыққа қалдықсыз бөлінеді. Өйткені бұл санның цифрларының қосындысы (5 + 6 + 4 + 3 + 8 + 1=27) сөзсіз тоғыздыққа бөлінетінін көреміз.

Бұл жайлы ел арасында әр алуан әңгіме бар. Біреулер Тоғыздыққа бұл қасиет ағасы Үштіктен ауысыпты деседі. Ойлап қарасақ, мұның жаны бар сияқты. Осы жерде *"цифрларының қосындысы үшке қалдықсыз бөлінетін сандардың бәрі үшке қалдықсыз бөлінеді"* деген ереженің бар екенін еске түсіре кетейік.

Айталық, 3 216 саны цифрларының қосындысы (3 + 2 + 1 + 6 = 12) сөзсіз үшке бөлінеді. Оны оқушы өзі тексеріп көрсін.

Тоғыздықтың тағы бір тамаша қасиетін сипаттайтын мынадай ереже бар.

Екінші ереже. *Санды тоғыздыққа бөлген кезде шығатын қалдық оның цифрларының қосындысын тоғыздыққа бөлгенде шығатын қалдыққа тең.*

Мысал келтірейік: 3 451 : 9 = 383 және қалдық 4.

3 + 4 + 5 + 1 = 13; 13 : 9 = 1 және қалдық 4.

Тоғыздықтың осындай қасиетіне сүйене отырып, санды тоғыздыққа бөлгендегі қалдықты табуды бұдан да оңайлатуға болады. Сол себепті тағы бір ережеге тоқталамыз.

Тоғыздыққа бөлгенде шығатын қалдықты табу үшін былай істеуге болады.

Үшінші ереже. *1. Берілген сандағы тоғыздықтар және қосындысы тоғыз болатын цифрлар шығарылып тасталынады.*

2. Қалған цифрларды бір-біріне қосамыз. Егер сонда бір таңбалы сан шықса, сонымен тоқтаймыз. Ал егер олай болмаса, сонда шыққан жаңа санның цифрларын тағы қосамыз. Бұлай қосу қашан бір таңбалы сан шыққанша жүргізіледі.

Осы тәртіппен табылған бір таңбалы санды берілген санның *ықшамдалған саны* деп атайды.

Айталық, 591 276 саны берілсін. Әуелі бұдан 9-ды және 2 мен 7-ні (өйткені $2 + 7 = 9$) шығарып тастаймыз. Сонан соң қалған цифрларды қосамыз $5 + 1 + 6 = 12$. Осы шыққан санның цифрларын қоссақ, ықшамдалған сан 3 табылады.

Төртінші ереже. *Санды тоғыздыққа бөлгенде шығатын қалдық сол санның ықшамдалған санына тең болады.*

Енді үшінші, төртінші ережелерге мысалдар келтірейік.

1-мысал. 425 189 санын тоғыздыққа бөлгенде шығатын қалдықты анықтайық. Мұнда жоғарыдағы ережеге сүйене отырып, әуелі 9-ды, содан соң қосындысы тоғыз болатын 4 пен 5-ті және 8 бен 1-ді шығарып тастаймыз, сонда қалған 2 саны іздеп отырған қалдығымыз болады.

2-мысал. 36 978 санын 9-ға бөлгенде шығатын қалдықты табайық. Мұнда 9-ды және 3 пен 6-ны шығарып тастағанда, 7 мен 8 қалады. $7 + 8 = 15$, ал $1 + 5 = 6$. Демек, іздеп отырған қалдық та 6.

Тоғыздықтың осындай ерекше қасиеттерін білген бухгалтерлер, есепшілер, сатушылар оны жан-жақты пайдалана алады.

Жоғарыда өзіміз сөз еткен ережелер негізінде тағы да мынадай тамаша ереже туады.

Бесінші ереже. *Қосындыны тоғыздыққа бөлгенде шығатын қалдық қосылғыштардың әрқайсысын тоғыздыққа бөлуден шығатын қалдықтардың қосындысына тең болады.*

Міне, бұл ереже қосу амалының дұрыс не бұрыс орындалғандығын тез анықтауға мүмкіндік береді. Сондықтан бұл ережені *тоғыздықпен тексеру* ережесі деп атайды.

1-мысал. Мына амалдың дұрыстығын тоғыздық ережесімен тексеріп көрейік:

$34\,812 + 25\,724 + 31\,287 + 2063 = 93\,886.$

Тексеру. Төртінші ережеге сүйеніп, әр қосылғышты 9-ға бөлгендегі шығатын қалдықты табамыз. Сонда бірінші қосылғыштың қалдығы — 0, екіншісінікі — 2, үшіншісінікі — 3, төртіншісінікі 2 болады. Енді табылған қалдықтарды қосамыз: $0 + 2 + 3 + 2 = 7$.

Бұдан кейін үшінші немесе төртінші ережеге сүйене отырып, қосындыны 9-ға бөлгендегі шығатын қалдықты табамыз. Ол да 7-ге тең болып шығады. Демек, бесінші ереже бойынша орындалған амалдың дұрыстығына көзіміз жетеді.

2-мысал. 8 731, 42 503, 317 және 7 956 сандарының қосындысының дұрыстығын тексер.

Есептеу қолайлы болу үшін әр қосылғыштың және қосындының ықшамдалған сандарын тік сызықтың оң жағынан өз тұсына жазамыз:

8 731	1
42 503	5
317	2
7 956	0
59 507	8

Тоғыздықпен тексеру ережесін басқа амалдарға да қолдануға болады.

Алтыншы ереже. *Айырманы тоғыздыққа бөлуден шыққан қалдық азайғышты 9-ға бөлуден шыққан қалдықтан азайтқышты 9-ға бөлуден шыққан қалдықты шегергенге тең болады.*

Мысалдар:

– 8 378 403	6
6 569 420	5
1 808 983	1

– 4 071	12
1 814	5
2 257	7

Ескерту. Соңғы мысалда азайғыштың ықшамдалған саны (3) азайтқыштікінен (5) кем болғандықтан, 3-ке 9 қосылды, сондықтан 12 болды.

Жетінші ереже. *Көбейтіндіні 9-ға бөлуден шыққан қалдық әр көбейткішті 9-ға бөлуден шыққан қалдықтардың көбейтіндісіне тең болады.*

Мысал:

× 2315	2
467	8
16205	
13890	
9260	
1081105	7

$$\times\begin{array}{r}2\\8\end{array}$$

$$16$$

$$1 + 6 = 7$$

Тоғыздық бойына біткен талант (*математиктерше* — қасиет) осы айтылғандармен түгенделмейді. Соның қазір бізге белгілі тағы бірнеше қасиеттерін атап өтелік.

I. Кез келген сан мен оның цифрлары қосындысының айырмасы қашанда 9-ға бөлінеді.

Мысалы: $894 - (8 + 9 + 4) = 894 - 21 = 873$ және $8 + 7 + 3 = 18$, ал 18 : 9, демек, айырма сан 873 : 9. (:) белгі — "бөлінеді" деген сөзді көрсетеді.

II. Цифрлары бірдей, бірақ олардың орналасу реттері әр түрлі екі санның айырмасы қашанда 9-ға бөлінеді.

Мысалы: $7\ 681 - 1\ 687 = 5\ 994$ және де $5 + 9 + 9 + 4 = 27$, ал 27 : 9, демек, 5994 : 9.

III. Әрқайсысындағы цифрлар қосындысы бірдей болатын екі санның айырмасы қашанда 9-ға бөлінеді.

Мысалы, айталық, 52 721 және 368 сандары берілген. Бұларда 5 + 2 + 7 + 2 + 1 = 17 және 3 + 6 + 8 = 17, демек, 52 721 − 368 айырма 9-ға бөлінеді (тексер).

IV. Кез келген санды цифрлардан тұратын сан цифрларының ретін қалауымызша ауыстырғанда шыққан сандарды 9-ға бөлгеннен шыққан қалдық қашанда бірдей болады.

Мысалы 865 саны берілсін. Мұның цифрларының ретін ауыстырып 685 және 568 сандарын жасалық. Төртінші ережеге сүйеніп, бұлардың әрқайсысын 9-ға бөлуден шыққан қалдықтың 1-ге тең болатынын көреміз.

Қымбатты оқушы! Тоғыздықтың бар қасиеті бұлармен аяқталады деуден аулақпыз. Оның әлі де алуан түрлі қасиеттері алда ашылуына күмән жоқ. Тоғыздықтың сондай тың қасиетін тосын табушының бірі, осы ертегіні оқып қанған оқушы, сен де боларсың десек, еш артық емес.

Алдардың алтын жасырған көмбені қалай тапқаны туралы

Шықбермес Шығайбай өлер алдында өзінің ниеттес Үлен және Түлен деген екі шайтан достарын шақырып алып, үй ішіндегі жан біткенді сыртқа қуып жіберіп, мынадай өсиет айтыпты:

— Өмір бойы жақсылық десе қарысып, жамандық үшін алысқанда серік болған достарым едіңдер. Арыздасарда арғы-бергіні еске бір алатын әл де қалмады. Өйткенмен, неліктен Шықбермес Шығайбай атанғанымды еске түсірмей болмас...

Адам баласына мейірім жасап, дән татырмайтын қаттылығыма орай ел мені "шықбермес" деп, ал босағамды аттаған жанды "шық, әй!" деп жолатпайтын безерлігім үшін "шығай" дескен еді. Сараңдық пен арамдықтың арқасында қорам малға, қоймам алтын қазынаға толған соң, "бай" аты жамалған болатын. Міне, сол қыруар қазына, мал-мүлікті адам баласының тіршіліктегі игілігіне бағыштап, жинаптермегеніме осы аттың өзі айғақ. Қайта мен қазына байлықты сыңа жинағанымда оған адам баласының қолы жетпей, зарығып, тарыға түссе екен деп ойлайтынмын. Менің айызым сонда ғана қанушы еді. Анда-санда Алдар құдың алдауына түсіп шашылғаным болмаса, бұл дүниеде біршама өз мұратыма жеткен болдым. Оған екі әзәзіл сендердің септіктерің де аз тиген жоқ. Енді, міне, дүниеден өтер зауал шақта да сол пейілімнен қайтпақшы емеспін. Малды қойшы, ит пен құстың жемі боп өзінен-өзі түгесілер. Ал жиған алтын қазынамды адам таппастай жерге көміп тастағам. Шайтан өлмейді демей ме, адам баласына жамандық, қастандық ойлаумен кешетін, сірі жанды өмірлеріңде қаражаттан тапшылық шеге қалсаңдар, алып пайдаланарсыңдар. Қазынаны жасырар алдында, кейін жаңылып қалмастай белгілі жерді, басқа жан, әсіресе Алдар қу сезбестей құпия жерді тап деп ежелгі гректің атақты ғалымы Архимедпен бақталас менің сырлас-сыбайласым Сұрхан математикке ақыл салдым. Сұрхан ондай орынды тапты да, ол жайлы аузынан шығармасқа ант етті. Ол бұрнағы жылы дүние салды. Көмбенің орнын білетін адам енді мен ғана. Соны өздеріңе оңашада ауызекі айтып қалайын деп әдейі шақырғанмын. Ұмытпастай етіп ұғып алыңдар.

Бұл төңіректе ұрпақтан ұрпаққа тарап, мәңгі сақталатын әйгілі үш белгі бар. Олар: Алдардың лашығы, менің қыстауым және өздерің мекендейтін Шайтан көл. Алдар аты ешқашан өшпекші емес, демек, оның тұрған лашығы да ешқашан ұмытылмайды. Ал Алдар есімі аталған кезде мені мен сендерді де ел еріксіз еске алады. Сөйтіп, бұл үш белгі мәңгіге сақталмақ. Осы үш белгі тұрған жерлерден басталып ағатын үш өзеннің тоғысқан жерінде алтын қазына көмулі... — деп, Шығайбай әлсіреп кетті. Осы сәтте Түлен Үленді түртіп кеп қалды. Үлен ұшып тұрған бойы Шығайбайға үңіліп:

— Шықа, Шықа, сіз тоғысқан үш өзен бар дейсіз. Бұл маңда Шайтан көлден басталатын, өзіңіз алдырған ақырсыз “Ұзыннан” өзге ешбір тоған жоқ қой, — деп өзеурей безек қақты.

Шығайбай сырылдай сөйлеп:

— Мен сендерге көмбе орны құпия етіп алынған дедім емес пе? Сол құпияның сыры қалған екі өзеннің жер бетінде жоқтығында жатыр. Бірақ та... — дей берді де, жан тапсырды. Дал болып қос шайтан қалды.

Осы мезетте бағанадан бері Шығайбай үйінің жабығында жасырынып тұрған екі бала жігіт күні бұрыннан сайлаулы қос тұлпарына барып қонды да, Алдар лашығын бетке алып шу десті. Бұлар Шығайбайдың жылқышылары Қабыш және Қабдеш дейтін жігіттер болатын. Олар Алдарды лашығынан тапты. Келе бар естігендерін Алдарға баяндап:

— Алдар аға, қазынаны тығуға математик Сұрхан сұм ақыл берген екен. Енді қайттік?! — деді Қабыш пен Қабдеш өздерінің неден қауіптенетінін жасыра алмай.

Шығайбай қоймасы жайындағы әңгімені тыңдап, бір нүктеге тесіле қарап, қалт етпей қатып қалған Алдар кенет жадырап, өзінің әйгілі әніне басты:

Менің өзім Алдармын,
Шайтанды да алдармын.
Қағаз, сызғыш, қарындаш,
Бір сабақ жіп және тас,
Әкеліңдер, кәнеки,
Сұрхан сырын аңлармын.
Аңлап қана қоймаспын,
Соның жұмбақ сырларын,
Қабыш, Қабдеш, сендерге,
Түсіндіріп талдармын,
А-а-а, ..., а-а-а-а-а...

Қабыш пен Қабдеш Алдардың атаған нәрселерін лезде әзір етті. Үшеуі лашықтағы жайдақ үстелді жағалай жайғасқан соң, Алдар қағаз бетіне сурет сызып алды да, сөзге кірісті *(3-сурет)*.

— Мұнда “К” әрпімен Шайтан көл, “Қ” арқылы Шығайбай қыстауы, ал “Л” арқылы менің лашығым белгіленген. Шығайбай қыстауынан менің лашығым қанша жер екенін білетін шығарсыңдар.

— Түп-тура 22 шақырым, Алдар аға, — деді Қабдеш.

— Дұрыс, егерде 1 шақырымды 1 сантиметрге баласақ, онда қыстау мен лашық арасы 22 сантиметр боп шығады. Ал қыстаудан Шайтан көлге дейінгі аралық қанша еді?

Бұл жолы Қабыш жауап қатты:

— Қыстау мен көл арасы 13 шақырым деп есептейтінбіз. Сонда ол аралық қағазға 13 сантиметр боп түсуі керек.

— Бір қатесі жоқ, әттең оқымағаның, әйтпесе тым зерек жігітсің-ау, — деп Алдар Қабышты арқаға қақты да, — енді менің лашығымнан көлге дейін 19 шақырым екені өзіме аян, сондықтан да бұл араны 19 сантиметр етіп сыздым. Ал Шайтан көлден басталып, Шығайбай қыстауы мен менің лашығымның екі арасын қақ жарып ағатын "Ұзын" өзенін "КӨ" түзуімен кескіндедім, — деді.

3-сурет

Осыдан кейін Алдар қағазға жазып, біраз есептеулер жасады да, Қабыш пен Қабдешке қарап сабырлы үнмен:

— Шайтан көлден 8 шақырым жерде "Ұзын" өзенінің астындағы иірімде Шығайбай байдың алтын қазынасы көмулі жатыр, — деп бір-ақ кесті.

— Алдар аға, — деді Қабыш, — Сіздің алтын қазына жатқан жерді дәл болжағаныңызға біз шүбә келтірмейміз. Өзіңіз түсіндіріп талдаймын деген соң, оған шамаңыз қалай жетті деп те мазаламақшы емеспіз. Мені алаң етіп тұрған жайт мынадай: қазына судың астында екен. Оны күректен басқа құрал-сайманы жоқ халық қалай шығарып алмақ?

— Оның лажын табу оп-оңай. Сұрхан зәлім түбінде алтынды өзі басып қалуды да ойлаған шығар. Ол қазына жасырған көмбенің орнын дұрыс есептеп, аса бір ұрымтал жерден тапқан. Мұндағы сыр мынада: егер алтын жатқан жерді Шайтан көлден бастап тоған бойынан дәл есептеп анықтағаннан соң, Шығайбай қыстауына қарай туралап "Ұзын" өзенінен күрек бойы жер жырсақ болды, өзен суы солай қарай ақтарылып, өзі-ақ арна табады. Сонда Шығайбайдың қыстауын су басып, жер бетіндегі қарғыс атқан бұл мекен мүлде жоқ болады. Оның үстіне "Ұзын" өзенінің ескі арнасындағы бұрмадан алтын қазынаны аршып алып, халық кенеледі, — деп Алдар сөзі тамамдалады.

— Ақылыңнан айналайық, құлдық еттік, Алдар аға, — десті Қабыш пен Қабдеш бір ауыздан.

Қабыш тағы суырылып:

— Үлен мен Түлен де алтын қазына жасырылған көмбені сабылып іздеуде шығар. Олар Алдар ағаң жүрген жерге жоламайды. Алдымен өзен бойынан соларды тайдыру керек. Қабдеш, сен Алдар ағаңды ертіп, көлден бастап "Ұзын" өзеніндегі алтын қазына жатқан көмбеге дейінгі, Алдар ағам әлгіде айтқан, қашықтықты өлшеуге барасың, ол үшін екеуіміздің құрығымыздан жер өлшейтін құрал жасайық. Мен халық жинауға ел ішіне аттанамын, — деді.

Осыдан кейін Қабыш пен Қабдеш екеулеп құрықтарынан ашасы 2 метр болатын кәдуелгі саржан әзірледі.

Бұл уақытта Алдар да қарап тұрған жоқ. Қынынан кездігін алды да, өлгінде өзі сызған қағаздағы үшбұрышты оның қабырғалары бойымен тіліп шықты. Сонан соң оны қыстау *(Қ)* тұрған бұрышынан тесіп, лашығының тіреуіндегі бір бұтаққа ілді де, бағана Қабыш пен Қабдеш әкелген тасты жіпке байлап, жіптің екінші ұшын жаңағы бұтаққа бекітті (*4-сурет*, үшбұрыш кішірейтіліп алынады). Содан соң Қабыш пен Қабдешті қасына шақырып алып:

— Шығайбайдың алтын қазынасын олжалап, аман-есен лашыққа оралғаннан кейін, екеуіңе, біріншіден, алтын көмбені қалай болжағанымды, екіншіден, көлден қазынаға дейінгі қашықтықты қалай дәл есептеп тапқанымды, үшіншіден, қазынаны алу әдісін көрсетуде неге сүйенгенімді түсіндіріп беремін. Сонда мына ілулі тұрған үшбұрыш пен тасты тартып тұрған жіптің де көмегін көретін боласыңдар. Енді бөгелмей жолға шығайық, — деді.

4-сурет

Сонымен, бұл үшеуі алтын қазынаны алуға аттанып кетті. Олардың қазынаны қалай алғандарын тәптіштеп жатудың еш қызығы жоқ. Алайда Алдардың өзі түсіндірем деп кеткен әлгі үш мәселесі кімді болса да қызықтыратын болса керек.

Сонау Архимед заманынан әйгілі болып, әлі мәнін жоймаған бұл мәселелер — біздіңше, нағыз алтын қазына, сыры мен құны бірдей мол қазына. Сол қазынаны қазір 8—10-сыныптарда оқитын талапты шәкірттің өз зейінімен-ақ ұғынуы ғажап емес. Солардың өз пайымдауларымен салыстырып карауы үшін енді Алдардың өз түсіндірмесін келтіріп өтелік.

Алдар бұл мәслихатты Қабыш пен Қабдешке мынадай сауал қоюдан бастады:

— Сендер осы менен Үлен мен Түленнің неге қабағат қорқатынын білесіңдер ме?

— Жоға, — десті Қабыш пен Қабдеш жарыса сөйлеп.

— Білгілерің келе ме?

— Келгенде қандай!

— Онда әуелі соны айтайын, өйткені бұл да қазына сырының ашылуымен байланысты. Менің өнерім мен ақыл-айлам өздерінен басым болған соң, шайтандар менен қаймығады. Менің биік екі баканға керген қыл арқанның үстімен сырықты көлденең ұстап, жер бетіндегі қара жолмен жүргендей-ақ майпаңдағанымды талай көрдіңдер. Асау аттың үстінде тік тұрып-ақ шапқылай берем. Әр қолыма он-оннан шырақ алып, бірде-бірін өшірмей не құлатпай көкке атқан қалпыммен Үлен, Түленді сан рет састырдым. Бұл өнердің бәрінен де ол малғұндар мақрұм.

Әрине, бұл өнерлерді шынайы меңгеру үшін ерінбей еңбек етіп, жалықпай жаттығу қажет. Дегенмен осы өнердің бәріне тән бір ерекше сыр бар. Сол сырды білмейінше, мұндай өнерге ешкімнің қолы кәміл жетуі мүмкін емес.

— Ол нендей сыр, Алдар аға? — деп Қабыш пен Қабдеш елегізіп қалды.

— Сабыр етіңдер, сол сырды сендерге өзім ашып баяндағалы отырмын, — деп Алдар, Қабыш пен Қабдештің өрекпісін басқан соң, сөзін былай жалғастырды:

— Әр дененің бойынан қашанда бір тамаша нүкте табуға болады. Ол нүктенің тамашалығы мынада: егер денені дәл осы нүктесімен кез келген тіреуге қойсақ, ол дене қандай жағдайда болса да тіреуден құлап түспейтін болады.

Осы жердегі Алдардың айтып отырған нүктесі физикада *дененің ауырлық орталығы (центрі)* деп аталады. Ауырлық орталығынан тіреуге қойылған денені — тепе-теңдік қалпында немесе орнықтылық жағдайында тұрған дене дейді.

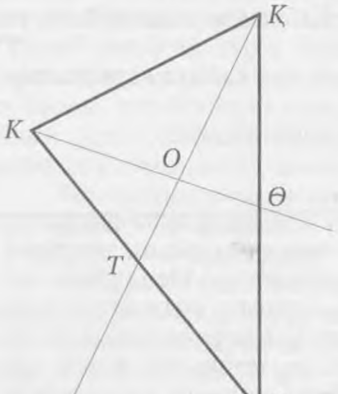
Қолындағы таяқтың ауырлық орталығы (центрі) қақ ортасында болатынын айтып, Алдар таяқты ортан белінен сұқ қолына тұрғызып алып, оны зырылдауықша айналдырып жіберіп еді, Қабыш пен Қабдеш таңдайын қағысты.

— Міне, менің ғажап өнерімнің сыры — әр нәрсенің осы таяқтағы сияқты нүктесін (ауырлық орталығын) тауып, пайдалана білуімде жатыр, — деді де Алдар үшбұрышты қарындаштың ұшына *О* нүктесінен тұрғызып алып, едәуір секектетті. Бірақ үшбұрыш қарындашқа жабысып қалғандай, оның ұшынан тапжылмады.

Осы кезде Қабыш тұрып:

— Онда, Алдар аға, бізге де денелердің сондай нүктесін (ауырлық орталығын) қалай табуға болатынын үйретіңіз, — деп өтінді.

— Жарайды, — деді де Алдар түсіндіре бастады.

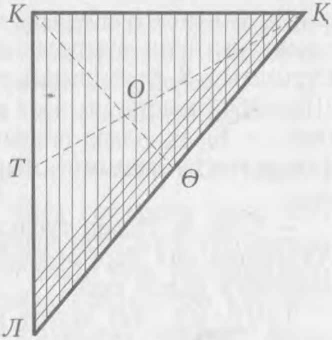


5-сурет

Алдардың түсіндірмесін талдайық. Баканға ілулі үшбұрыштың ауырлық центрін табу керек болсын. Оны анықтау үшін сондағы тасқа байланған жіптің үшбұрышты қиып өтетін нүктелерін белгілеп алып, артынан сол нүктелерді бастыра түзу сызық жүргізейік *(5-сурет)*. Ол түзуді — *ҚТ* — дененің (үшбұрыштың) ауырлық сызығы деп атайды. Енді сол үшбұрышты *К* әрпі тұрған бұрышынан бақанның бұтағына іліп, әлгі тәжірибені қайталасақ, онда бұл фигураның (үшбұрыштың) екінші ауырлық сызығы — *КӨ* — “Ұзын” өзенінің бойымен кететінін көреміз. Осы екі ауырлық сызығының қиылысу нүктесі — *О* — сөзсіз *КЛҚ* үшбұрышшының ауырлық нүктесі болады.

Қазіргі оқулықтарда пайдаланып жүрген терминдер арқылы оны былай түсіндіруге болады. Кесіндінің ауырлық орталығы оның қақ ортасы болады.

КЛҚ үшбұрышын алып, оны 6-суретте көрсетілгендей етіп, *ЛК* қабырғасымен жарыстыра өте жіңішке жолақтарға бөлеміз. Кесінді іспетті болғандықтан, осындай әрбір жолақтың ауырлық центрі оның қақ ортасында жататыны, ал барлық жолақтың бәріне бірдей ортақ ауырлық центрі, яғни центрлік сызық, *ЛҚ* кесіндісінің ортасымен *К* төбесі арқылы өтетін *КӨ* кесіндісі болатыны сөзсіз. Мұндай кесіндіні үшбұрыштың *медианасы* деп атайды. Сондықтан *КЛҚ* үшбұрышының ауырлық центрі бұл жағдайда оның *КӨ* медианасында жататынын көреміз.



6-сурет

Егер осы үшбұрышты енді *ҚЛ* қабырғасымен жарыстыра жіңішке жолақтарға бөлшектесек, онда ол үшбұрыштың ауырлық центрі *ТҚ* медианасында жататын болады. Осыдан мынадай қорытындыға келеміз: үшбұрыштың ауырлық центрі әрі *КӨ* медианасының бойында әмбе *ТҚ* медианасының бойында болатындықтан, ол нүкте осы медианалардың ортақ нүктесінде, яғни олардың қиылысу нүктесінде (*О* нүктесінде) болады. Енді өздерің пайымдап көріңдерші, үшбұрыштың үшінші медианасы ауырлық центріне қарағанда қалай орналасатын болады? Ол да үшбұрыштың ауырлық сызығы болғандықтан, ауырлық центрі арқылы өтуі тиіс, біз, сөйтіп, Архимед дананың әйгілі қорытындысына келдік. Ол мына қағиданы айтқан.

Теорема. *Кез келген үшбұрыштың үш медианасы қашанда бір нүктеде қиылысады және бұл нүкте үшбұрыштың ауырлық центрі болады.*

Алдар өзінің “есептеу” жолдарын осылайша әңгімелеп болған тұста Қабыш ұшып тұрып былай деді:

— Алдар аға, мен енді сіздің анада, қазынаны алуға аттанар алдында, түсіндірем деген мәселеңіздің екеуін түсінген тәріздімін. Атап айтқанда, қазына жасырған жерді қалай болжағаныңызды және қазынаны шығарып алу әдісін үйреткенде неге сүйенгеніңізді аңғарып отырмын.

— Мен дым түсінсем бұйырмасын. Түсінгенің рас болса, кәне, маған ұғындыр, — деп Қабдеш те орнынан көтерілді.

— Кәне, айта ғой, Қабыш, — деді Алдар жылы шыраймен.

— “Ұзын” тоғаны Шығайбай қыстауы мен сіздің лашығыңыздың екі арасын қақ жарып ағатындай етіп алынғаннан кейін, ол КЛҚ үшбұрышының бір медианасын, яғни ауырлық центрін, бойлап ағуы тиіс. Сондықтан Шығайбайдың өлеріндегі Үлен мен Түленге айтқан өсиетінде атаған үш өзеннің қалған екеуі осы үшбұрыштың былайғы екі медианасы екенін аңдау қиын емес. Сіз соларды ойша қағаз бетіне тарттыңыз да, қазына осы үш медиананың тоғысқан нүктесінде, яғни үшбұрыштың ауырлық центрінде жасырылған деген тоқтамға келдіңіз. Солай емес пе, Алдар аға? — деді Қабыш.

— Дәл үстінен түстің, — деді Алдар.

— Мұны мен де ұқтым, енді Алдар ағаның қазынаны ашып алу жолын неге сүйеніп нұсқағанына тоқтал, — деді Қабдеш дегбірсізденіп.

— Меніңше, Алдар аға мұнда ауырлық сызығының қасиетін пайдаланған. Бір ұшына тас байланып, екіншісімен бұтаққа ілінген жіптің қашанда үшбұрыш медианасын бойлап өтетіні секілді, көмбе орнынан, яғни ауырлық центрінен, Шығайбай қыстауына (үшбұрыштың Қ бұрышына) туралап бұрылған өзен арнасы қайтсе де Шығайбай қыстауын баса өтуі керек, — деді Қабыш орнына отыра бере. — Бірақ Алдар ағаның көлден қазына жасырған жерге дейінгі қашықтықты лашықта отырып қалай тапқанына қайранмын әлі, — деді.

— Оны да талдап түсіндіруге әбден болады, — деді Алдар. (Енді Алдардың сол берген түсіндірмесін қарастырғанда, ол мынадай теоремаға келеді екен).

Теорема. *Кез келген үшбұрыштың үш медианасы қиылысатын нүкте, сәйкес қабырғаларынан есептегенде, медиананың үштен бірін қияды.*

Бұл теореманың дәлелдемесі геометрия оқулығында бар. Дегенмен біз теорема маңызының аса зор екенін ескеріп, оның Архимедтен бастап аян болған басқа бір дәлелдеуін келтіре кетуді жөн көрдік. Ол үшін алдымен материялық нүкте ұғымын анықтап талдау керек. Материялық нүкте ұғымы механика ғылымындағы ең басты ұғымның бірі боп саналады.

Анықтама. *Материялық нүкте деп белгілі бір массасы бар, бірақ өлшемдерін ескермеуге болатын соншама кішкене денені айтады.*

Материялық нүктенің массасы бар болғандықтан, ол белгілі салмаққа ие болуы тиіс. Сондықтан материялық нүктені оған бір сан (масса) сәйкес қоя қарауға болатын геометриялық нүкте деп қарауға болады. а салмағы бар A материялық нүктені (A, a) деп белгілеу келісілген.

Айталық, салмағы жоқ, ұзындығы d -ға тең AB таяқтың екі ұшына (A, a) және (B, b) материялық нүктелер бекітілсін (таяқ салмағы, берілген a, b салмақтарға қарағанда, елемеуге болатындай). Осындай таяқтың ауырлық центрін табу деп соған тіреуіш қойғанда тепе-теңдік қалыпта болатындай, AB-нің бойынан бір C нүктесін анықтауды айтамыз.

Егер таяқ ұштарындағы нүктелердің салмағы тең болса, онда C нүктесі AB таяғының орта кезінде жататыны жоғарыда Алдар сөзі арқылы берілді. Егер a, b салмақтар әр түрлі болса, онда AB таяғы тепе-теңдік қалыпта болу үшін $a \cdot CA = b \cdot CB$ теңдігі орындалуы тиіс. Бұдан мынадай пропорция шығады:

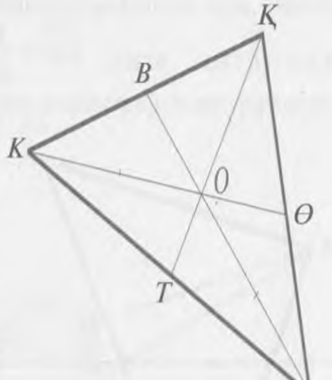
$$\frac{CA}{CB} = \frac{b}{a} \quad (1); \qquad CA + CB = b \qquad (2)$$

екендігі берілген. Сөйтіп, (1) және (2) теңдіктерден былай болады:

$$CA = \frac{b}{a+b} \cdot d; \quad CB = \frac{a}{a+b} \cdot d \qquad (3)$$

Мысал. Ұзындығы 9 *см* болатын салмақсыз АВ кесіндісінің ұштарына салмақтары бар А, В материялық нүктелер бекітілген. Осы таяқтың ауырлық центрі болатын нүктені табу керек.

Шешуі. Жоғарыдағы (3) теңдіктің біріншісін пайдаланып, $CA = \frac{2}{4+2} \cdot 9 = 3$ болатынын табамыз. Жоғарыдағы (1) теңдікті *"иінтірек (рычаг)" ережесі* деп атайды. Осы ережеден және әлгі қарастырылып өткен мысалдан таяқ ауырлық центрінің ұштарынан қашықтығы (бұл қашықтықты *иінтірек иіні* дейді) таяқ ұштарындағы нүктелердің салмағына кері пропорционал болатынын көреміз. Басқаша айтқанда, ауыр материялық нүкте ауырлық центріне жуық орналасады да, жеңіл нүкте одан қашық жатады. Иінтіректің осы тамаша қасиетін адам баласы ауыр жүктерді оңай көтеруге көп пайдаланатындығы мәлім. Сондықтан да (1) теңдікті алғаш аңғарған Архимедтің (б.з.б. 287—212 жж.) *"Тіреу нүктесін беріңдер — мен жер шарын да төңкеріп беремін"* деп өр сөйлеуі шынында да құр мақтаныш емес болатын.



7-сурет

Енді Алдардың Қабыш пен Қабдешке айтқан теоремасын дәлелдеп берейік.

Дәлелдеу. ЛКҚ үшбұрышының әр төбесіне массасы 1-ге тең бір-бір материялық нүктеден орналастырамыз *(7-сурет)*. Айталық, O нүктесі $ЛКҚ$ үшбұрышының ауырлық центрі, ал $KӨ$ нүктесі бір медианасы болсын. Ұштарындағы нүктелер ($Л$, 1) және ($Қ$, 1) массалары бірдей болғандықтан, $ЛҚ$ кесіндісінің ауырлық центрі оның ортасындағы бір $Ө$ нүктесінде жатады. Егерде енді ($Л$, 1) және ($Қ$, 1) материялық нүктелердің массаларын осы $Ө$ нүктесіне жинақтайтын болсақ, онда $ЛКҚ$ үшбұрышының ауырлық центрі ұштары (K, 1) және ($Ө$, 2) материялық нүктелер болатын $KӨ$

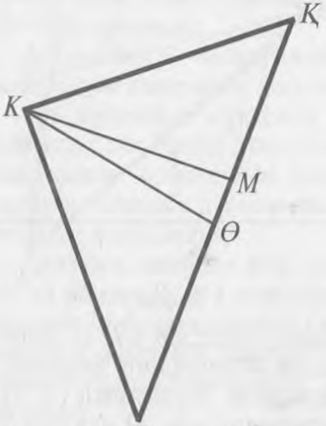
кесіндісінің бойындағы O нүктесінде жататыны анық. Дәл осылайша пайымдап, *ЛКҚ* үшбұрышының ауырлық центрі оның *ЛВ* және *ҚТ* медианаларының бойындағы O нүктесінде жататынын көрсетуге болады. Бұдан *үшбұрыштың үш медианасы қашанда бір О нүктесі арқылы өтеді* деген қорытынды жасаймыз. Ал бұл O нүктесінің тұратын орны жоғарыдағы (3) формуланың біріншісі бойынша анықталады.

$$O\Theta = \frac{1}{2+1}\cdot K\Theta, \text{ яғни } O\Theta = \frac{1}{3}\cdot K\Theta. \qquad (4)$$

Біздің дәлелдемек болғанымыз да осы еді. Қабыш пен Қабдешке *ЛКҚ* үшбұрышының қабырғалары бойынша оның $K\Theta$ медианасының қалай табылатындығы айтылды. Біз математикамен әуестенушілер үшін соны қысқаша қайта баяндап өтейік *(8-сурет)*. *ЛҚ* қабырғасына *КМ* биіктігін түсіріп, сүйір бұрышты $ЛК\Theta$ үшбұрышынан $КЛ^2=К\Theta^2+$ $+\Theta Л^2+2\,\Theta Л\cdot\Theta М$, ал доғал бұрышты $\Theta КҚ$ үшбұрышынан $КҚ^2=К\Theta^2+\Theta Қ^2-2\Theta Қ\cdot\Theta М$ теңдіктерін табамыз.

Осы теңдіктерді мүшелеп қосып және $Л\Theta=\Theta Қ$ екенін ескерсек, $КЛ^2+КҚ^2=2К\Theta^2+2Л\Theta^2$ теңдігі шығады. Бізге $КЛ$=19 *см*, $КҚ$=13 *см*, $Л\Theta=\dfrac{ЛҚ}{2}=\dfrac{22}{2}=11$ *см* екені бұрыннан белгілі. Сонда $19^2+13^2=$ $2К\Theta^2+2\cdot 11^2$ немесе $361+169=2К\Theta^2+242$ болады. Осыдан $К\Theta^2$=144, яғни $К\Theta=12$ (*см*) шығатынын көреміз.

Қазына жасырылған жер медианалардың қиылысу нүктесінде (O) жатыр деп топшылағандықтан, Шайтан көлден қазынаға дейінгі ара қашықтық, яғни $KO=\dfrac{2}{3}\cdot 12=8$, яғни $KO=8$ *см* (жоғарыдағы дәлелденген 4-формулаға сүйендік). Сонда Алдардың алған масштабы бойынша көлден қазынаға дейінгі жер бетіндегі қашықтық 8 *км* болады. Көлден қазына жатқан көмбеге дейінгі өзен бойымен алынған араны Қабдеш Алдар айтқан осы сан бойынша құрық — саржанымен өлшеп тапқан.



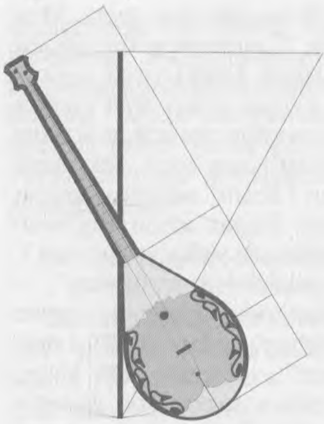
8-сурет

Осыдан біраз күн өткенде Қабыш пен Қабдеш Алдардың лашығынан шығып, "Ұзын" өзеніне қарай бет алып бара жатқан сапарына тап болды. Амансәлемнен кейін Алдар бұл аттанысын былайша түсіндірді.

— Таяуда лашыққа Үлен мен Түлен келді. Олар маған Шығайбайдың өсиетін баяндай отырып, оның жасырған қазынасын табуға көмектес деп көз жастарын көл етіп еңіреді. Өздері іздеп сандала-сандала торыққандарын айтысты. Жарналас бол десті. Мен бұған іштей бір мырс еттім де, мүсіркегенсіп: "Сендерге де бір рақым жасап көрейін, бірақ менің айтқандарымды бұлжытпай орындайсыңдар", — дедім. Олар мақұл десті. Содан кейін мен оларға мынаны айттым: "Шығайбай алтынын үш өзеннің тоғысқан жеріне көмдім деген екен. Ал бұл маңайда "Ұзыннан" өзге өзен жоқ екені өздеріңе аян. Ендеше Шығайбай үш өзен деп "Ұзын" өзенін ұзыннан ұзақ үш рет жалдап шығуды ескертіп отыр. Сонда жетіп тоқтаған жердегі аяғыңның астын қазсаң, алтын қазынаның табылатыны хақ". "О, ақыл кені Алдар, біз енді не бұйырсаң орындайтын құлыңбыз", — деп екі шайтан аяғымды құшты. "Олай болса, осы қазынаны іздеуге шыққан сапарларыңда мені арқалай жүресіңдер, маған алтын қажет емес, тек су үстінде боп тынықкым келеді", — дедім мен. Олар, әрине, бұған құп деген-ді. Бүгінгі күні осы уақытта сол сапарға аттануға сөз байласқанбыз. Соған келе жатқан бетім, — деп Алдар күлкіге көмілді. Қабыш пен Қабдеш те күлкіден ішек-сілесі қатты.

Ақырында Алдар Қабышпен, Қабдешпен қоштасты да, Шайтан көлге қарай салт суыт жүріп кетті. Белгілі ырғақпен ғана келетін термесін де термелей кетті:

Мен әйгілі Алда ағаң,
Шайтанды да алдағам,
Алдағанның белгісі,
Ат қып мініп Үленді,
Тіркеуге алып Түленді,
Ағын суды жалдағам.
"Есеп білмес есек", — деп,
Үлен, Түлен — малғұнды,
Тағы сондай әркімді,
Жалпақ елге жарлағам.
А-а-а, ..., а-а,..., а-а, а-а...



Алтын қима есебі

Күн жексенбі еді. Зейнеткерлікке шыққаннан бергі қалыптасқан дағдым бойынша, таңертеңгі сағат ондар шамасында мәдениет үйіне қарай бара жатқанмын. Қасымда немерем Серік бар. Жолымыз Жұмаштың үйінің алдынан өтетін. Солардың есігі алдынан жаңа ғана аса бергенімізде Серік: "Ата, ата, Жұмаш аға ән салып отыр екен, барып тыңдайықшы", — деп мені жетектей жөнелді. Мүкістенген кәрі құлағым далада шала алмаған болу керек, Жұмаштың шынында домбыраға қосып ән шырқап отырғанын сенектеріне кіргенде бір-ақ білдім. Әуенінен таныдым, айтып отырған әні — Кененнің атақты "Көк шолағы". Әсем әннің шырқын бұзбаудың қамын көздеп, рұқсат та сұрап жатпастан, ептеп басып Серік екеуіміз ішке кірдік. Жұмаш үйінде жападан-жалғыз екен. Сыртын есікке беріп, жазу үстеліне мінбелей отыр. Қолында домбырасы, екі көзі алдындағы жайылып жатқан кітапта. Біздің келгенімізден еш қаперсіз, ойнақылана түсіп, әндетіп отыр:

Есеп ең сен талайдан шықпай жүрген,
Мен дағы сен есепті ұқпай жүргем.
Қалдырдың, міне, бүгін сауықтан да,
Бардай-ақ менде ұпайың ұтпай жүрген.

Шапшаң шықшы, сен, есеп,
Жылдам шықшы, сен, есеп,
Мені құртқан тек есеп,
Егестің маған неге, есеп.
Бұл не деген көп есеп,
Өзім дағы көк есек,
Көрдім сенен көресек.
А-а-а-а, е-е-е...

Жұмаштың әнін тыңдай беруге біз әсте жалықпас едік, бірақ ол өлеңінің қайырмасын аяғына дейін жеткізер-жеткізбестен әннен тез тыйылды да, алдындағы кітабына үңіліп кетті. Сол сәтте Серік қолын шапалақтап:

— Жұмаш аға, бис-бис! — деп айқайлап жібермесі бар ма. Жұмаш жалт қарады. Үшеуміз қосылып қыран-топан күлкіге баттық. Күлкіден сап болған соң, Жұмаш тез ізетшілік қалпына көшіп, біздің отыруымызды өтінді. Тіземді бүккеннен-ақ менің көзім үстел үстінде ашық жатқан кітапқа түсті. Ол мектеп оқушыларына арналған геометрия есептер жинағы екен. Ескі танысым көзіме оттай басылды. Кітапты алдыма қарай икемдеп қойып:

— "Көк шолаққа" телуіңе қарағанда, мұнда саған шешуін таптырмай, сарсаңға сап отырған бір есеп бар ғой, шамасы? — дедім.

— Дәп үстінен түстіңіз, Қабеке, — деп Жұмаш кітапта қойылған мына бір "а" әрпін сұқ қолымен нұқып тұрып, былайша тақпақтап жіберді:

Осынау "а" кесінді
Шығарды әбден есімді.
Ортамнан да бөл дейді,
Қатынас, шетіме кел дейді.
Жауабы жоқ кесімді,
Бұл не деген кесір-ді.

Бер. AB=a кесінді *(1-сурет).*

Табу керек: *AB* кесіндіні орта және шет қатынаста бөлетін *D* нүктені салу керек.

1-сурет.

Мен оның көрсеткен есебін іштей жеделдете оқып шықтым. Мынадай мазмұнды есеп екен:

Берілген a кесіндісін орта және шет қатынаста бөлу керек, басқаша айтқанда, мұны мынадай екі бөлікке бөлу керек: ұзын бөлігі берілген кесінді мен оның қысқа бөлігінің орта пропорционалы болып келуі керек.

Сонау *Евклид* (б.з.д. 365—300 жж.) заманынан бергі геометрия кітабының бірде-біреуінен қалмай келе жатқан бұл бір аса қастерлі есепті Жұмаштың сайқымазақ өлеңге қосуы менің намысыма тигендей болды. Енді қалайда қыбын тауып, осы есепті Жұмаштың өзіне шығартып, одан "өш" алуға шындап бекіндім. Осындай байламға келген соң, алдана тұрсын деп, Серікке Жұмаштың домбырасын алып ұстаттым. Домбыра десе оның да жаны, қолына домбыра тиісімен-ақ өзі Жұмаштан таяуда ғана үйрене бастаған "Серпер" күйін пернелеп тартуға кірісті. Мен Жұмашпен әңгімеге көштім. Мұны тура әңгіме түрінде өткен сабақ десе сыйғандай.

М е н. Жұмаш, сен қатынас деген сөзді қалай ұғасың?

Ж ұ м а ш. Қалай ұққаныңыз қалай?!!

М е н. Математикада қатынас деп нені айтады?

Ж ұ м а ш. *(Мүдіріп, біраз үндемей қалды.)* Қабеке, соның дәл анықтамасы қазір қаперімде жоқ. Сабақта a-ның b-ға қатынасы дегенді $a : b$ немесе $\frac{a}{b}$ түрінде жазатынымыз есімде, әйтеуір.

М е н. Сондағы a мен b-ның арасында тұрған (:) немесе (—) таңбалары не көрсететінін білесің бе?

Ж ұ м а ш. Оларды білем ғой, бөлу амалының таңбалары.

М е н. Өте дұрыс. Олай болса "a" санының "b" санына қатынасы деп "a"-ны "b"-ға бөлгенде шығатын санды айтады екенбіз ғой. Мәселен, 6-ның 3-ке қатынасы 2 болады. Ол былайша жазылып көрсетіледі: $6:3 = 2$ немесе $\frac{6}{3} = 2$.

Сондай-ақ $4:5 = 0{,}8$ берілсе, онда бұл 4-тің 5-ке қатынасы 0,8 болады деген сөзді білдіреді. Енді екі санның қатынасы дегеннің не екенін ұққан шығарсың?

Ж ұ м а ш. Бұл айтқандарыңызды ұқтым, дегенмен, ...

М е н. Не сұрайын деп оқталдың?

Ж ұ м а ш. 1-сыныптан бастап бір санды екінші санға бөлгенде шығатын санды бөлінді деп атайтынын білген едік. Бөлудің нәтижесін қатынас деп те атайтыны неліктен?

М е н. Мұнда үлкен гәп бар, Жұмаш. Әуелі қатынас деген сөздің қайдан шыққанына тоқталайын. Бұл сөз дәл жаңағы мен айтқан мағынасында математикаға біздің дәуірімізге дейінгі III−IV ғасырларда енген. Сондықтан, тым көне сөздің бірі болғандықтан, бұл сөзді алғаш қолданушы адамның кім екенін қазір дәл атау да қиын. Дегенмен бұл сөзді сол тұста өмір сүрген гректің атақты математигі Эвдокске таңатындар да бар. Анығында, Эвдокс және оның әріптестері қатынасты мағына берерлік сан деп ұқпаған.

Ж ұ м а ш. Қатынасты сан ретінде алғаш түсінген кім екен?

М е н. Ғалым атаулының ішінде екі санның қатынасын сандар санатына алғаш енгізіп қолданған адам Әзербайжанның атақты ғалымы *Насиреддин Туси* (1201−1274) болған. Ал Батыс Еуропа ғалымдары қатынасты сан ретінде ағылшынның ұлы ғалымы *И.Ньютонның* еңбектері жарыққа шыққаннан кейін ғана мойындаған. Екі санның қатынасын $a : b$ немесе $\frac{a}{b}$ түрінде белгілеуді Ньютонның замандасы, неміс математигі *В.Лейбниц* (1646−1716) енгізген. Енді қатынас деген сөздің математикада қандай мағынада қолданылатынын ежіктеп көрелік.

Ж ұ м а ш. Маған ең керегінің өзі сол ғой.

М е н. Әрине, егер мұны әбден анықтап ұғынғың келсе, әуелі мыналарға жауап бер. 6 қарындашты 3 оқушыға тең етіп бөліп үлестірсе, әрқайсысына неше қарындаштан тиген болар еді?

Ж ұ м а ш *(ойланбастан)*. 2 қарындаштан.

М е н. Тағы бір сұрағым бар. Ұзындығы 8 *см* бір кесінді алып, оны тең етіп 4 бөлікке бөлсе, онда әр бөлігі неше сантиметр болар еді?

Ж ұ м а ш *(лезде)*. 2 сантиметр.

М е н. Сен бұларды қалай тез есептеп таптың?

Ж ұ м а ш *(таңырқаған кейіп білдіреді)*. Онда тұрған не қиындық бар. Бірінші ретте 6-ны 3-ке, екінші жолы 8-ді 4-ке бөле салдым.

М е н. Міне, осыдан мынадай қорытынды шығаруға болады. Бір нәрсені өзара тең бөліктерге бөлгенде шығатын әр бөлікте сол берілген нәрсенің неше бірлігі болатынын білу үшін әрқашан бөлу амалы қолданылады екен. Бөлу амалы қолданылатын бұдан басқа да бір жағдай бар. Енді соған көшелік. Айталық, сенде 6, ал Серікте 3 дәптер бар. Сонда сенің дәптерің Серіктікінен неше есе артық болғаны?

Ж ү м а ш. 2 есе.

М е н. Біреуі 8 *см*, ал екіншісі 4 *см* екі кесінді берілген. Бұлардың біреуі екіншісінен неше есе ұзын?

Ж ү м а ш. 2 есе.

М е н. Бұларды білу үшін де бөлу амалын пайдаландық па?

Жү м а ш. Иә.

М е н. Бұл жолғы бөлу амалын орындаудан шыққан сан бір кесіндінің екінші кесіндіден неше есе артық екенін көрсететіндігін өзің де аңдаған шығарсың. Енді саған тағы бір есеп ұсынбақпын. Айталық, Серіктің бойының ұзындығы 120 *см*, ал сенің бойың — 160 *см*. Осы 120-ны 160-қа бөлші, қанша шығады екен?

Ж ү м а ш (*жазып есептейді*). $\frac{3}{4}$ немесе 0,75 шығады.

М е н. Осы шыққан 0,75 саны нені білдіреді?

Ж ү м а ш (*аздап ойланып*). Меніңше, бұл Серіктің бойы менің бойымнан 0,75 есе қысқа екендігін көрсетеді.

М е н. Әрине, бұл да тым ұшқары айтылған пікір емес. Дегенмен, есіңде болсын. Біздің тілімізде "есе" деген сөз тек бүтін сандарға немесе бүтіні бар сандарға тіркесе алады. Мәселен, біз 1 есе; 2 есе; 3,5 есе; 5,7 есе т.с.с. деп айтамыз. Бүтін бөлігі жоқ сандарға, 1-ден кіші сандарға "есе" деген сөз ешқашан қосылып айтылмайды. Мәселен 0,4 есе делінбейді. Мұндай жағдайда "5 бөліктің 2 бөлігі" немесе "он бөліктің 4 бөлігі" деп айтылады. Сөйтіп, жаңағы $\frac{3}{4}$ саны Серіктің бойының ұзындығы сенің бойыңды 4 бөлікке бөлгендегінің 3 бөлігіне тең екендігін көрсетеді. Осы мысалдардан бөлу амалының нәрселерді тең бөлуден басқа тағы бір жағдайда қолданылатынын байқаймыз. Міне, осы жолғы шығатын бөліндіні қатынас деп атайды. Атап айтқанда, екі нәрсені шама жағынан салыстырғанда біреуі екіншісінен неше есе артық немесе біреуі екіншісінің қандай бөлігі екендігін білу үшін бөлу амалы орындалса, сондағы шығатын бөліндіні (санды) *қатынас* деп атайды. Түсіндің бе енді?

Ж ү м а ш. Түсіндім.

М е н. Пысықтап көрелік. Екі санның қатынасы 1-ден үлкен сан боп шықса, ол нені көрсетеді?

Ж ү м а ш. Бұл бір нәрсе екінші нәрседен сонша есе артық деген сөз.

М е н. Ал қатынас 1-ге тең болса ше?

Ж ү м а ш. Салыстырып отырған екі нәрсенің тең болғаны.

М е н. Қатынас 1-ден кіші болса ше?

Ж ұ м а ш. Онда бұл сан — бірінші шама екінші шаманың қандай бөлігіне тең екенін көрсетеді.

Мен (*Жұмаштың арқасынан қағып*). Жігітсің. Есебіңді шығару үшін енді пропорция дегеннің не екендігін еске түсірсең болғаны.

Ж ұ м а ш. Е, оны білем ғой. Пропорция деп $a:b=c:d$ немесе $a \cdot b=c \cdot d$ теңдіктерін айтады.

М е н. Сонымен пропорция дегеніміз екі қатынастың теңдігі екен ғой.

(Жұмаш басын изеді.)

М е н. Соны мысал түрінде көрсетші.

(Жұмаш біраз ойланып барып мынаны жазады: 15:3=20:4.)

М е н. Пропорцияның мүшелері қалай аталады?

Ж ұ м а ш. a мен d — пропорцияның шеткі мүшелері, ал b мен c орта мүшелері деп аталады. Енді пропорцияның қасиеттерін де айтып өтейін бе? *(Жұмаш бұдан ары арифметика оқулығынан белгілі пропорцияның қасиеттерін түгелдей айтып шықты. Сонымен қатар пропорцияны шешу туралы да айта кетті.)*

М е н. Сенің пропорцияны жақсы білетініңе қатты қуанып отырғанымды жасыра алмаймын, өйткені сен ұнататын өнердің бірі сурет екенін білем ғой. Орыстың атақты суретшісі *И.Е.Репин* (1844–1930) бірде: "Бақытсыздық-ай! Ол пропорцияларды көрмейді", — деп кейіген екен. Сені ешкім де олай кінәлай алмас. Пропорцияны жақсы түсініп алғансың, осы ынтаңа орай мен пропорция деген сөздің қалай шыққандығы туралы саған айтып бергім кеп отыр.

Ж ұ м а ш (*елегізе түседі*). Айтыңыз, Қабе, айтыңыз.

М е н. Пропорция (латынша "proportio") сөзін, меніңше, ең алғаш рет біздің дәуірімізге дейінгі I ғасырда өмір сүрген Римнің әйгілі ділмар шешені *Цицерон* енгізсе керек. Ол бұл сөзді өз шығармаларында емес, ежелгі грек данасы *Платонның* бір еңбегін латын тіліне аударғанда пайдаланған. Латын, грек тілдеріне бірдей жетік болған Цицерон гректің *аналогия* деген сөзін *пропорция* деген сөзбен аударады. Мұндағы *"логос"* — грекше *қатынас* деген, ал *"ана"* демеулігі *жаңарған, қайталанған* деген мағына береді. Сөйтіп, күнделікті тұрмыста қолданып жүрген қазіргі пропорция сөзі өзінің алғашқы "төркіні" ***аналогия*** мағынасында алынып, *"жаңарған сөз", "қайталанған ой"* деген түсініктерді бейнелейді. Сурет өнерін сүйетін саған бұл деректі білу аса қажет.

Ж ұ м а ш. Қабе, мен сізге дән ризамын.

М е н. Егерде пропорцияның не екі орта мүшесі, не екі шеткі мүшесі тең болса, ондай пропорцияны қалай атайды?

Ж ұ м а ш. Бұл арасы ойымда жоқ.

М е н. Оқасы жоқ. Есіңе мен-ақ салайын. Мұндай пропорцияны үздіксіз пропорция дейді. Үздіксіз пропорцияның тең мүшелерін қалған екі мүшесінің орта пропорционалы деп атайды. Мәселен, $\frac{a}{b}=\frac{c}{a}$; үздіксіз пропорцияда a саны b мен c-ның орта пропорционалы делінеді. Орта пропорционал дегенді есіңнен шығарушы болма. Оның әлі талай керегі болады.

Ж ұ м а ш. Оған шүбәланбаңыз.

М е н. Ендеше, сенің есебіңе де оралатын кезіміз болды білем. Соны дауыстап тағы бір оқып шықшы.

Ж ұ м а ш. (*оқиды*). "...Берілген $AB = a$ кесіндісін орта және шет қатынаста бөлу керек, басқаша айтқанда, мұны мынадай екі бөлікке бөлу керек: ұзын бөлігі барлық кесінді мен қысқа бөлігінің орта пропорционалы болу керек".

М е н. Есепте не нәрсе берілген?

Ж ұ м а ш. a кесіндісі.

М е н. Бұл a нені көрсетеді?

Ж ұ м а ш. Ол — кесіндінің ұзындығын кескіндейтін сан.

М е н. Дұрыс-ақ. Есепте бұл кесіндіні неше бөлікке бөлу талап етілген?

Ж ұ м а ш. 2 бөлікке.

М е н. Олардың шамасы көрсетілген бе?

Ж ұ м а ш. Жоқ.

М е н. Демек, олар әлі белгісіз ғой.

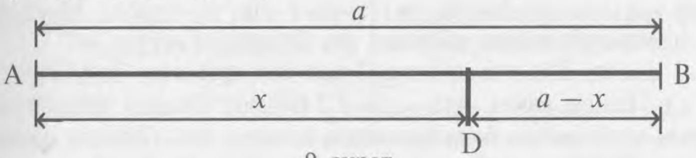
Ж ұ м а ш. Солай.

М е н. a кесіндісінің ұзын бөлігін x деп алайық. Сонда оның қалған бөлігі (қысқа бөлігі) неге тең болады?

Ж ұ м а ш. Әрине, a-дан x-ті алып тастағанға тең болады.

М е н. Осы айтылғандарды өрнектеп жаз.

Ж ұ м а ш. $DB = a - x$.



9-сурет

М е н (*сызып және жазып көрсеттім, 9-сурет.*) $AB = a$, оның ұзын бөлігі $AD = x$, сонда қысқа бөлігі $DB = a - x$ болады. Осындағы ұзын бөлік x есептің шарты бойынша қандай болу керек?

Ж ұ м а ш (*есебіне көз жүгіртіп алып*). Бұл x тұтас "a" кесіндісі мен оның қысқа бөлігінің орта пропорционалы болуы тиіс.

М е н. Осы айтқанымды математикалық өрнек түрінде қалай жазған болар едің?

Ж ұ м а ш (*едәуір ойланып*). Меніңше, мынадай үздіксіз пропорция шығады:

$$\frac{x}{a} = \frac{a - x}{x}$$

М е н. Бәрекелді, дұрыс-ақ. Біз осымен ең керекті нәрсеміздің ұшығына жеттік білем. Жұмаш, есептің негізгі мақсатын еске түсірейікші. Бізге белгісізі не еді?

Ж ұ м а ш. x кесіндісі, яғни a кесіндісінің ұзын бөлігі.

М е н. Соны енді табуға бола ма?

Ж ұ м а ш. Болады, әрине (*жазады*).

$\frac{x}{a} = \frac{a - x}{x}$ пропорциясын шешіп, x-ті табамыз.

М е н. Дұрыс, тездетіп есептей ғой.

Ж ұ м а ш (*есептеп болып*). Міне, мынадай болып шықты:

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot a$$

М е н. Мұндағы $\sqrt{5}$ сияқты сандардың *иррационал сан* деп аталатынын білетін боларсың.

Ж ұ м а ш. Әрине.

М е н. Ал ол атаудың қалай шыққанын ше?

Ж ұ м а ш. Естіген емеспін.

М е н. Ендеше тыңда, бұл да бір қызық жайт. Бұл атаудың тууына басшы болған адам — *Пифагор* (б.з.д. 580—500 жж.). Математикадағы Пифагор ашқан көп жаңалықтардың бірі — квадрат диагоналы мен оның қабырғасының өлшемсіздігі, басқаша айтқанда, олардың қатынасы сол кездегі белгілі бір санмен өрнектелмейтіндігі. Кейін осы жайтты латынша "irrationalis" деп аударған, өйткені латынша "ratio" деген сөз гректің *өлшемді* немесе *ақылға сиымды* деген сөзіне балама болады. Сонда "irrationalis" өлшемсіз (ақылға сиымсыз) деген мағына береді. Қазір иррационал сан ұғымы толық анықталған. Оны жуық шамамен ақырсыз, периоды жоқ ондық бөлшек арқылы өрнектеуге болатынын өзің де білесің. Мәселен, $\sqrt{5}$ жуық шамамен алғанда қаншаға тең болатыны есіңде ме?

Ж ұ м а ш. Дәл есімде жоқ, 2-ден сәл артықтау болуы тиіс.

М е н. Есіңде сақта. Бұл $\sqrt{5} \approx 2{,}2$ болады. Осыны пайдаланып, x-тің жуық мәні қанша болатындығын есептеп тап. (*Жұмаш есептейді.*)

М е н. Сөйтіп, x-тің a-ға қатынасы неге тең екен?

Ж ұ м а ш. 0,6 санына тең, яғни $x \approx 0{,}6a = \frac{3}{5}a$.

М е н. Қатынастың анықтамасы бойынша алсаң, бұл не деген сөз?

Ж ұ м а ш. x кесіндісі берілген a кесіндісін тең 10 бөлікке бөлгендегі 6 бөлігіндей болатынын көрсетеді. Басқаша айтқанда, a кесіндіні өзара тең 5 кесіндіге бөліп, оның 3 үлесін алғанға тең болады.

М е н. Дұрыс-ақ. Міне, берілген a кесіндісін дәл осылайша 2 бөлікке бөлуді осы "кесіндіні орта және шет қатынаста бөлу" деп атайды. Осымен байланысты әлгі өзің шығарған есепті *"Кесіндіні орта және шет қатынаста бөлу есебі*" дейді. Бұл атау ертедегі гректің атақты математигі Евклидтен қалған.

Ж ұ м а ш. Ол әлгі біз оқып жүрген геометрияны шығарған адам ғой.

М е н. Иә, Евклидтен бері 2000 жылдай уақыт өткенін де білетін шығарсың, ал жаңағы *"Кесіндіні орта және шет қатынаста бөлу"* есебі сол кезден бері жасап келеді. Евклид бұл есепті сенше, $x \approx 0{,}6a$

деген жуық мөлшермен шешпеген. Ол x-тің мынадай дәлді мәнін қарастырған:

$$x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2}.$$

Осы x кесіндісін салу үшін Евклид сызғыш пен циркульді ғана пайдаланған.

Евклидтің *"Кесіндіні орта және шет қатынаста бөлу"* есебін шешудегі пайымдауларын, бүгінгі сен сияқты, мектеп оқушыларына алгебралық белгілемелер мен геометриялық сызбалар тілінде былайша түсіндіруге болады (1, 2-кесте).

1-кесте

Евклид есебі шешуінің түсіндірмесі

<table>
<tr>
<td>

Анализі және алгебралық шешуі

9-суреттен $(a>0)$

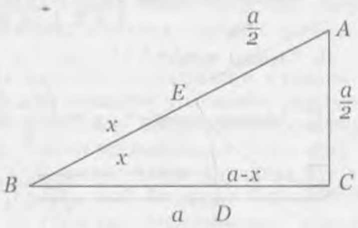
$\frac{x}{a} = \frac{a-x}{x} \Rightarrow x^2 + ax - a^2 = 0 \Rightarrow$

$x_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} \Rightarrow$

$x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}$, шешімі болмайды, өйткені $x_2<0$.

$x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} - \frac{a}{2};$

</td>
<td>



10-сурет.

Қорытынды. Есептің шешуі әрқашан бар және ол біреу ғана.

x=BE=BD (10-сурет). $x \approx 0{,}6a = \frac{3}{5}a$

</td>
</tr>
</table>

Ж ұ м а ш. Осы түсіндірме кесте ішінде келтірілген алгебралық өрнектер мен геометриялық салулардан берілген *a* кесіндіні Евклид әдісімен орта және шет қатынаста екі кесіндіге бөлу есебінің ешқандай қиындығы, яғни "кесірі" жоқ есеп екеніне көзім жетті. Әрі оны циркуль мен сызғышты пайдаланып қалай шешуге болатынын толық ұқтым. Дегенмен тағы бір сұрақ көкейіме оралып тұр.

М е н . Қызықтырған сұрағыңды айта ғой.

Ж ұ м а ш. Ежелгі дәуірдің алдында, яғни б.з.д. төрт ғасырдай бұрынырақта өмірге келген Евклид есебінің кейінгі тарихта, атап айтқанда, қайта өрлеу заманында неліктен *"Алтын есеп"* деген айшықты атаққа ие болғанын түсіне алмай келемін. Сол туралы тарихи мәліметтер берсеңіз деймін.

М е н. Бұл қойған сауалыңнан сенің, шынында да, Евклид есебінің мазмұны мен шешімін терең түсіне бастағаныңды байқаймын. Евклид есебін шешумен бірге оның замандастары және одан кейін өмірге келген ұлы математиктер, талантты табиғат танушылар, және шынайы өнерпаздардың бәрі дерлік айналысқан. Бұл есептің әр түрлі шешу жолдарын және оның қолданыстарын қазіргі кезде де зерттеушілер аз емес. Сондықтан Евклид есебімен байланысты математикалық ойларға, өрнектерге және қалыптамалар мен қағидаларға *"алтын"* деген айшықты атауыш сөз жиі тіркеледі.

Солардың мәнісін саған ұмытпастай етіп тез әрі терең ұғындыру үшін бірнеше жекелеген бөлімшелерден тұратын мынадай кеңесші-кесте әзірледім *(2-кесте)*.

Кел, осы кестені екеуміз бірлесе отырып қарастыралық. (Анығында 1-кестенің мәтінімен Жұмашты толық таныстырдым.)

2-кесте

Математикалық "алтын құрылымдар мен тұрпаттамалар"
(құрылымдар мен модельдер)

I. ***"Алтын пропорция".*** $a > 0,\ a \in R,\ a : x = x : (a - x)$
$$a = 1,\ 1 : x = x : (1 - x)$$

II. ***"Алтын теңдеу".*** $x^2 + ax - a^2 = 0$ *немесе* $x^2 + x - 1 = 0$

III. ***"Алтын сандар".*** $x = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot a = 0{,}618a;\ a = 1 \Rightarrow x = 0{,}618.$

немесе $x = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} \cdot a = \dfrac{2}{\sqrt{5} + 1} = 0{,}618a;$

$\dfrac{2}{\sqrt{5} - 1} = \dfrac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1{,}618a;$ *Осында* $1{,}618a = \Phi$ *деп белгілейік, сонда* $\dfrac{1}{\Phi} = 0{,}618a$ *болады. Мұндағы* Φ — *"алтын саны" Фибоначчи саны деп те аталады.*

IV. ***Фибоначчи тізбегі (қатары) және оның "алтын саны"***

Евклид шешкен алдыңғы пропорциялық қатынас құру есебіне Батыс Еуропадағы *Қайта өрлеу* (Ренессанс) дәуірінің ойшылдары мен өнерпаздары айрықша көңіл аударған. Осындағы *"Алтын қима" немесе "Алтын бөлік"* деген атауыш сөзді ғылымға алғаш рет Италияның әйгілі суретшісі, механигі әрі математигі *Леонардо да Винчи* (1452–1519) енгізген. Осы атауыш сөзден "Алтын пропорция", "Алтын кесінді", "Алтын нүкте" деген ұғыми атаулар туындаған.

Леонардо да Винчидің замандас жерлесі әрі ғылым мен өнердегі әріптесі *Лука Пачиоли* (1454–1514) өзінің "Тәңірлік пропорция туралы" ("О божественной пропорции") деп аталатын еңбегін 1509 жылы жариялаған. Бұл еңбек *Леонардо Фибоначчи* немесе *Пиза шаһарының Леонардосы* (1170–1228) атанған Италия математигінің *"Абақ жайындағы кітап"* (1202) атты қолжазба шығармасының жаңартылып толықтырылған нұсқасы болып табылады.

Пизандық Леонардоның (Фибоначчидің) қолжазба кітабында рекурренттік (қайталанба қолданыстық) теңдікке негізделген *сан тізбесі* немесе *сан қатары* тұңғыш рет қарастырылған. Оларды қазіргі кезде *Фибоначчи тізбесі* немесе *Фибоначчи қатары* деп атайды.

1-анықтама: *Алғашқы үшінші мүшесінен бастап әр мүшесі алдыңғы екі мүшесінің қосындысына тең болатын, яғни* $\varphi_{n+1} = \varphi_n + \varphi_{n-1}$ *түріндегі сан тізбесін (қатарын) Фибоначчи тізбегі (қатары) деп атайды. Бұл тізбедегі әрбір санды Фибоначчи саны дейді.*

Фибоначчи тізбегін (қатарын) былайша жазады:

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$$

Мысалы, мынадай сан тізбесі: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,... Фибоначчи тізбегі деп қарастырылады.

Анықтама: *Фибоначчи тізбегіндегі әрбір алдыңғы мүшенің (φ_{n-1}) келесі мүшеге (φ_n) қатынасының шегі Фибоначчи саны* немесе *Фибоначчи алтын саны деп аталады, яғни*

$$\varphi = \lim_{n \to \infty} \frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_n} \approx 0{,}618 \approx 0{,}62 \approx 0{,}6.$$

Фибоначчи сандарынан 2-ден бастап мынадай қатынас тізбесін құралық:

$$\frac{2}{3} = 0{,}66\ldots; \quad \frac{3}{5} = 0{,}6; \quad \frac{5}{8} = 0{,}625; \quad \frac{8}{13} = 0{,}615 \approx 0{,}62; \ldots$$

Сөйтіп, Фибоначчи "алтын саны" $\varphi = 0{,}62$.

Тарихи мәлімет. *Леонардо Фибоначчи* немесе Боначчиұлы Леонардо (1180–1240) – Италия математигі. Ол Италиядағы Пиза шаһарында туған. Сондықтан оны *пизандық Леонардо (Леонардо Пизанский)* деп те атайды.

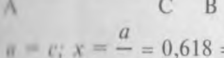
Леонардо Пизанский жас шағында Алжирде тұрып, сонда білім мен өнер жинақтаған аса дарынды математик. Ол арабша, парсыша, түрікше тілдерді жетік меңгерген.

Көне қазақ елі мен ортаазиялықтарда кеңінен қолданылған *құмалақшылардан* және бетіне *ұяшықтар* жасау үшін *құм* жайылған *үстелшеден* тұратын қарапайым есептемелік қол құрал – *"абақ аспабымен"* Леонардо Фибоначчи Алжирде жүрген кезінде жақсы таныс болған. Соның арқасында ол "Liber abaq" ("Абақ туралы кітап") деген еңбек жазып қалдырған. Кейін Еуропада бүкіл жер жаһанға кең тараған "абақ" атты есеп құралы осы Леонардо Фибоначчи еңбегінен бастау алған. Абақ аспабы бүгінгі он түрлі сан цифрларының *"алтын бесігі"* деп бағаланады.

Сөйтіп, Леонардо Фибоначчи ғылым мен білім тарихында φ – алтын санының және абақ атты алтын құндақты бесіктің атасы деп аталады.

V. ***Алтын пішіндер мен нәрселер***

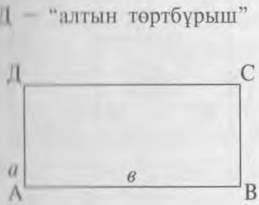
➢ AB – *"алтын кесінді"*
C – *"алтын нүкте"*



$$a + в = c; \; x = \frac{a}{c} = 0{,}618 = \frac{3}{5};$$

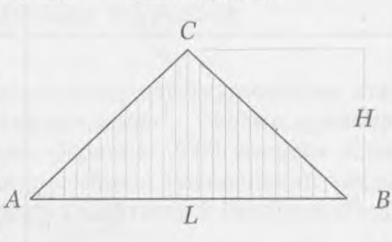
$$y = \frac{c}{a} = \frac{1}{x} = 1{,}618$$

➢ ABCД – "алтын төртбұрыш"



$$a/в = 0{,}618; \quad \frac{a}{в} = 1{,}618$$

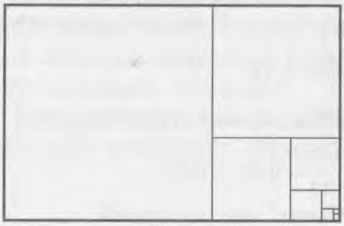
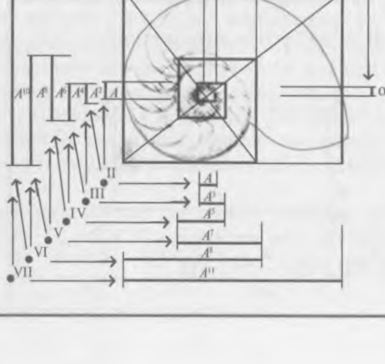
➢ ΔABC – *"алтын үшбұрыш"*

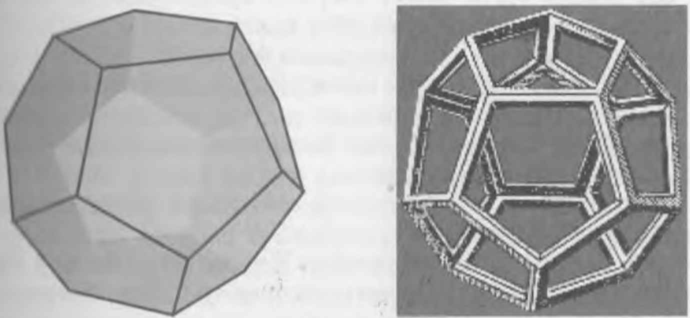


ΔABC пішіні ежелгі Мысыр (Египет) еліне қарасты Гизадағы Микерин пирамидасының бетәлпеттік көрінісі. H – биіктік, L – табаны.

$$\frac{H}{L} = \frac{66{,}4}{108{,}04} \approx 0{,}614$$

ΔABC – Гиза пирамидасындағы *"алтын үшбұрыш"*

➤ *Алтын төртбұрыш және алтын спираль*  *<u>Анықтама.</u> Спираль* деп қозғалыстағы нүктенің сәуле басынан белгілі бір заңдылықпен қашықтай отырып, бірқалыпты айналуынан жасалған жазық сызықты айтады.	➤ *Алтын спираль және Рафаэль суреті*  Рафаэль Санти (1483—1520) — Италия суретшісі әрі сәулеткері. Оның *"Сәбилерді соққыға жығу"* ("Избиение младенцев") деген суреті *"Алтын пропорция"* және *"Алтын спираль"* заңдарына сүйеніп салынған (А.И.Прохоров. Золотая спираль. — "Квант" журналы. М., 1970, № 9. 15—17, 33-беттер.
➤ *Алтын спираль* 	➤ *Теңіз иірмек қабыршағы*  



Әр жағы алтын бесбұрыштан (дұрыс бесбұрыштан) жасалған дұрыс он екі жақ (додекаэдр)

Алтын бесбұрыш және оның адам бейнесіндегі түп нұсқасы

Ж ү м а ш. Алдын ала әзірленген кесте-дайындамаларда атап көрсетілген *"Алтын пропорция", "Алтын сандар", "Алтын пішіндер"* және *"Алтын дүниеліктер"* атаулының баршасы 2000 жылдам астам уақыт бойы қолданыста болған Евклид есебінен туындағанын айқын аңғаруға болады. Осыншама ұзақ ғұмыр жасайтындай Евклид есебінің не кереметі бар?

М е н. Есептің өзі керемет болмағанымен, не бір ғаламат нәрселер сол есеппен астасып жатыр.

Ж ү м а ш. Қызық әңгіме жаңа басталмаса игі еді!

М е н. Жоқ! Әңгіме осымен бітейін деп тұр, өйткені, Жұмаш, біздің кететін уақытымыз болды. Серік екеуміз сағат 12^{00}-де киноға кірмекпіз. ***(Серікті шақырып алып кетуге бет алдым.)***

Ж ү м а ш. Қабеке...

М е н. Немене?

Ж ү м а ш. Әлгі әңгімеңізді маған шынымен айтпайсыз ба?

М е н. Неге айтпайын, айтам, айтқанда саған айтам, өйткені бұл әңгіме сен сияқты сурет, сәулет өнерімен әуестенушілерге аса қажет. Оны естігің келсе, кешке біздің үйге соқ.

Ж ұ м а ш. Барамын, Қабеке, сөзсіз барамын.

М е н. Айтқандайын, менің саған бір бұйымтайым бар екен ғой.

Ж ұ м а ш. Қандай, айтыңыз.

М е н. Мына Серік саған бір бесжұлдыздың суретін салдырып бер деп көптен мазалап жүргені.

Ж ұ м а ш. Е, ол қолдан келеді ғой. Қалай, бояп салайын ба, үлкендігі қандай болсын?

С е р і к. Боямай-ақ салыңыз, Жұмаш аға. Дәптер бетінің жартысын алатындай етіп, қарындашпен сызсаңыз болғаны, тек әдемілеп салыңыз.

Ж ұ м а ш. Тырысып көрермін.

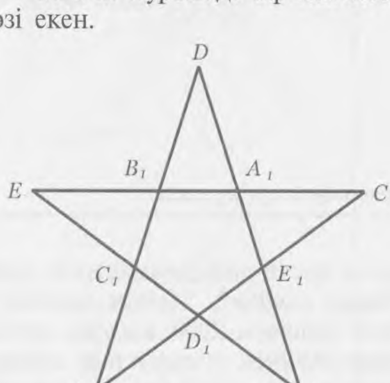
Біз шығып кеттік.

* * *

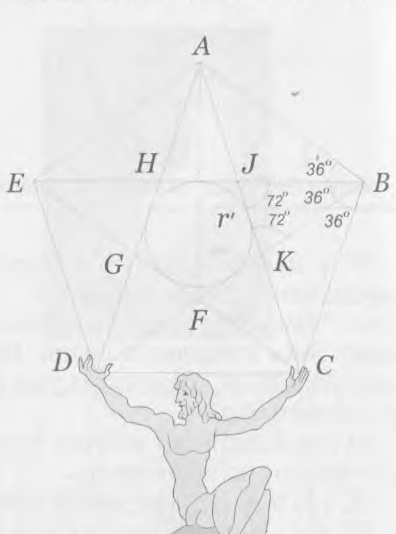
Жұмаш сол күні кешкі сағат 7-де біздікіне келді. Келе салысымен салған бесжұлдызын көрсетті. Мен оның суретін көрсетілгендей етіп белгілеп шықтым *(11-сурет)*.

Сонан соң әңгімемізді қайта жалғадық.

М е н. Суретінде бір мін жоқ. Құдды алтын қималы жұлдыздың өзі екен.



11-сурет



12-сурет

"Алтын қималар", "Алтын кесінділер" және "Алтын бұрыштар" кескіндемесі

* * *

Ж ү м а ш. Мұның алтын жұлдызға ұқсауы ғажап емес, өйткені оны сызғанымда Еңбек Ерлері омырауға тағатын кәдімгі алтын жұлдыз елестеп тұрған. Мен тек сіздің бұл суретті алтын қималы жұлдыз дегеніңізге таңырқап отырмын. Әлде Сіз “Алтын құймалы жұлдыздай екен” демекші болған шығарсыз, не мен қақас естідім бе екен?

М е н. Мен де қате айтқан жоқпын. Сен де қақас естімедің. Бұл жұлдыздың алтын қималы екені шүбәсыз.

Ж ү м а ш. Ендеше түсіндіріңіз. Бұл суреттің алтын қималы жұлдыз деп аталуына қандай негіз бар?

Мен күні бұрын әзірлеп қойған циркуль мен сызғышты Жұмашқа бердім де, чертеждегі B_1 нүктесінің АД мен B_1A кесінділерін орта және шет қатынаста бөлетіндігіне өлшетіп есептете отырып көз жеткіздім, яғни Жұмашқа мына қатынастардың орындалатынын тексерттім:

$$\frac{AB_1}{AД} = 0{,}6 \quad \text{және} \quad \frac{B_1Д}{B_1A} = 0{,}6.$$

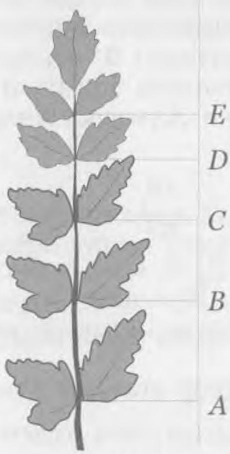
Қалған C_1, $Д_1$, E_1 және A_1 нүктелерінің де B_1 нүктесіндей қасиетке ие болатынын Жұмаштың өзі-ақ аңғарды. Бұдан кейін Жұмашқа өзім бұрыннан жиыстырып, реттеп жүретін бірнеше суреттерді біртіндеп көрсетіп шықтым. Олардың бәрінде де $\frac{AC_1}{AB_1} = 0{,}6$ болатынын Жұмаштың өзіне өлшете отырып тапқыздым. Сонан кейін әңгімеге қайта кірістім.

М е н. Жұмаш, әлгі өзіміз қарастырып өткен суреттердің қай-қайсысы болмасын көз тартарлық әдемі, келісті-ақ нәрселер емес пе?! Олардың ішінде сәулет өнерінің не бір таңдаулылары — сұлу тұлғалы адам мүсіні, қыл аяғы өзіміз күнде тұтынып жүрген кітап пен конверттің дұрыс формалы (пішінді) дегендері таңдалып алынған. Олардың қатарында өзің Серікке деп салып келген бесжұлдыздың бейнесі де бар. Міне, осы тамаша суреттердің баршасына бірдей тән, ортақ бір математикалық заңдылық барын өзің де аңдаған шығарсың. Атап айтқанда, олардың күллісі белгілі белгілі бір нүктелерінде орта және шет қатынаста бөлінеді. Осы заңдылықты сақтап салынған сурет, сәулет өнерінің туындылары адамның көзіне әсем, тартымды болып көрінетіндігі ертеден байқалған. Осымен байланысты кесіндіні орта және шет қатынаста бөлетін нүктені орта ғасырларда өмір сүрген ұлы суретші, механик және математик *Леонардо да Винчи* (1452—1519) және оның шәкірттері мен ізбасарлары *“алтын қима” (золотое сечение)* немесе *“тәңірлік қима” (божественное сечение)* деген бейнелік айшықты сөзбен атаған. Осыған сәйкес кесіндіні орта және шет қатынаста бөлу есебін шешу үшін құрылған пропорцияны “*алтын пропорция*” дейді. 11-суреттегі салынған A_1, B_1, C_1, $Д_1$, E_1 нүктелердің әрқайсысын *“алтын нүктелер”* дейміз, ал сол бесбұрышты *“алтын көпбұрыш”* деген бейнелі сөзбен атайды.

Адам денесінің құрылысында, өсімдіктер дүниесінде алтын қима көп кездеседі *(13, 14-суреттер)*. Олардағы С нүктелерінің бәрі “алтын қима” болып саналады. Мына жұлдызыңды мен “алтын қималы” деп атауымның сыры, міне, осымен байланысты.

Кесіндіні орта және шет қатынаста бөлетін нүкте нәрсенің әсем болып көрінуінің бір шарты екендігін адам баласы өте ертеден-ақ аңғарып, оны сондай-ақ өз қажетіне жарата білген.

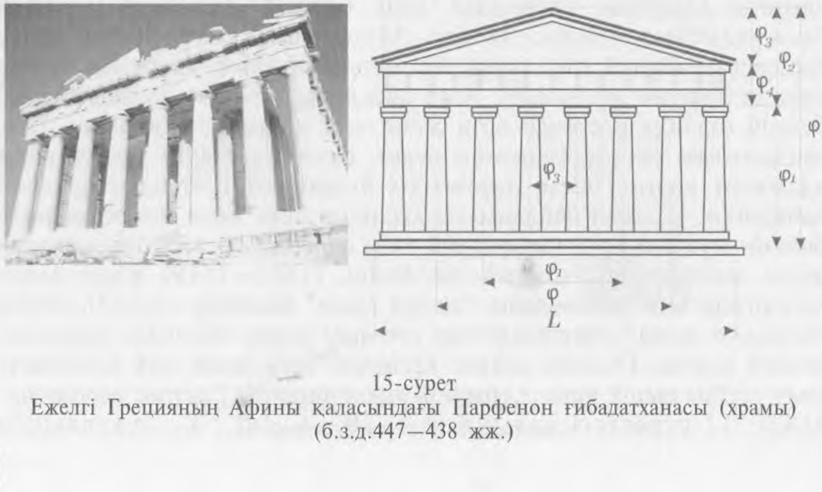
13-сурет



14-сурет

М е н. Сен мына бір суретті білесің бе?

Ж ұ м а ш. Бұл – ертедегі Грецияның Афины қаласындағы Парфенон ғибадатханасы (храмы) ғой *(15-сурет)*.



15-сурет
Ежелгі Грецияның Афины қаласындағы Парфенон ғибадатханасы (храмы) (б.з.д.447–438 жж.)

М е н. Дұрыс. Біздің эрамызға дейінгі V ғасырда (б.з.д. 447—438 жж.) салынған бұл тамаша сарай сол заманғы архитектураның шыңы дерлік.

Парфенон (грекше: parthenos — әулие ана) — Афиныдағы Афина Парфенос құдайана ғибадатханасы. Ол ежелгі грек өнерінің тамаша ескерткіші Парфенон мәрмәр тастан тұрғызылған сәулет өнерінің ғибадатханасы — афиндік Акропольдегі ең тамаша ғимарат. Парфенондай сәулетті сарайлар үшін сол кездегі Афиныны былайша дәріптейді екен:

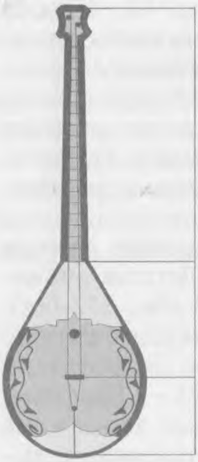
"Егер де сен Афиныда болмасаң, түйемен бір есепсің, ал онда бола тұрып таңданбасаң, барып тұрған есексің" (Детская энциклопедия. М.: АПН РСФСР. 1959. I басылым, 10-том, 372-бет). Парфенон храмындағы тіреулер ұзындығы оның жалпы биіктігіне қатынасы 0,6 болатындай етіп алынған. Осы қатынас Парфенонның қалған өлшеулері үшін де сақталынып отырған. Бұл — Парфенон храмын салушылардың алтын қима заңын жақсы біліп пайдаланғандығының бір айғағы.

16-сурет

Ал мына бір сурет *(16-сурет)* — сол ертедегі гректер заманындағы мүсін өнерінің бір бетке ұстары, сымбаттылық құдайы саналған Аполлон Бельведерский мүсіні. Мұнда да алтын қима заңы кең пайдаланылғаны көрініп тұр (мұнда E, O нүктелері — алтын қималар).

Алтын қима заңы музыкада да мықтап орын тепкен. Мәселен, ұзындықтарының қатынасы 0,6-ға жуық болатын шектердің құлаққа жағымды, сазды дыбыс шығаратындығы немесе музыканттар тілімен айтсақ, гармоникалық аккорд беретіндігі тәжірибе жүзінде тағайындалған. Тіпті өзің күнде тартып жүрген қазақтың байырғы домбырасына да назарыңды аударшы. Мұнда да алтын қима сақталатын бөліктердің барлығын байқау қиын емес. (Мұндағы алтын қималар *B* және *C* нүктелері *(17-сурет)*.

Маған кейде тіпті тұрмыста кең тұтынылатын не нәрсені болсын алтын қима заңына негіздеп жасау адам баласы үшін дағдыға айналған заң боп кеткендей көрінеді. Өйткені тұрмыста қолданылып жүрген көптеген бұйымдар өлшемдерінің қатынастары алтын қиманың өзін не соған жуық шама беретінін байқаймыз. Мына сөреде тұрған кітаптардың деніне, Серіктің қолындағы шоколад плиткасына, киноның билетіне, хат жазатын конвертке т.с.с. барлығына да алтын қимаға негізделген форма беріледі. Басқаша айтқанда, олар енінің ұзындығына қатынасы 0,6 немесе соған жуық болатын тік төртбұрыштар боп келеді.



17-сурет

Табиғатта алтын қима заңының кең орын алуы тіпті жайдан-жай болмаса керек. Қашан да болсын, алтын қима арқылы қиюласқан нәрселердің бітімі көзге әсем, сәнді боп көрінумен қатар, ыңғайлы де берік, бекем болатынға ұқсайды. Алтын қиманың осы бір тамаша қасиетінің анық сырын парықтай түсінбеген кейбір адамдар алтын қиманы теріс уағыздаған. Олар дүниедегі кемеліне келген жақсы нәрсе атаулының күллісі тек қана алтын қимаға негізделеді деп дәлелдемекші болған. Солардың бірі — орта ғасырларда өмір сүрген монах Лука Почиоли алтын қиманы құдайдың өзі жасаған деп түсіндіріп, $\frac{x}{a}=\frac{a-x}{x}$ пропорцияны *"тәңірлік пропорция"* (божественная пропорция) деп атаған. Тағы біреулері алтын қимаға негізделіп жасаған пентограммаларды (қабырғаларына тең бүйірлі үшбұрыштар салынған бес жұлдыздарды) адамды пәле-жаладан сақтайтын қасиетті нәрсе деп түсініп, бойтұмар етіп тағып жүрген.

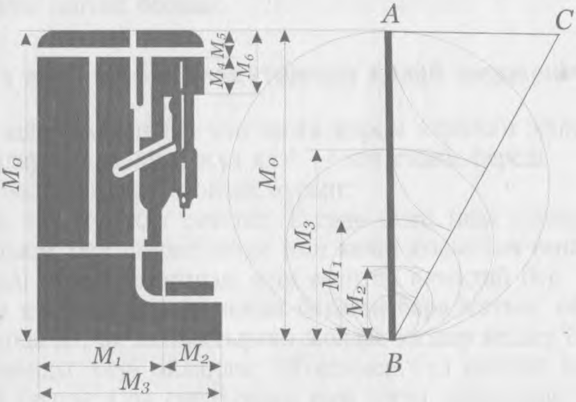
Христиан діниндегілердің молаға қоятын крестерінің қиюластырған нүктесі "алтын қима" болуы керек деп далбасалауы да осындай діни соқыр сенімнен туған. Мұның бәрі, әрине, бос сандырақ.

Алтын қиманың өмірде соншама мол кезігуінің сырын ғылыми жолмен түсіндіруге әбден болатын сияқты. Біз бағанадан бері кесіндіні алтын қимаға бөлуді тек мөлшермен орындап келдік. Анығында, кесінді бойындағы алтын қима болатын нүкте циркуль мен сызғыштың жәрдемімен табылса ғана, кесінді алтын қимаға дәл бөлінеді деп ұғамыз. Кесіндіні осылай етіп екіге бөлуді орындаудың бір жолы мектеп оқулығында баяндалған. 18-суреттегі M_1, M_2, M_3, M_4 т. с. с. кесінділердің бәрі де өзінің алдындағы кесіндімен алтын қима қатынасын жасайды. Басқаша айтқанда, $\frac{M_0}{M_1}\approx 1{,}6$ немесе $\frac{M_1}{M_0}\approx 0{,}6$ сияқты боп келеді. Осы қатынастар және адамның көру арқылы қабылдауының заңдылығы арасында байланыс бар екендігі байқалған.

Біздің жыл санауымыздан екі ғасыр бұрын өмір сүрген грек астрономы Гиппарх жай көзбен көрінетін жұлдыздар жарығын алты басқышқа айырып, шкала жасайды. Қазір фотометр (жарық көзінің күшін өлшейтін құрал) арқылы осы шкаланың әрбір келесі басқышындағы жұлдыздың жарықтығы өзінің алдыңғы басқыштағы жұлдыздың жарықтығынан 2,5 есе артық екендігі тағайындалған. Бұл шкаланы *жарықтылықты қабылдау шкаласы* деп атайды.

Біздің көзімізге көрініп тұрған жұлдыздар (оның ішінде Күн де бар) — жарықтың нүктелік көздері. Ал көз қабылдайтын нәрсенің бәрі соларға жұлдыздардан түсіп, шағылысқан жарықтың шамасы көзімізге көрінетін нәрсенің не оның белгілі бөлігінің ауданына байланысты болады. Егерде тік төртбұрыштың өлшемдері немесе доңгелектердің диаметрлері 1,6 есе кішірейтілсе, онда сол фигуралардың аудандары, демек, жарықтылығы 2,5 еседей азаяды. Сонымен, алтын қима қатынасының жарықтығы қабылдау шкаласымен байланысты екенін көреміз. Шындығында, бұл бір ғаламат шкала. Гиппарх және ертедегі басқа астрономдар сол шкаланы пайдаланып, көзге көрініп тұрған 1000-ға тарта жұлдыздардың жарығын еш қатесіз анықтай алған. Сондықтан машиналарды, білдектерді (станоктарды) *(18-сурет)*, сәулет, сурет өнерлерінің туындыларын, сондай-ақ айналамыздағы табиғи күрделі нәрселердің пішінін "алтын қима" заңына сәйкес келетіндей бөліктерге жіктеп қарағанда шығатын формалар ғана дәл әрі көзге жеңіл, жіті шалынады деген қорытынды жасауға болады.

Табиғатта кездесетін алтын қима да табиғатта айнымай үнемі ұшырайтын тәртіп, барлық математикалық заңдылықтар сияқты, бір заң ғана. Бұл тек "Табиғаттың барлық заңы математиканың тілімен жазылған" деп атақты Галилей айтып кеткен нұсқалы сөздің тағы бір дәлелі секілді. ***(Мен осының бәрін айтып болғанша Жұмаш қыбыр етпей бар зейінімен тыңдап отырды.)***



18-сурет

Ж ұ м а ш. Қабеке, сіз маған тым әдемі әрі тың әңгіме шерттіңіз ғой, одан алған әсерімді жай сөзбен жеткізе алар емеспін.

М е н. Ендеше өлең ғып айт.

Ж ұ м а ш. Олай болса... (*тамағын бір кенеп алды да, дереу мына өлеңді айтып шықты*):

Тілдесер табиғаттың тілі де есеп,
Көз тартар сұлулықтың сыры да есеп,
Аттасаң аяғыңды, алдыңды орап
Алдыңнан қалмайды екен тіріде есеп.

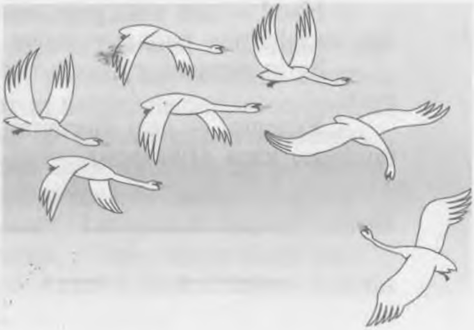
Салған ән, айтылған сөз, ішілген ас,
Космос кораблі, атылған тас,
Аққан су, соққан дауыл, айналған Жер,
Бәрінің заңы есеп екені рас.
Сондықтан табиғаттың сырын терең,
Деушіге оқып, зерттеп білем, көрем,
Демесең болсын егер еңбегім еш,
Әуелі есепті оқып, үйрен дер ем.

Мен Жұмаштың лепірген шабытының шаужайында кетсем керек:

“Алтын қима — алтын сандық кілті ғана,
Әлі талай есеп бар бұдан да ерен”, —

деп ескерте бердім оған ілесе.

Сызба да сеп



Бір қарағанда қарапайым-ақ көрінетін кейбір есептердің шешу жолын тап басып таба алмай, дал болатын сәттер кімге де болса кезігіп отырады. Мұндай дағдарыста математиканың көп оқытушылары шәкірттеріне уағыздайтын “есептеуде сызба да ес” деген нақылды еске алған абзал.

Сызбаларды пайдаланып есеп шешудің үлгісін көрсету мақсатымен, біз төменде бірнеше әңгіме-есептер келтіріп өтеміз. Солардың біріншісі, қазақ арасында да кең тараған “Жүз қаз” есебін шешу туралы әңгіме болмақ.

I. “Жүз қаз” есебін көкқұтанның қалай шешкені туралы[1]

Ұшып келе жатқан бір топ қазға қарсы кезіккен жалғыз қаз:

— Ассалаумағалейкум, жүз қаз! — деп сәлем береді.

Сонда бастаушы қаз мойын бұрып:

— Жоқ, біз жүз қаз емеспіз! Егерде бізге тағы сонша қаз және оның жартысы мен ширегі және өзің келіп қосылсаң ғана жүз болар едік, ал енді нешеу екенімізді өзің есептеп анықтай бер, — дейді.

Жалғыз қаз ары қарай ұшқан бетімен бара жатып, ойға шомды. Шындығында да, ол жолықтырған жолдас қаздар нешеу болды екен? Ол әрі ойланды, бері ойланды, әйткенмен бұл есептің шешуін таба алмай, дал болды. Сол сәтте оның көзі тоған жағасында бақа аңдып жүрген көкқұтанға түсті. Көкқұтан — қалған құстардың арасында “математик” деген даңқы шыққан, маңғаз құс. Кейде сағаттар бойы ойланып, бір аяғымен тапжылмай тұрады. Сірә, есептер шығаратын болар. Қаз қуанып кетті, жалма-жан тоғанға ұшып келді де, көкқұтанның жанына жүзіп жетіп, оған бір топ қазды қалай кезіктіргенін және олардың бастаушысы өзіне қандай есеп бергенін, бірақ ол есепті өзінің шеше алмай, дал екенін айтып шықты.

---

[1] Бұл әңгіме-есеп Б.А.Кордемскийдің “Математическая смекалка” деген кітабында келтірілген нұсқасы бойынша беріліп отыр.

— Ымм! — деп көққұтан жөткірініп алды, — шешіп көрелік, сен тек ыждаһатпен тыңда, түсінуге де тырыс! Естіп тұрсың ба? — деді.

— Естіп тұрмын, түсінуге тырысып бағайын, — деп қаз ынталана түсті.

— Ендеше, — деді көққұтан, — мына жағадағы құмға не сызғанымды қара *(19-сурет).*

19-сурет

Көққұтан мойнын иді де, тұмсығымен бір кесінді және дәл сондай тағы бір кесінді сызып, сонан соң осы кесіндінің жартысындай, онан кейін оның төрттен біріндей және тағы бір кішкене кесінді сызды.

Қаз жүзіп жағаға шықты да, құм үстімен майпаңдай жүріп кеп, суретке қарады, бірақ дым түсінген жоқ.

Көққұтан:

— Түсіндің бе? — деп сұрады.

— Жоқ, әлі, — деді қаз жабырқап.

— Әй, сен-ай! Кәне, ендеше мұнда қара, бастаушы қаз саған: "Егер де бізге тағы сонша қаз және оның жартысы мен ширегі, өзің келіп қосылсаң..." — деген ғой. Сондықтан да мен кесінді, тағы да сондай бір кесінді, оның жартысы мен ширегін әрі мына бір кішкене кесіндіні, яғни сені, сыздым. Ұқтың ба?

— Ұқтым! — деп қаз қуана үн қатты. Егер саған кезіккен бір топ қазға, тағы да сондай бір топ қаз, сол топтың жартысын және оның ширегін, тағы да сені қоссам, қанша болушы еді?

— Жүз қаз!

— Демек, сенсіз қанша болуы тиіс?

— Тоқсан тоғыз.

— Жақсы! Біздің кесінділеріміздің ішінен сені кескіндейтін кішкене кесіндіні шығарып тастап, қалғанын 99 қаз деп белгілейік.

Көққұтан айтқандарын тұмсығымен құмға өрнектеп шықты.

— Енді байқап көрші, — деді көққұтан сөзін жалғап, — үйірдің жартысында неше ширек болады?

Қаз құмдағы сызбаға қарап тұрып ойланды да:

— Топтың жартысын кескіндейтін кесінді топ ширегінің кесіндісінен екі есе ұзын, демек, жартысында екі ширек болуы тиіс, — деді.

— Жігіт екенсің! — деп көққұтан қазға мақтау айтты да: — Сонда топта неше ширек болады?— деп сұрады.

— Әрине, төртеу, — деп жауап қайырды қаз.

— Солай! Егер енді ширекпен топты, тағы да топты әрі топтың жартысын және оның ширегін алмастырсақ, барлығы неше ширек болар еді?

Қаз ойлана тұрып, былайша жауап берді:

— Топ — бұл топтың 4 ширегі деумен бір бәс, тағы топ — бұл да топтың 4 ширегі, бәрі 8 ширек, әр топтың жартысында 2 ширек бар: сонымен, 10 ширек, тағы да топтың ширегі делінген, осылардың бәрі топтың 11 ширегі болады. Бұлар 99 қаздың санын көрсетеді.

— Солай! — деп, көкқұтан қазды тағы құптады да, — сөйтіп, ақырында не қорытындыға келгеніңді айтшы, — деді.

— Мен өзіме кезіккен қаздар тобының 11 ширегі 99 қаздың санына парапар екен деген қорытындыға келдім, — деп жауап берді қаз.

— Ендеше, топтың бір ширегі неше қаздың санына сәйкес келетін болғаны?

Қаз 99-ды 11-ге бөлді де:

— Топтың ширегі 9 қаз болады, — деді.

— Ал тұтас топта неше қаз болмақ?

— Тұтас топта 4 ширек бар. Мен 36 қаз кезіктірген екем ғой, — деп қаз қуана қаңқ етті.

— Міне, есеп шешкенде сызба да сеп болатынын есіңнен шығарма, — деп көкқұтан мойнын соза кекірейіп қойды.

II. Қаз ақылын түлкіден қалай асырғаны туралы

Аң біткеннің патшасы арыстан ағзам ауырып апанында жатқан еді. Көңілін сұрай түлкі келеді. Келе арыстанның асты-үстіне түсіп, халін сұрап, тамырын ұстайды. Артынан қатты мұңайған кейіп білдіріп, мүләйімсіген үнмен:

— Тақсыр, ауруыңыз астан екен, асқындырып ала көрмеңіз. Тамақты талғап ішіңіз. Мұндайда көжек жылбысқасынан жасалған сырбоз бен құс балапанының жұмсақ еті мыңда бір дауа, — деп бұлаңдайды.

Арыстан түксиген түкті қабағын бір түріп, аз ыңыранды да, түлкіге былайша гүр етті:

— Бар онда, қояндар мен құс атаулыға менің жарлығымды жеткіз. Тұқымы тұтастай түгесіліп қалмас үшін әр қоян бір ұрғашы, бір еркек көжектен, ал құстар бір-бір мекиен мен қораздан ғана алып қап, биылғы төлдерінің қалғанын маған жеткізіп беретін болсын.

Бұл жарлықты естіген түлкіекең жылмаңдап, күлмің қақты. Құс етіне құныққан қу, арыстанның әмірін орындай жүріп өзім де олжа түсірем деп мәз. Бұлаң-сылаң жүрісімен түлкі жолға шықты. Ел құлағы елу ғой, патша жарлығымен түлкі келе жатқанын естіген құстар мен қояндар бұл өңірден ақ табан боп шұбырып ауа бастайды. Көжектері көзін жаңа ашқан бір көкше қоян мен балапанының қанаты қатпаған қоңыр қаз ғана жұртта қалады.

"Әр құстың өз алдына жемі бар", дегенмен "басқа түссе баспақшыл", қоян мен қаз төлдерімен өзен бойындағы үңгірге кеп, бірге паналауға мәжбүр болады. Осы сәтте оларға суман етіп түлкі де жетеді. Түлкіні көрісімен қорқақ қоян үңгірге зып береді де, үңгір аузында қаздиып қаз қалады.

Түлкі қазға патша әмірін паш еткен соң, үңгірде неше көжек, неше балапан барын айтып, әмірде көрсетілгеннен артығын алдыма сал деді.

Қаз қаздиған қалпын бұзбай, аз-кем ойланып тұрып:

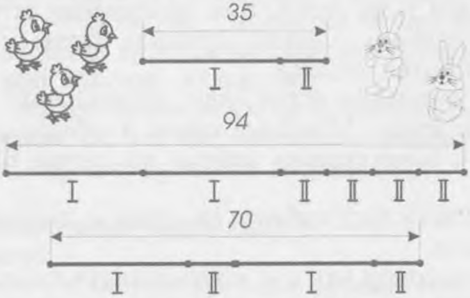
— Арыстанға азық етіп беретін артық төліміз жоқ. Егер оған барып шағынып, жағынам десең:

Түлкісің аярлыққа бермейтін дес,
Көрейік қанша сенде ақыл мен ес.
Балапан, көжек санын өзің тапқын,
Аяқтары тоқсан төрт, басы отыз бес, —

дейді де, үңгірге еніп, есігін таспен бекітіп алады. Ұсақ-түйек қулық, сұмдыққа болмаса, тапқырлық ойға орашолақ түлкі қаз есебінің қалай шешілетінін білмейді. Қаз осылай есеп айтып еді, мен оны шеше алмадым деп арыстанның алдына баруға тағы дәті шыдамайды. Сөйтіп, "қап, қаңқылдаған қаздың ақылын асыруын-ай" деп қапаланған сол түлкі әлі күні құр бекерге жортып жүр дейді.

Есеп шығарғанды сүйетін достар, енді қаздың осы есебін сызбаларды пайдалана отырып біз шешіп көрелік.

Айталық, I кесінді барлық балапандар, II кесінді барлық көжектер санын кескіндесін *(20-сурет)*.



20-сурет

Есеп шарты бойынша бұлардың қосындысы 35-ке тең. Балапандар аяқтарының саны балапандардың өз санынан екі есе, ал көжектер аяқтарының саны — көжектердің өз санынан төрт есе көп. Сондықтан да I кесіндіні екі есе, ал II кесіндіні төрт есе ұзартамыз, олардың қосындысы есеп шарты бойынша 94-ке тең. Бірінші кесіндіні екі есе ұзартып, яғни үңгірде кілең балапан болған деп ұйғарып, екінші кесіндінің астына келтірелік. Сонда екінші кесінді бұл шыққан кесіндіден артық болады ($94 - 70 = 24$). Ал осы 24-те II кесіндінің екеуі, яғни екі еселенген көжек саны бар екені суреттен айқын көрінеді. Сондықтан үңгірде $24 : 2 = 12$ көжек бар дейміз.

Ендеше, үңгірдегі балапан саны $35 - 12 = 23$ болғаны.

III. Желі басында шешілген есеп

Түскі сауыны аяқтала бергенде ферманың бұзаулары жамырап кетті. Оған кінәлі осындағы сауыншы шешесіне көмектесіп жүрген V сынып оқушысы Айтқали болатын. Ол шешесі Зейнепке жазғы каникулда шешу үшін мұғалімі тапсырған бір есептің шешуін ойлап жүріп, бұзау қораның есігін бекітуді ұмытып кеткенін мойындады. Баласының жалған айтпайтынына көзі анық жетсе де, шешесі Айтқалидың бұл аңғалдығын аяқсыз қалдырмай, екіншіде ұмытпау үшін оған қайткенде бір жаза қолданбақшы болды.

Кезінде, V сыныпта алдыңғы қатарлы оқушылардың бірі боп оқып жүрген шағында, соғыс басталып кетіп мектептен қол үзіп қалған Зейнеп балаларына түрлі жұмбақ, жаңылтпаш, қызықты есептер құрап айтуға да шебер болатын. Бұл жолы да сол машығына бақты ма әлде Айтқалидың "есеп шешуін ойлап жүріп..." дегені қамшы болды ма (ата-ана балаға сыншы дейді ғой, баласын қаншалықты есепші екенін сынап көрейін деген шығар), әйтеуір Зейнеп баласының кінәсін кенет ойына келе қалған бір қызықты есепті шығартып өтетпекші болды. Сөйтті де ол түсін суытқан қалпын бұзбастан:

— Сенің сауын арасындағы әредікте ойын бақпай, есіл-дертің есепте жүретіні рас болса, бір есеп айтам, соны шығар, — деді.

Бағанадан қандай жаза тартар екем деп жабырқап тұрған Айтқали:

— Құп, апа, құп, — деп бұлттан шыққан күндей жайраң қақты.

Зейнеп желі басында тұрған үлкенді-кішілі екі бидонды нұсқап тұрып мынадай есеп айтты:

— Міне, мыналар — күнде мен сүтке лық толтыратын бидондар (қасында тұрған екі бидонды көрсетеді). Мұның үлкені кішісінен екі есе ішті. Бүгін сенің бұзау жамыратқан кесіріңнен әр бидонға сүт күндегіден 20 литр кем құйылды. Дегенмен үлкен бидондағы сүт, кішісіндегіге қарағанда, үш есе көп. Әр бидонға неше литрден сүт құйылғанын анықта.

Айтқали шешесінің есебін бар ынтасын сала тыңдап, мұқият ұғып алды. Сонан соң желі басындағы таптаурыннан аяғымен ысырып тоқымдай жерді тазартып алды да, сол тақырға шыбықтың сынығымен мынадай кесінділер сызып, әріптермен белгіледі *(21-сурет)*. Сонан соң кесінділерді қолындағы шыбығымен түрткілей тұрып, біраз күбірлей сөйлеп ойланды да:

— Апа, есебіңіздің жауабын айтайын ба? — деді.

— Асықпа, Айткеш. Есептің жауабын жалаң айта салғаның сенің есепші екеніңді көрсетпейді. Мына сызбаларыңмен есепті қалай шешкеніңді маған ұғындырып бере алсаң, нағыз есепкер болғаның, — деп шешесі Айтқалидың тақырдағы суретіне сүйсіне, бар ықыласымен қарап тұрды.

Шешесінің ашуы тарқағанын аңғарып, арқасы кеңіген Айтқали да мүдірмей сөйлеп кетті. Ара-тұра шыбығының ұшымен тақырға жазып та қояды.

— Айталық, *АВ* мен *СД* кесінділері бидондар толы кезіндегі сүттің шамасы болсын. Сонда, өз айтуыңыз бойынша, *АВ* кесіндісі *СД*-ден екі есе ұзын болуы тиіс. $АВ = 2СД$ немесе $ЕА = ВЕ = ДС$ деп жазуға болады. *ВТ* мен *ДМ* кесінділері бұзаулардың жамырауы себепті бидондарға құйылмаған сүттің мөлшерін көрсетсін, яғни:

$$ВТ = ДМ = 20\ (л) \qquad (1)$$

Сонда *ТА* мен *МС* кесінділері бидондарда қазіргі бар сүттің мөлшерін көрсетеді. Өзіңіздің көрсетуіңіз бойынша, *ТА* кесіндісі *МС*-ден үш есе ұзын болуы тиіс. Демек, $ТА = 3МС$.

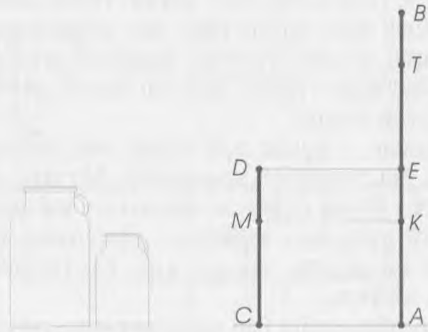
$$ТЕ = СМ \qquad (2)$$

екенін байқау қиын емес, өйткені бұлар әу баста өзара тең деп алынған *ВЕ* мен *ДС* кесінділерінен $ВТ = ДМ = 20$ *л* болатын кесінділерді алып тастағанда қалып отыр.

Өзара тең шамалардан бірдей шамалар алынса, қалған шамалар тең болатыны анық.

Енді $ТА = 3МС$ кесіндіден *МС*-ға тең *ТЕ* кесіндісі алынып тасталса, $ЕА = 2МС$ болады.

ЕА-ның бойына *DM*-ге тең *ЕК* кесіндісін салайық. Сонда $КА = МС$ (3) болатыны 21-суреттен айқын көрінеді.



21-сурет

Ең ақырында, $ЕА = 2МС$ кесіндіден *МС*-ға тең *КА* кесіндісі алынып тасталса, $ЕК = МС$ (4) болатынын көреміз. (1), (2), (3) және (4) теңдіктерді салыстырып, $МС = ТЕ = КА = ЕК = ДМ = 20$ (*л*) деп жазуға болады.

Демек, сіздің кіші бидоныңызда қазір $МС = 20$ (*л*), ал үлкен бидоныңызда $ТА = 3МС = 3 \cdot 20 = 60$ (*л*) сүт бар. Дәл солай ғой, апа, ә!

— Ақылыңнан айналайын, зерегім, — деп Зейнеп баласының басынан сипады.

IV. Ньютонның есебі

Ағылшынның асқан кемеңгер математигі және физигі Исаак Ньютон (1642–1727) "Ғылымдарды оқып үйренгенде ережелерден гөрі есептер пайдалырақ" деп жазып, өзі осы қағиданы берік ұстанған. Өзінің "Жалпылама арифметика" ("Всеобщая арифметика") атты кітабында теориялық нұсқаулармен қатар, оқушыны жаттықтыруға толып жатқан есептер келтіреді. Сол жаттығулардың ішінде мынадай бір есеп бар (дәлірек айтқанда, Ньютон кітабындағы есеп осы есептің шығуына негіз болған).

Есеп. Жайылымдағы шөптің қалыңдығы да, өсу жылдамдығы да бірдей. Сол жайылымның шөбін 70 сиыр 24 күнде, ал 30 сиыр 60 күнде жеп тауысады. Осы жайылымның барлық шөбін 96 күннің ішінде неше сиыр жеп тауысар еді?

Бұл есепті шешпек боп жұмылған екі оқушының — Әуесбек пен Тапқырбектің арасында мынадай әңгіме болады.

Ә у е с б е к. Меніңше, есептің шартында қате бар.

Т а п қ ы р б е к. Неге олай ойлайсың?

Ә у е с б е к. Өйткені мұнда ақылға мүлде сыймайтын қисынсыздық көп. Егер 24 күнде 70 сиыр жайылымның барлық шөбін жеп тауысатын болса, онда неше сиыр оны 96 күнде жеп бітірер еді? 96 саны 24-тен 4 есе артық, ендеше сиыр саны 70-тен сонша есе аз болуы, басқаша айтқанда, 70-тің $\frac{1}{4}$ бөлігі, яғни $17\frac{1}{2}$ сиыр болуы тиіс. Жарты сиыр бола ма екен? Тағы бір қисынсыздық мынадай: 30 сиыр жайылымның шөбін 60 күнде жеп бітіреді. Соны 90 күнде неше сиыр жеп тауысады? Мұнысы жоғарыдағыдан да өрескел: $18\frac{3}{4}$ сиыр.

Оның үстіне, егер 70 сиыр шөпті 24 күнде бітірсе, онда 30 сиыр оны, есептің шартында айтылғандай, 60 күнде емес, $\frac{70}{30}\cdot 24 = 56$ күнде бітірер еді.

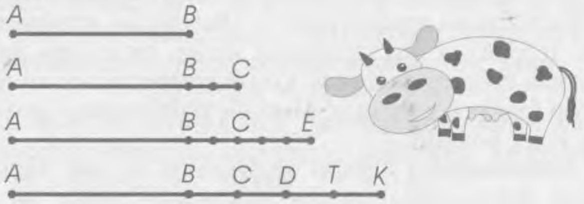
Т а п қ ы р б е к. Жайылымдағы шөптің ұдайы өсіп тұратынын сен ескердің бе?

Ә у е с б е к. Ымм!...

Т а п қ ы р б е к. Мен саған енді бұл есепті шешудің бір оңай жолын баяндап көрейін[1]. Алдымен бір сиырдың бір күнде жейтін шөбінің шамасын *пәйек* деп атауға келісеміз. Енді бірнеше кесінділер сызып, олардың әрқайсысы нені кескіндейтінін айтып шығайын *(22-сурет)*. *AB* жайылымның алғашқыдағы шөбінің мөлшері, *BC* — 24 күнде өскен шөптің шамасы. $BC = 2 \cdot 12$. $BE = 2 \cdot 24 + 12 = 60$ күнде

[1] Я. И. П е р е л ь м а н. "Қызықты алгебра" (қазақша басылымы, 1960 ж.) атты кітапта бұл есептің алгебралық жолмен (теңдеу құру жолымен) табылған шешуі бар.

өскен шөптің шамасы. $BK = 4 \cdot 24 = 96$ күнде өскен шөптің шамасы. 24 күнде 70 сиыр $AC = 24 \cdot 70 = 1680$ пәйек жеп тауысады. Бұған жайылымдағы шөптің алғашқы мөлшері AB және оның 24 күндегі өспесі BC енеді.



22-сурет

60 күнде 30 сиыр $AE = 60 \cdot 30 = 1800$ пәйекті тауысады. Екі жағдайда да жайылымдағы шөп түгел желінетіндіктен, екінші жағдайда артық шыққан $DE = 1800 - 1680 = 120$ пәйек жайылымдағы шөптің $60 - 24 = 36$ күндегі өспесінен пайда болған. Демек, жайылымдағы шөптің 24 күндегі өспесі $BC = CD = \frac{2}{3}$, $CE = \frac{2}{3} \cdot 120 = 80$ пәйек болады. Ендеше, жайылымның алғашқы шөбінің мөлшері $AB = AC - BC = 1680 - 80 = 1600$ пәйек болғаны. $4 \cdot 24 = 96$ күн болатындықтан, жайылым шөбінің 96 күндегі өспесі $BK = 4 \cdot BC = 4 \cdot 80 = 320$ пәйек екендігі шығады. Онда 96 күн бойы бір табын сиырға азық болатын жайылым шөбінің $AK = AB + BK = 1600 + 320 = 1920$ шамасы пәйек болуы тиіс. Бұл табын күніне $1920 : 96 = 20$ пәйек жейді. Демек, табында 20 сиыр болғаны. Енді ұқтың ба, Әуес?

Ә у е с б е к. Ұқтым. Есептің шешуі кесінділерден-ақ көрініп тұр ғой.

Т а п қ ы р б е к. Оның рас.

V. Л.Н.Толстой есептері жайында

"Соғыс және бейбітшілік" сияқты тарихи романның авторы Л.Н.Толстой Қазан университетіне түсу үшін алғаш емтихан тапсырғанда география мен тарихтан "өте жаман" деген баға, ал математикадан "жақсы" деген баға алады.

Лев Николаевич — арифметиканы математиканың әліппесі деп ұққан адам. Өзінің ата мекені Ясная Полянада шаруа балаларына арнап ашқан мектебінде оқитын балаларға арнап жазған "Әліппе" ("Азбука") атты кітабы бұған айғақ. Бұл кітаптың тұтас бір бөлімі арифметикалық есептер мен оларды шешу жолдарына арналған.

Л.Н.Толстой өз балаларына, келім-кетім қонақтарына қызықты есептер айтып, олардың шешу жолдарын әңгімелей отыруды аса ұнататын болған.

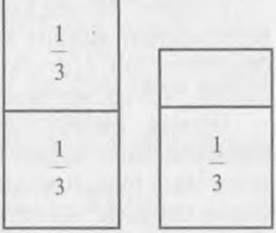
Біз Лев Николаевичтің өзі ерекше ұнатқан екі есебін келтірейік деп отырмыз.

Бірінші есебі. (Бұл есепті Л.Н.Толстойға атақты физик А.В.Цингердің әкесі айтқан.)

Шалғышылардың артелі біреуі екіншісінен екі есе үлкен екі шабындық жерді шауып бітірулері керек еді. Тұтас артель үлкен шабындықты жарты күн ішінде шапты. Содан кейін артель екі топқа қақ бөлініп, бір тобы үлкен шабындықта қалып, оны кешке дейін шауып бітіреді, ал екінші тобы кіші шабындыққа түсіп, оны кешке дейін шапқанмен, біраз жерін бітіре алмады. Ертеңінде бір шалғышы сол қалған жерді күні бойы шауып шықты. Артельде неше шалғышы болған?

Шешуі. Шабындық жерлерді тік төртбұрыштар арқылы кескіндейік *(23-сурет)*. Үлкен шабындықты шауып бітіру үшін күннің бірінші жартысында тұтас артель, ал екінші жартысында артельдің тең жартысы ғана жұмыс істеген. Басқаша айтқанда, артельдің жарымы үлкен шабындықты шауып бітіру үшін $\frac{1}{2}$ күннен үш рет жұмыс істеуі керек болар еді. Сондықтан артельдің жартысы жарты күнде үлкен шабындықтың $\frac{1}{3}$ бөлігін шапқан болады.

Кіші шабындық үлкен шабындықтың жартысына тең. Артельдің жартысы күннің екінші жартысында үлкен шабындықтың $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ бөлігіне тең жерді шауып үлгірмеген. Есептің шарты бойынша бұл қалдықты жалғыз шалғышы бір күнде бітіруі тиіс. Осыдан артельдің бір шалғышысы күніне үлкен шабындықтың $\frac{1}{6}$ бөлігіне тең жердің шөбін шауып бітіретінін көреміз.



23-сурет

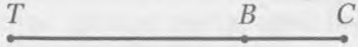
Тұтас артель бір күнде үлкен шабындықты түгелдей және кіші шабындықтың үлкен шабындықтың $\frac{1}{3}$ бөлігіне, яғни $\frac{2}{6}$ бөлігіне тең жерін шапқан. Демек, артель бір күнде үлкен шабындықтың $1+\frac{2}{6}=\frac{6}{6}+\frac{2}{6}=\frac{8}{6}$ бөлігіне тең жердің шөбін шауып бітірген.

Бір шалғышы күніне үлкен шабындықтың $\frac{1}{6}$ бөлігін шауып бітіретін болғандықтан, бір күнде үлкен шабындықтың $\frac{8}{6}$ бөлігін шауып тауысу үшін 8 шалғышы қажет екендігі өзінен-өзі айқын. Олай болса, шалғышылар артелінде 8 адам болғаны.

Екінші есебі. (Бұл есеп Л.Н.Толстойдың өз "Әліппесінен" сәл өзгертіліп алынған.)

Бір шаруа ертеңгі сағат 5-те Туладан Мәскеуге қарай жаяу шықты. Күндізгі сағат 12-де Туладан Мәскеуге қарай бір мырза аттанды. Шаруа әр сағатта 5 шақырым, ал мырза 12 шақырым жер жүреді. Өзі аттанғаннан кейін неше сағат өткенде және Туладан қанша шақырым жерде мырза шаруаны қуып жетеді?

Шешуі. *TB* кесіндісі шаруаның мырза аттанғанға дейінгі, ал *BC* оның мырза қуып жеткенше жүретін жолы болсын *(24-сурет).*



24-сурет

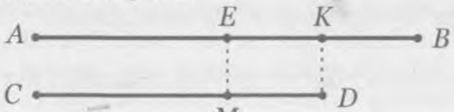
Мырза аттанғанша шаруа жолда 12 − 5 = 7 сағат жүреді, демек ол мырза жолға шыққан сәтте Туладан 5 · 7 = 35 *км* жерде болады (*TB* = 35 *км*). Мырза шаруаны қуып жетуі үшін ол осы *TB* = 35 *км* жолды ұтуы керек. Мырзаның оған мүмкіндігі бар, өйткені ол сағат сайын шаруадан 12 − 5 = 7 *км* артық жүреді. Басқаша айтқанда, әр сағат сайын мырза шаруаға 7 километрдей жуықтай түседі. Мәселен, бір сағатта 7 *км*, 2 сағатта 14 *км* т.с.с. жақындай береді. Осыдан өзі аттанғаннан кейін 35 : 7 = 5 сағат өткенде мырзаның шаруаны қуып жететінін көреміз. Мырзаның әр сағатта жүретін жолы 12 *км* болғандықтан, 5 сағатта ол 12 · 5 = 60 *км* жол жүреді. Демек, Туладан 60 шақырым жерде мырза шаруаны қуып жеткен болады.

Өзің де сызып, ойлан!

Төмендегі есептер, жоғарыда әңгімеленгендей, кесінділер (чертеж) арқылы оңай шешіледі. Әрі ертегі, әңгіме ғып айтуға да оңтайлы есептер. Сондықтан олардың шешуін табуды және есептің мазмұнына қарай келістіріп әңгіме құрауды, оқырман, өзіңе тапсырып отырмын.

1-есеп. Менің қазіргі жасымның бірінші жартысына сенің жасың теңескеннен кейінгі сенің жасаған жасың менің жасымның қалған бөлігінен екі есе кем. Екеуіміздің қазіргі жасымызды тұтас алып қоссақ, 63-ке тең болады. Әрқайсымыз сонда нешеде болдық?

Нұсқау. Менің қазіргі жасымды — *AB*, ал сенің жасыңды *СД* кесінділерімен сызып көрсетелік *(25-сурет).* Сонда *EB* кесіндісі бұдан неше жыл бұрын менің жасым сенің жасыңа тең болғанын көрсетеді. Сенің сондағы жасың *СМ.* Енді есептің шарты бойынша *AB* кесіндісі *СМ*-нен екі есе үлкен болатынын, сондай-ақ *EB* кесіндісі *МД*-дан екі есе артық екенін ескереміз.



25-сурет

Ж а у а б ы. Мен 36 жастамын, сен 27-де болдың.

2-есеп. Екі балықшының біреуі 3 балық, екіншісі 4 балық ұстап алып, оны пісіреді. Оларға үшінші бір кісі табақтас болып, сорпаны тең бөлісіп ішеді. Бейтаныс адам 70 теңге ақша төлеген. Сол ақшаны екі балықшы неше теңгеден бөлісуі тиіс?

Нұсқау. Балықшының ұстап алған әр балығын бірлік кесіндімен өрнектейміз. Сонда өзара тең 7 бірлік кесіндіден тұратын АВ кесінді шығады. Мұндай кесінді 3-ке қалдықсыз бөлінбейді. Сондықтан әрбір бірлік кесіндіні тең үш бөлікке бөлеміз. Нәтижесінде $3 \cdot 7 = 21$ ұсақ үлес кесінді шығады.

Бірінші балықшының үш балығы — 9 үлеске, ал екінші балықшының 4 балығы 12 үлеске сәйкес келеді. Сорпаны үш адам тең бөліп ішкендіктен, олардың әрқайсысына барлық балықтың 7 үлесі тиесі болады.

Ортақтас адамға бірінші балықшыдан $9 - 7 = 2$ үлес, ал екінші балықшыдан $12 - 7 = 5$ үлес тиесі болады. Сөйтіп, бөгде адамға да $2 + 5 = 7$ үлес тиеді.

Бір үлеске тиесі сорпаның бағасы 70:7=10 теңге. Олай болса бейтаныс адамның берген 70 теңгесінің бірінші балықшыға $2 \cdot 10 = 20$ теңгесі, ал екінші балықшыға $5 \cdot 10 = 50$ теңгесі беріледі.

Ж а у а б ы. Бірінші балықшыға 20 теңге, екінші балықшыға 50 теңге.

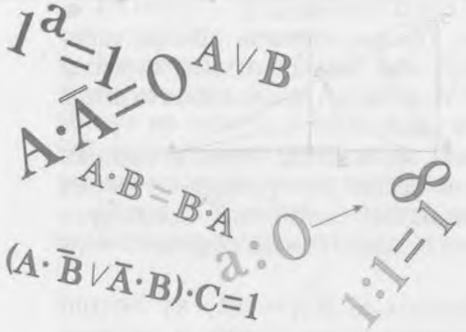
3-есеп. Бір бөшкеде 48 шелек, ал екінші бөшкеде 22 шелек керосин бар. Бірінші бөшкеден екіншісінен құйылып алынатын керосиннен гөрі, екі есе көп керосин құйылып алынған. Сонда бірінші бөшкеде екіншідегіден үш есе көп керосин қалады. Әр бөшкеден қанша шелек керосин құйылып алынды?

Ж а у а б ы. Бірінші бөшкеден 36 шелек, екінші бөшкеден 18 шелек.

А.П.Чеховтың есебі. Көпес 540 сомға 138 кез қара және көк мауыт сатып алды. Көк мауыттың кезі 5 сом, қара мауыттың кезі 3 сом болса, ол мауыттың әрқайсысынан неше кезден алған болады? (Бұл есеп А.П.Чеховтың “Репетитор” атты әңгімесінде келтірілген. Онда 7-сынып оқушысы Зиберов 12 жастағы Петя дейтін балаға осы есепті шығарып бере алмай, күлкі болады.)

Нұсқау. Бұл есепті “Жүз қаз” есебін шешкендегідей пайымдаумен шешуге болады.

Ж а у а б ы. Қара мауыт — 75 кез, көк мауыт — 63 кез.



Ғашықтар тілі — тілсіз тіл

Университет жатақханасының бір бөлмесінде алты жігіт тұрдық. Олар — Ақан, Оспан, Бейсен, Мұса және Совет пен мен болатынбыз. Бұл арада Совет пен өзімді аналардан бөле-жара атап отыруым жайдан-жай емес. Алдымен ол төртеуі әдебиет факультетінің бір бөлімшесінде, бір курсында оқиды. Өздері бір ауылдан. Бір мектепті бірге бітіріп келсе керек. Мұнда да төрт жыл бойы жұптарын бір жазбады. Төртеуінің төсектері қатар тұрады. Төртеуі оқу залына бірге барып, көшені бірге аралайтын. Қыл аяғы емтихандарға да төртеуі бірге еніп, бірдей баға алып шығатындарын қайтерсің! Бұл төртеуі осындағы бір институтта оқитын және өздері секілді бір-біріне жақын, үйірсек төрт жолдас қызбен бір мезетте танысты да, олармен төрт жыл бойы тату-тәтті достық өмір кешті. Қыздардың аттары Ләззат, Сара, Гуля және Дина болатын.

Совет екеуіміздің жөніміз бұлардікіне мүлде үйлеспеді. Екеуіміз университеттің екі факультетінде оқимыз. Екі факультет корпустарының арасы да, алатын мамандықтарымыз да бір-бірінен жырақ жатыр. Сондықтан болар, біздің бас қосып жүруіміз, шүйіркелесіп әңгімелесуіміз де сирек. Дегенмен екеуіміз бір-бірімізді аналарға қарағанда бірыңғай санаймыз. Оларды "қосақталған қозылар" не "Қозы-Көрпештер" десіп күлетін едік. Есесін жіберетін олар емес. Оқып жүрген факультеттердегі мамандығымызға орай, олар Советті — "математик", ал мені "тергеуші" атандырып жіберді. Осылай атауға олардың бізді көндіктіріп жібергені сондай, кейін тіпті Совет екеуіміз бір-бірімізді "тергеуші", "математик" деп шақыратын боп алдық.

Жоғарыда бұл төрт жігіттің төрт қызбен төрт жыл бойы достасқанын айттым. Шындығында сол жылдары бұлардың арасында шынайы да сыпайы достық қатынас қана болады. Бірақ "Таң атпайын десе де, күн қоймайды" дегендей, келе-келе достық бейілдерін махаббатқа айырбастап алғандарын өздері де байқамай қалған. Бір қызығы: әр жігіттің өз көңіліне түйгені болғанымен, қай қыз қайсысын сүйетінін анықтап білуді бұл төрт сабаз төрт жылдың беделінде бір парықтамапты. Ал махаббатта қыз шешімі соңғы үкім екені мәлім. Қыз қырағы демей ме, оларға жігіттердің аңсары да анық болған. Әрқайсысының жүрегі бұл жігіттердің қайсысын қалайтыны туралы мәселені бұлар тіпті әлдеқашан шешіп те қояды. Дегенмен өздері бастап сыр ашуға қыз жолы нәзік болатын әдеттен аса алмайды.

Көктемнің бір кешінде бөлмедегі алтауымыз түп-түгел бас қоса қалған едік (бас қосудың сәті бізде ішінара ғана болатын). Осы жолы төрт дос Совет екеумізге бар сырын ақтармасы бар ма? Ақан, Оспан, Бейсен, Мұса — төртеуі Ләззат, Сара, Гуля, Динаны сүйетіндіктерін, бірақ қыздардың қайсысы кімді қалайтынын біле алмай, дал екендерін айтты. Неге екенін қайдам, әйтеуір, олар екі сөздерінің бірінде "Тергеуші, сен тыңдашы", "Тергеуші, саған айтамыз", "Тергеуші, қалай ойлайсың?" — деп маған жармаса қалды. "Математикке" мән беріп, назар аударған бірі жоқ. Ал ол болса, өзінің қашанда бөлме ішінде сөзден бейтарап болатын салтына бағып, төсегінде шалқасынан түсіп үнсіз жатыр. Біздің бағанадан бергі дабыра сөзіміз оның қаперіне кіріп те шықпаған секілді. Ерінген бе әлде ұмытқан ба, өзі білсін, бәтеңкесін де шешпепті. Аяғы жерде, жауырыны ғана төсегіне төрт елі тиіп, жерге сырғып түсердей боп жатқан кейпінің өзі күлкілі. Бағанадан төрт жақтан бірдей төгілген сөз нөсеріне жалғыз төтеген мен, енді ғана ес жиып, соларға тіл қатайын деп оңтайлана берген едім, математик жатқан қалпы әй-түй жоқ:

— Уай, әуре, әдебиетшілер, сендер осы Абайдың ғашықтар тілі туралы не дегенін білмейтіннен саусыңдар ма, сірә? — демесі бар ма.

— "Ғашықтың тілі — тілсіз тіл,
Көзбен көр де, ішпен біл", —

деген Абай өлеңін айтатын шығарсың, — деп төртеуі енді "математикке" қарай жөңкіді.

— Иә, дәп өзі. Ондағы "көзбен көр" деген сөздің мағынасы өзінен-өзі айқын делік. Ал айтыңдаршы, "...ішпен біл" дегенін қалай түсінесіңдер?

—...?

— Сендер өлеңнен ой қармамай, қисын қуатын әулекпесі бар әдебиетшілер екендеріңді білемін ғой. Сол сіңісті дағдыларың иектеп, дағдарып тұрсыңдар-ау, хе-хе! Меніңше, Абай мұнда "...ішпен біл" деумен ойлап біл, ойлап ұқ деген пікірді меңзеген.

"Математиктің" дәл осы сөзі менің ішіме сыймай кетті. Ойлауды тек математиктердің маңдайына біткен сыбағадай көретін оның қашанғы әдеті. Қымс етсе, "ойланайын", "ойлан" т.с.с. деп шыға келеді. Оның ойлау турасындағы осы өр көкірек мінезіне қысастым ба әлде әлгінде сөйлейін дей бергенімде араға кеп қыстырылуы қытығыма тиді ме, әйтеуір, әндете мысқылдап:

— Сен әлде "есептеп біл" деп айтайын деп отырған шығарсың, — деп "математикті" қағытып жібердім. Кекеген кермегі бар сөзді білетін математик пе, ол бұған шіміріқпестен:

— Расында, мен солай демек ем, — демесі бар ма.

Бұл сөздің бізге тосын көрінгендігі сондай, бесеуміз бірдей:

— А! — деп дауыстап, "математиктің" бетіне аңтарыла қарап қалыппыз.

"Математик" маңғаз оған мән де берген жоқ. Маңқиған қалпы өзімізге сұрақты қардай боратып жатыр.

— Неғып бесеуің бірдей бақырая қалдыңдар, мені тани алмай тұрғаннан саусыңдар ма? Әлде менің әр "Көрпешке" (ана төртеуін "Қозы-Көрпеш" деп жорыта айтқаны) өз сүйгенін есептеу арқылы анықтаймын дегеніме сенгілерің келмей ме?

"Математик" соңғы сөзін аяқтай бере-ақ, "иә, солай" дегендей ишарат қып, біздің басымыз изек қақты.

"Математик" енді тек маған қарап сөйледі:

— Е, тәйірі деген, бұл бір шешуі оп-оңай есеп қой. Тек мынаны жадыңа берік түт: әр есеп қатесіз дұрыс шешілу үшін әуелі оның айқын әрі толық шарты болуы тиіс, яғни, өзің тәрізді заң адамының тілімен айтқанда, әр іске әділ үкім жасалу үшін оның алдын ала жүргізілген жеткілікті тергеуі болуы тиіс. Егер осыны анық ұқсаң, мына ғашықтар есебінің шартын, "тергеушім", сен әзірле. Оны шешу әрі сендерге талдап түсіндіру парызы менде-ақ болсын.

Менің енді оған құп демеске шарам қалмады. "Математик" сол арада-ақ ғашықтар есебінің шартын анықтау үшін "тергеу" жұмысын қалай жүргізуім керектігі туралы нұсқауларын маған беріп те үлгерді.

Ертеңіне мен ғашықтармен ілесіп бақшаға сейілге шықтым. Серуен кезінде қыздардан әр нәрсені суыртпақтап сұрай жүріп, ана төртеуінен оңашаланған бір кезде оларға тосыннан-тосын "Кім мына жігіттердің қайсысын ұнатады?" деген сауалды қойып қалдым. Мұндайда сыр бермеуге қыздардан ұста кім бар?! Әуелі түк түсінбеген бейнемен сыңқылдаса күлісіп, сыбырласа-шүйіркелесіп алған қыздар мені қағыта кеп:

— Тектен-тек тергеуші неғып жүр десек...

— Бәсе деймін-ау, қара мұның оңай олжа, жеңіл қоржын таппағын.

— Өзін Шерлок Холмсқа[1] балайтын бар тергеушінің бәз-баяғы әдеті де, әйтпесе...

— Әйтпегенде аңғарлы адам осындай сырды қыздан сұрар ма екен?! Әсіресе құпия біткеннің құлпын ашатын тергеуші болам деп жүрген жігіт ойланып өзі табар болмас па?!

Менің олардан күткенім де осы рәуішті жауаптар еді. Тілге тиек етер сөздің орайы келген соң тіл қатуыма тура келді.

— "Тергеуші" табарын табар еді ғой, бірақ...

— Неге бірақка ілініп қалдыңыз?

— ...Бірақ сіздер істің ақиқатына жету мақсатымен қояйын деп отырған қосымша бір қолқамды орындайтын болсаңыздар!

— Қойып көріңіз.

"Математиктің" үйретуі бойынша икемдей отырып, қыздарды осылай ойыстырып әкелген соң былай дедім:

— Әркім өз қалағанын дара атауға ибалық жасап тартынар.

---

[1] Ағылшын жазушысы А.Конон Дойльдың (1859–1930) қылмысты істер жайындағы әйгілі әңгімелерінің бас кейіпкері.

Сондықтан сауалнама іспетті құрылған қағаз бойынша жауап беріп көріңіздер.

— Мақұл!

Мен жалма-жан қойын дәптерімнің бір бетіне "математик" құлағыма құйып берген нұсқауларға сәйкес құрылған төменгі сұрақтарды жазып шықтым.

1. Ләззат пен Сара кімді сүйеді?

2. Гуля мен Ләззат ше?

3. Дина мен Сара ше?

Бұдан кейін осы сөздер жазылған қағазды бере тұрып былай деп ескерттім:

— Мұнда әр топтағы сұраққа қайтарар жауаптың біреуі шын, екіншісі жалған болуы шарт.

Қыздар қауымы бұл ұсынысты қуана қабылдап, орындауға құлшына кірісті. Жұмбақтаған астарлы әзілмен жауап қатысуға қазақ қыздарынан асатын құмар да ділмар жан бар ма?! Олар өзара шүйіркелесіп алған соң мына бір жұмбақ етіп қиыстырған сөздерді қағазға түсіріп, маған табыс етті:

Үш топ қып жауап жаздық, алып қостан:
Ләззат — Ақан және Сара — Оспан;
Гуля — Ақан, Ләззат — Мұса; Ақан —Дина,
Сара — Бейсен; асықтар жұбын тосқан.
Әр топта қос жауаптың біреуі шын,
Екіншісі өтірік, ойдан қосқан.
Анығын айырмасаң, етікші бол,
Тергеуші атанғанша тегін, бостан.

"Математиктің" маған тергеушілік жасап "біліп кел" деген деректері де, міне, дәл осы болатын. Келген шаруамның тынғанын білген мен енді аял етпедім. "Үйде ойланып келуге мұрсат беріңдер" деп қыздармен тез қоштастым да, жатақханаға тіке тарттым.

Анық "айыпкерді" анықтауға болатын есеп деген, міне, осы деп әкелген мағлұматтарыма "математик" дән риза болды. Сөйткенше дегбірлері қашып, ана төртеуі де жетті. Бесеуіміз бірдей кіріптар боп, "математикке" телміре қарап қалдық. Бірақ ол ләм деместен ойланып, сілейген қалпы тұр. Оның кейде осындай қалт қатты ойланып, әлдебір есептің шешуін кенет таба қоятын және артынша апалақтап, өзінде бар-жоғын аңғармастан, әрқайсымыздан қағаз, қарындаш сұрайтын бір дағдысы болатын. Бұрын ондайда: "Ой, сенің меншікті хатшың біз емес, аулақ", — деп қолымыз бір-ақ сілтенетін. Енді бәріміз бәйек боп, әкел десе лып еткелі қағаз, қаламды сайлап әзір тұрмыз. Бірақ "математиктің" бұл жолғы бізге қатқан жауабы, бейне бір ашық күнде аспан күркірегендей, сөлекет естілді. Ол өзіне ошарыла төніп тұрған бізді көзімен бір шолып шықты да, нақ бір бұйрық айтқан адамдай нығыздап:

— Үстел басына жайласып отырыңдар да, жазыңдар! — деп бір-ақ кесті.

— Нені жазамыз?!

— Менің қазір сендерге оқиын деп тұрған дәрісімді.

— Дәріс?!

— Иә!

— Апырау, мыналарды аясаңшы, — деп мен бетіме барынша аяныш реңін үйірілте, ана төртеуіне қарап қолымды жайып қаппын.

— Ештеңе етпейді. Анық ғашықтар төзімді келер. Қуана беріңдер, есептеріңді мен оймен шешіп те қойдым. Қай қыз кімді сүйетіндігі қазір маған бес саусағымның аттарындай аян. Бірақ та оларды сендерге әлі жария етуге еш хақым жоқ. Өйткені есептің қатесіз де қапысыз шешілгеніне өз көздерің жеткені абзал. Сондықтан сендерге әуелі бұл есепті қалай шешкенім туралы толық түрде айтып беруім керек.

Бізге оның айтқанына мойынсұнып, кәдімгі сабақтағыдай-ақ дәрісті жазуға отырғаннан өзге лаж қалмады.

Ықтиярсыз болса да біздегі бар ынта-құлақ өзіне құлағанын ұққан "математик" кідіріссіз сөйлеп кетті...

* * *

Мен өзімді ежелден-ақ математикадан мақрұм адамдардың санатында көретінмін. Математиканы түсінермін деген ой, талап менде ғұмыры болып көрген емес. Оқушы кезімнің өзінде математика пәндерін жақсы оқитындарды сағалаумен, 2 мен 3-тің күршегіне сағағымнан алма-кезек ілігумен жүретінмін.

О, ғажап! Математикадан осыншама қалыс та, алыс та жүргеніме қарамастан, "математиктің" бұл жолғы дәріс қылып айтқандары менің санама нақ бір қолмен құйғандай бірден саулап ене бастады.

Міне, осыдан кейін мен математиканы үйренудегі сәтсіздіктің бір ұшы, бәз біреулер ойлағандай, математиканың қияпат қиын пән екендігінде емес, математикалық ойлардың келістіріле баяндалмауы мен оқушының тыңдау ыждағаты жетіспеуінде жатыр деген ойға шын ден қоятын болдым.

Онда дәріс жазуға машық алған кезіміз ғой, "математиктің" бар айтқанын мен қағазға бұлжытпай түсіргем. Сол конспект менде күні бүгінге дейін сақтаулы. Оның тергеушілік қызметіме септігі аз тиіп жүрген жоқ.

Басталған әңгіменің байыбына жетем десеңіз, енді сол "дәрістерінің" конспектісін оқып шығыңыз.

"Математик" дәрістерінің конспектісі

XIX ғасырда пайда болған *"Математикалық логика"* дейтін ғылым бар. *Логика* — гректің *"логос"* деген сөзінен шыққанын, қазақша *"ойлау"* деген мағына беретінін білетін де шығарсыңдар. Осыдан "математикалық логиканы", "ойлаудың математикасы" деп қазақшалауға да болатынын көреміз. Мен оны математика пәндерінің ішіндегі сендерге ең танымалысы алгебрамен көп жағынан ұқсастығы болғандықтан, "Ойлау алгебрасы" деп атағалы отырмын.

Ойлау алгебрасы XIX ғасырда туды десек те, оның ғылымынан дән суын алуы әріде жатыр.

Қазіргі математикалық логиканың әу бастағы негізі боп саналатын алғаш жасаушы адам біздің дәуірімізден төрт ғасыр шамасындай бұрын өмір сүрген грек ғалымы *Аристотель* (б.д.д. 384−322 жж.) болған.

Ойлау алгебрасын жеке-дара пән етіп қалыптастыруға алғаш үлес қосқан — XVII ғасырдағы екі озық математиктің бірі деп есептелетін (Исаак Ньютонмен теңдес) Г.В.Лейбниц (1646−1716) еді.

Готфрид Вильгельм *Лейбниц* 1646 жылы Германиядағы Лейпциг қаласында дүниеге келді. Аса зерек Готфрид 6 жасында университет профессоры — әкесімен тарих жөнінде келелі әңгімелер шертісетін болған. 12 жасында латын тілін еркін меңгеріп, грек тілін үйренуге кіріседі. 14 жасқа келгенде адам ойының әліппесі — логика ілімі туралы небір қызықты да құнды ойлар жайлы өз бетімен толғана бастайды.

Г.В.Лейбниц 14 жасынан бастап университет дәрістеріне қатысқан.

Аса дарынды Лейбництің математика ғылымы дамуындағы алатын орны да дара.

Лейбництің ғылымға қосқан үлестерінің бірнешеуін ғана атап өтелік.

1. Ойлау заңдары туралы ілім − логикаға тұңғыш рет математиканы жанастырады.
2. Б.Паскальдың арифмометрін жетілдіре түседі.
3. Сандардың екілік жүйесін ашады. Лейбництен бізге мирас боп қалған осы ғылыми мұралар − қазіргі кезде атом энергиясының ашылуымен немесе космосты игерумен парапар жаңалық деп саналып жүрген жас ғылым − кибернетиканың атасы Н.Винердің "Егер ғалымдар тарихының шежіресінен кибернетиканы ардақтап жақтаушыны атау менің үлесіме тисе, мен Лейбництің есімін атар едім", — деуіне негіз жасайды.
4. Қазіргі математиканың ең сүбелі деген бөлімі боп саналатын математикалық анализдің негізін қалаушы екі ғалымның біреуі де Лейбниц (екіншісі — Исаак Ньютон) болған. Математикалық логиканы Г.В.Лейбниц "адам ойының әліппесі" деп бағалайды. Бір ғажабы осындай тың, келелі ғылым жасау туралы ой оның басында қаршадайынан орныққан. Кейін аты әлемге мәшһүр болған шағында Лейбництің өзі: "Кәдімгі логиканың сөйлемдерімен танысқан, бірақ математика маған әлі беймәлім бала кезімнің өзінде-ақ, неден ишарат болғанын қайдам, әйтеуір, менде ұғымдар талдауын жасау әбден мүмкін және соның арқасында ақиқаттықтар ашылады әрі олар сандар арқылы есептелінетін болады деген ой туған еді", — деп жазыпты.

Мұндағы "ойлау алгебрасы" деп аталып отырған "математикалық логика" ғылымының түп негізі "Буль алгебрасында" жатыр.

Осы алгебраны алғаш ашқан *Джордж Буль* Ирландияның Линкольн деген қаласындағы етікшінің отбасында 1815 жылы туған. Джорджтың мектептен бар алған білімі бастауыш сынып көлемінде ғана. Біраз уақыт сауда-саттық училищесіне қатысып оқығаны бар.

Джордж Буль

Математиканы, Аристотель мен Лейбниц еңбектерін Джордж Буль тек өз бетімен оқып үйренген.

Аса дарынды Дж.Буль математикалық ғылымдарды оқып үйренуді ғана місе тұтпай, бұл салада өзінің тың үлестерін қосуға үнемі талпыныс жасайды. Сондағы туындылардың ішіндегі ең айтулысы — "Ойлау заңдары" деген еңбегі. Бұл еңбектің анық парқын тану үшін қазіргі заманның аса үлкен философтарының бірі болған Бертран Рассельдің: "Таза математика Бульдің "Ойлау заңдары" деген еңбегінде ашылған", — деген сөзін келтірген жөн. Дж.Бульдің асқан дарыны, математикалық еңбектері өз заманында-ақ зор бағаланған.

Арнайы алған орта не жоғары білімі, немесе ғылыми дәрежесі жоқтығына қарамастан, оның университет профессоры боп тағайындалуы замандас ғалымдар қауымы тарапынан оған деген зор ілтипатты танытса керек.

* * *

Кім де болса құмарта оқитын әйгілі "Бөгелек" романының авторы Этель Войнич — Дж.Бульдің кенже қызы. Оның Этельден үлкен қызы Алиса әкесі тәрізді математиканы өз бетімен оқып үйреніп, бұл ғылымға едәуір жаңалықтар енгізеді.

Заманында №1 математик деп бағаланатын *А.Н.Колмогоров* (1903 ж.т.) 1932 жылы *Ойлау алгебрасы* амалдарына мүлде тың анықтама береді.

Андрей Николаевичтің еңбегінде *пікір* ұғымы деп математикалық *есептерді* алуға болатындығы көрсетілген.

Сонымен Ресейде "ойлау алгебрасын" алғаш паш еткен орыс ғалымы П.С.Порецкийдің (1846–1907) сөзімен айтқанда: *"Математикалық логика өзінің пәні жағынан логика да, ал әдісі жағынан математика боп саналады".*

Бұл ғылымның тарихымен таныстыруды осы деректермен тәмам етіп, енді "адам ойы алгебрасының" өз мәселелерін баяндауға тікелей көшейін.

Адамның ойлау қаруы тіл екені аян. Ал тіл сөздерден тұрады да, сөздер көп сөйлем құрайды.

Мазмұнының ақиқат яки жалған екендігі туралы нақты тұжырым жасауға болатын кез келген сөйлемді *пікір* деп атайды.

Мысалы: 1) "Астана — Қазақстанның астанасы"; 2) "7 саны 3-ке бөлінеді" деген сөйлемдер пікір бола алады. Өйткені біріншісі ақиқат та, екіншісі жалған сөйлемдер; 3) "0 = 1" өрнегінің мазмұны да пікір.

Сөйлем атаулының барлығы пікір бола бермейді.

Мысалы: 1) “x саны y-ке бөлінеді” деген сөйлем пікірге жатпайды. Себебі x-тің y-ке бөлінетіндігі (ақиқаттығы) не бөлінбейтіндігі (жалғандығы) туралы x пен y-тің дәйекті мәндері көрсетілгенше тұжырымды еш нәрсе айтуға болмайды.

2) “$\frac{4}{5}$ саны $\frac{1}{3}$-ге еселі болады” деген сөйлемді де пікір деп қарай алмаймыз. Себебі еселі деген сөз бүтін сандарға тән ұғым болғандықтан, бұл сөйлемде ешбір мағына жоқ.

3) Лепті, сұраулы сөйлемдер пікір бола алмайды.

Пікірлерді латын алфавитінің A, B, C, ... бас әріптерімен, ал “A пікірі ақиқат” деген тұжырымды 1 цифры, “A пікірі жалған” деген ұғымды 0 цифры арқылы белгілейміз.

Әр пән үшін бір не бірнеше ұғым ондағы ең басты ұғым деп саналатынын білесіңдер. Мәселен, арифметикада мұндай ұғымға сан ұғымы жатса, геометрияда нүкте, түзу ұғымдары енеді. Ал біз қарастырып отырған ойлау алгебрасы пәні үшін ең басқы әрі ең басты ұғым ретінде пікір ұғымы алынады.

Пікір дегеніміз мазмұнының ақиқат не жалғандығы туралы тұжырым жасауға болатын кез келген сөйлем екенін жоғарыда айттық.

Сөйлемдердің жалаң және құрмалас деп аталатын жалпы екі түрі болатынын грамматикадан білесіңдер. Біз бұдан былай шартты түрде жалаң сөйлемді жай пікір, ал құрмалас сөйлемді күрделі пікір деп қарастыруға келісеміз.

Екі не бірнеше жай пікірлерден күрделі пікір жасаудың әр түрлі жолдары *логикалық амалдар* деп аталады.

Логикалық амалдар жай пікірлерге логикалық жалғаулықтарды қолдану арқылы орындалады.

Ол жалғаулықтардың бастылары мыналар: *және, немесе, емес, егер, сонда ...* Қазақ тілінде бұл жалғаулықтармен мағыналас болатын тағы бірнеше жалғау, жұрнақтар не басқа қосымша сөздер де бары есте болуы керек. Жай пікірлер белгілеулеріне логикалық амалдар қолдану нәтижесінде күрделі, жаңа бір пікір өрнегі пайда болады. Бұл өрнекті *ойлау алгебрасының формуласы* дейміз.

Ойлау алгебрасындағы пікірлерге қолданылатын амалдар анықтамалар түрінде былайша беріледі.

1-анықтама. Екі не бірнеше жай пікірлерден *және* жалғаулығымен не сонымен тең мағыналы қосымша сөздер жәрдемімен жасалған күрделі пікірді *пікірлер көбейтіндісі* (конъюнкциясы) деп атайды.

Ойлау алгебрасында бұл амалды “$\cdot$” (көбейту) таңбасы арқылы немесе “$\wedge$” белгісімен белгілейді.

Мысалы: Айталық A пікірі “Марат оянды”, ал B пікірі “Тез киінді” деген жалаң сөйлемдер болсын. Сонда “Марат оянды да, тез киінді” деген күрделі сөйлемді көбейтінді пікір деп қарауға болады, яғни оны $A \cdot B$ формуласы түрінде өрнектей аламыз.

Мысалы: “Шоқан әрі ғалым, әрі суретші және офицер” деген сөйлемді $A \cdot B \cdot C$ формуласымен өрнектеуге болады.

Белгілі бір көбейтінді пікірді (конъюнкцияны) айтқан кезде, сондағы пікірлердің әрқайсысы үшін бірдей орындалатын тұжырым жасаймыз.

Сондықтан $A \cdot B$ көбейтінді пікір A, B — көбейткіш (жай) пікірлердің әрқайсысы ақиқат болғанда ғана ақиқат, ал басқа жағдайлардың бәрінде жалған болуы тиіс.

Көбейту амалындағы пікірлер үшін орындалатын бұл арақатынасты мынадай кесте түрінде көрсетуге болады. (Мұны көбейтудің *ақиқаттық кестесі* дейді.)

2-кесте

A · B көбейтіндісінің ақиқаттық кестесі

A	B	$A \cdot B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Бұл кестеден пікірлер үшін тағайындалған көбейту ұғымы мен сандарға қолданылатын көбейту амалының арасында ұқсастық барын аңғарамыз:

$$1 \cdot 1 = 1; \quad 1 \cdot 0 = 0; \quad 0 \cdot 1 = 0; \quad 0 \cdot 0 = 0$$

Пікірлер көбейтіндісі үшін де сандарға пайдаланылатын “ · ” таңбасы сақталуы, міне, осыдан.

Пікірлердің көбейтіндісі жөнінде келтірілген ұғымдарға жаттығу мақсатымен тағы бірер мысал қарастырайық.

Мысалы. A пікірі “Сегіз екіге бөлінеді”, ал B пікірі “Бес үштен үлкен” деген сөйлемдер болсын. Сонда “Сегіз екіге бөлінеді және бес үштен үлкен” деген күрделі сөйлемді $A \cdot B = C$ көбейтінді пікір түрінде жазуға болады, мұндағы $A = 1$ (ақиқат), $B = 1$ (ақиқат) болғандықтан, кесте бойынша $C = 1 \cdot 1 = 1$ (ақиқат) болатынын көреміз.

Мысалы. A пікірі “Үш жерде жеті жиырма бір”, ал B пікірі “Төрт — жай сан” деген сөйлемдер болсын.

Сонда “Үш жерде жеті жиырма бір және төрт — жай сан” деген күрделі сөйлем $A \cdot B = C$ көбейтінді пікір болады. Мұнда $A = 1$, $B = 0$ болғандықтан, $C = 1 \cdot 0 = 0$ болады.

2-анықтама. Екі не бірнеше жай пікірлерден *немесе* жалғаулығымен не сонымен тең мағыналы қосымша сөздер жәрдемімен жасалған күрделі пікірді *пікірлер қосындысы* (дизъюнкциясы) деп атайды.

Ойлау алгебрасында бұл амалды “$\vee$” таңбасы арқылы белгілейді. Мұндағы таңба “$\vee$” латынша *vel* (қазақша — *немесе*) деген сөздің басқы әрпі.

Мысалы. A пікірі “Шаңғымен жүру денсаулықты нығайтады”, ал B пікірі “Коньки тебу денсаулықты нығайтады” деген сөйлемдер болсын. Сонда “Шаңғымен жүру немесе коньки тебу денсаулықты нығайтады” деген күрделі сөйлемді қосынды пікір деп ұғып, оны $A \vee B$ формуласы арқылы өрнектеуге болады.

Мысалы. “Дабыл шамы не жасыл, не сарғыш, не қызыл түсті жарықтар береді” деген күрделі сөйлем мына $A \vee B \vee C$ формуласы арқылы жазылады.

Белгілі бір қосынды пікірді (дизъюнкцияны) айтқан кезде сондағы пікірлердің ең болмағанда біреуі үшін орындалатын тұжырым жасаймыз.

Сондықтан $A \vee B$ қосынды пікір A, B — қосылғыш (жай) пікірлердің ең болмағанда біреуі ақиқат болғанда ғана ақиқат, ал басқа жағдайлардың бәрінде жалған болуы тиіс.

Қосу амалы үшін орындалатын бұл арақатынасты мынадай кесте түрінде көрсетуге болады. (Мұны *қосындының ақиқаттық кестесі* дейміз.)

3-кесте

A∨B қосындысының ақиқаттық кестесі

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Бұл кестенің бірінші жолынан кейінгі жолдарын қарасақ, пікірлер үшін келтірілген қосу ұғымы мен сандарға қолданылатын қосу амалының арасында ұқсастық барын аңғарамыз:

$$1 + 0 = 1;\ 0 + 1 = 1;\ 0 + 0 = 0$$

Дегенмен кестенің бірінші жолында жазылған цифрлар үшін сандарға тән қосу амалы сақталмайтыны себепті пікірлерді қосу үшін “+” таңбасы алынбай, “∨” белгісі қабылданған.

Пікірлердің қосындысы жөніндегі ұғымдарға жаттыға түсу мақсатымен тағы бірнеше мысалдарды қарастыралық.

Мысалы. Айталық, “5 үлкен 3-тен” деген сөйлем A пікірі, ал “2 үлкен 3-тен” B пікірі болса, онда “5 үлкен 3-тен немесе 2 үлкен 3-тен” деген күрделі сөйлемді $A \vee B = C$ қосынды пікір түрінде жазуға болады. Мұнда $A = 1$, $B = 0$ болғандықтан, $C = 1 \vee 0 = 1$ болады.

Мысалы. “Сынып оқушыларының ішіндегі ең үздігі Жанар — дарынды не ынталы оқушы” деген сөйлемді алайық. Бұл сөйлемді $A \vee B = C$ формуласы арқылы өрнектеуге болады. Өйткені бұл сөйлемде Жанар дарынды болғандықтан ($A = 1$) немесе ынталы болғандықтан ($B = 1$), болмаса әрі дарынды, әрі ынталы болғандықтан ($A = 1$, $B = 1$) сыныптағы үздік оқушы саналады ($C = 1$) деген күрделі пікір айтылып отыр.

3-анықтама. A пікірі ақиқат болса, жалған болатын, ал жалған болса, ақиқат болатын пікірді A пікірінің *терістеуі* деп атап, оны A формуласы түрінде белгілейді.

A терістеуге ауызекі сөйлеуде *емес* деген жалғаулық немесе соны-мен мағыналас қосымша сөздер сәйкес келеді.

Мысалы. Айталық, A пікірі "*a* түзуі *b* түзуіне параллель" деген сөйлем болсын. Сонда "*a* түзуі *b* түзуіне параллель емес" дейтін сөйлем A пікірінің терістеуі болады, сол үшін соңғы пікірді $\overline{A}$ деп белгілеуге хақымыз бар.

Мысалы. A пікірі "15 саны 3-ке бөлінбейді" деген сөйлем болса, онда $\overline{A}$ пікірі "15 саны 3-ке бөлінеді" деген сөйлем болады.

Кейде A және $\overline{A}$ пікірлерін бір-біріне қарама-қарсы пікірлер деп те атайды. Ойлау алгебрасының алдыңғы қарастырылып өткен амалдары екі не одан көп жай пікірлерден күрделі жаңа пікір құрайтын болса, ал терістеу амалы берілген сөйлемнің өзінен ғана жаңа сөйлем туғызатынын ескерген жөн.

A әуелгі пікірі мен $\overline{A}$ терістеудің арасындағы арақатынасты мынадай кесте түрінде көрсетуге болады. (Мұны терістеудің *ақиқаттық кестесі* дейміз.)

4-кесте

$\overline{A}$ терістеудің ақиқаттық кестесі

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

$\overline{A}$ терістеу жөніндегі ұғымға жаттығу түсу үшін тағы бірер мысал қарастыралық.

Мысалы. "7-сыныптың бірде-бір оқушысы оқу озаты болмады" деген сөйлем A пікірі болса, онда "7-сыныптың бар оқушысы оқу озаты болды" деген сөйлем $\overline{A}$ пікірі болады.

Мысалы. "$2 \cdot 2 = 3$" деген пікірдің терістеуі "$2 \cdot 2 \neq 3$" деген пікір болады.

Енді жоғарыда қарастырылып өткен амалдардың бәрі бірдей қатысатын бір мысалға тоқталайық.

Мысалы. Төмендегі сөйлемді "Ойлау алгебрасының" формуласы арқылы өрнектеп жазыңдар. "Жазбаша есеп шығару үшін қолда қалам немесе қарындаш және алдыңда ақ қағаз болуы тиіс".

Шешуі. Мынадай белгілеулер аламыз:

қаламның болуы — A;
қаламның болмауы — $\overline{A}$;
қарындаштың болуы — B;
қарындаштың болмауы — $\overline{B}$;
қағаздың болуы — C;
қағаздың болмауы — $\overline{C}$;
жазудың мүмкіндігі — 1;
жазудың мүмкін еместігі — 0.

Қалам мен қарындаш екеуін бір уақытта пайдаланып жазу мүмкін емес деп қарап (байқап көр), қалам болса, қарындаш керек болмайтынын немесе қалам болмаса, қарындаштың бар болуын: $A \cdot \underline{B} \vee \underline{A} \cdot B$ формуласы арқылы өрнектей аламыз. Енді есепті жазу үшін бұларға қоса (және) қағаз болуы тиіс екенін ескерсек, онда мына теңдік шығар еді:

$$\left(A \cdot \overline{B} \vee \overline{A} \cdot B\right) \cdot C = 1$$

Бұл — берілген мысалдағы күрделі сөйлемнің (пікірдің) формуласы.

Сонымен, "Ойлау алгебрасындағы" ең басты нәрсе — пікір туралы және пікірдің белгіленуі, қандай мәндер қабылдайтындығы, пікірде қолданылатын амалдар анықтамасы жөнінде деректер берілді. Енді қарастырылып өткен амалдарға тән қасиеттер, заңдар тағайындалуы керек. Содан кейін ғана "Ойлау алгебрасының" қолданылуы туралы сөз ете аламыз.

"Ойлау алгебрасының" амалдары үшін орындалатын басқа заңдылықтар мынадай:

I. Көбейту үшін ауыстырымдылық заңы.

Бұл заң бойынша көбейткіштердің орнын ауыстырғаннан көбейтінді өзгермейді, яғни $A \cdot B = B \cdot A$.

II. Көбейту үшін терімділік заңы.

Бұл заң бойынша көбейткіштерді топтап көбейткеннен көбейтінді өзгермейді, яғни $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.

III. Қосынды үшін ауыстырымдылық заңы.

Бұл заң бойынша қосылғыштардың орнын ауыстырғаннан қосынды өзгермейді, яғни $A \vee B = B \vee A$.

IV. Қосынды үшін терімділік заңы.

Бұл заң бойынша қосылғыштарды топтап қосқаннан қосынды өзгермейді, яғни $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$.

V. Бірінші үлестірімділік заңы.

Бұл заң бойынша пікірді қосындыға көбейту үшін әр қосылғышты сол пікірге көбейтіп, шыққан нәтижелерді қосу керек, яғни:

$$A(B \vee C) = A \cdot B \vee A \cdot C$$

Бесінші заң жақшалар ашу, ортақ көбейткішті жақша сыртына шығару сияқты кәдімгі алгебрада (сандар алгебрасында) жүргізілетін түрлендірулерді "Ойлау алгебрасының" амалдары үшін де орындауға болатынын көрсетеді.

Жалпы, I−V заңдар мектеп алгебрасындағы көпмүшеліктерді түрлендірулердің (жақшаға алу, жақшаның сыртына шығару, ұқсас мүшелерді анықтау, біріктіру) бәрін пікірлерден тұратын формулаларға қолдану үшін негіз жасайды.

Қарастырылып өткен заңдарға қосымша "ойлау алгебрасының" тағы бірнеше заңдарына тоқталамыз. Бұл заңдар негізінен "ойлау алгебрасының" формулаларына ғана тән. Сандар үшін ондай заңдар мүлде жоқ.

VI. Екінші үлестірімділік заңы.

$$A \vee B \cdot C = (A \vee B) \cdot (A \vee C).$$

VII. Көбейту үшін өзгерімсіздік заңы.

$$A \cdot A = A.$$

VIII. Қосу үшін өзгерімсіздік заңы.

$$A \vee A = A.$$

IX. Қайшылық заңы.

$$A \cdot \overline{A} = 0.$$

Бұл заң A пікірі мен оның $\overline{A}$ терістеуінің көбейтіндісі жалған болатындығын көрсетеді.

Қайшылық заңын сөз түрінде былайша айтуға болады: бір-біріне қарама-қарсы екі пікір бірдей ақиқат болуы мүмкін емес, ең болмағанда солардың біреуі жалған болады.

Мәселен, "Марат бүгін сабақта болды" деген пікір мен "Марат бүгін сабақта болған жоқ" деген пікірдің екеуі бірдей ақиқат болуы еш мүмкін емес, ең болмағанда солардың біреуі жалған болады.

X. Үшіншісі жоқтық заңы.

$$A \vee \overline{A} = 1.$$

Бұл заң A пікірі мен оның $\overline{A}$ терістеуінің қосындысы ақиқат болатынын көрсетеді.

Үшіншісі жоқтық заңын сөз түрінде былайша айта аламыз: *бір-біріне қарама-қарсы екі пікірдің бірдей жалған болуы мүмкін емес, ең болмағанда солардың біреуі ақиқат болады, демек, олардың қосындысы да ақиқат.*

Мәселен, "Марат бүгін сабақта болды" деген растаушы пікір мен оны терістейтін "Марат бүгін сабақта болған жоқ" дейтін пікірдің не біріншісі, не екіншісі қайтсе де ақиқат, Мараттың сабақта болғаны я болмағаны жөнінде басқадай үшінші бір пікірдің болуы еш мүмкін емес.

XI. Қос терістеуді түсіру заңы.

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

Бұл заң A пікіріне қатарынан екі рет қолданылған терістеудің бастапқы пікірдің өзіне келтіретіндігін көрсетеді.

Қос терістеуді түсіру заңын сөз түрінде былайша айтуға болады: *әуелгі пікірдің терістеуін теріс деушілік әуелгі пікірдің өзіне қайта келтіреді.*

Ойлау алгебрасындағы қазір бізге қажетті болатын басты деректер айтылды. Алайда біз бұл алгебра заңдарының дұрыстығына, яғни алгебраның өз тілімен айтқанда, олардың орындалуы ақиқат екендігіне арнайы тоқталған жоқпыз. Тек ыңғайына қарай кейбіреуін кезінде мысалмен ғана түсіндіріп өттік. Ал анығында математика жолымен дәлелденбеген тұжырым шындық санатына жатпайды.

Математикалық жолмен дәлелдеу дегеннің не екенін де данышпан Лейбниц алғаш аңғартып кеткен болатын. Ол философия және сөз саласында өзімен айтыс-талас тудыра берген сөзуар әріптестерінің мысын: "Мырзалар, бос таласпайық, ал, кәне, *есептеуге* кіріселік", — деп басады екен.

Сөйтіп, ойлау алгебрасы заңдарын дәлелдеуді біз де енді есептеу төрелігіне береміз. Пікірлердің ақиқаттық кестесі дегеннің не екендігі жөнінде айтылды.

Бірақ оның қалай жасалып, құралатындығы туралы ештеңе айтпадық. Анық болу үшін әуелі соған біраз тоқталып өтейік.

Жай пікірлердің ақиқаттық кестесіндегі бағандар саны, берілген пікір нешеу болса, сонша болары айқын, ал кестенің жолдарының саны 2^n-не тең болатынын дәлелдеп көрсетуге болады (оны өздерің абайлап көріңдер). Мұндағы n берілген жай пікірлер санын көрсетеді. Мәселен, $n = 3$ болса, жай пікірлердің ақиқаттық кестесіндегі бағандар саны 3, ал жолдар саны $2^3 = 8$ болады.

Ақиқаттың кестесіне жай пікірлер мәндерін түгел қамтып, дұрыс қоя білудің үлкен мәнісі бар. Мұны мысал түрінде түсіндіреміз. Айталық, *A, B, C* жай пікірлер болсын. Сонда әлгінде айтқанымыз бойынша бұлардың ақиқаттық кестесі үш бағаннан және сегіз жолдан тұратын тік бұрышты кесте болады *(5-кесте).*

5-кесте

A	*B*	*C*
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

Енді осы кестеге берілген жай пікірлер мәнін орналастыру тәртібін баяндаймыз.

Әуелі кестенің оң жақ шетіндегі пікірдің (*C*-ның) мәндерін осы баған бойымен "1"-ден бастап жоғарыдан төмен қарай "1" мен "0"-ді алма-кезек алып, әр торкөзге біртіндеп қойып шығады. Сонан кейін оннан бастап санағандағы екінші, үшінші т.с.с. пікірлердің мәндерін орналастырады. Онда алдыңғы пікір мәніндегі "1" мен "0"-дің әрқайсысы "1"-ден басталып, екінші пікір үшін (*B* үшін) екі рет, үшінші пікір үшін (*A* үшін) төрт рет т.с.с. қайталанып, кезектесулері керек т.с.с.

Жай пікірлердің осылай құрылған кестесін *(5-кестені) жай пікірлер мәндерінің матрицасы* деп атайды.

Мысал. A, B екі жай пікірлердің және *A, B, C, B* төрт жай пікірлердің матрицасын құрыңдар (әркім өзі орындасын).

Енді "Ойлау алгебрасының" заңдарын бейнелеген формулалардың орындалуы ақиқат (дұрыс) екендігіне есептеп көз жеткізу қиын емес. Ол үшін *сол заңдардағы теңдік белгісінің екі жағында орналасқан формулалардың ақиқаттық мәндері соларға енетін жай пікірлердің* *барлық мүмкін мәндерінде, яғни олардың матрицасындағы мәндерінде, бірдей болатындығын көрсету жеткілікті.*

Мысалы. VI заңның дұрыстығын осы әдіс бойынша дәлелдейік. Алдымен мынадай кесте құрамыз. Мұнда: 1–3 бағандар — *A, B, C* жай пікірлер мәндерінің матрицасы (5-кесте), 4–8 бағандар 2, 3-кестелердің, яғни логикалық амалдардың анықтамалары негізінде толтырылады *(6-кесте).*

6-кестеден 5-ші және 8-бағандардағы формулалардың ақиқаттық мәндері бірдей екенін көреміз. Демек, VI заңның, яғни үлестірімділіктің екінші заңының, орындалуы тура (ақиқат) болғаны.

6-кесте

1	2	3	4	5	6	7	8
A	B	C	$B \cdot C$	$A \vee B \cdot C$	$A \vee B$	$A \vee C$	$[A \vee B \cdot A \vee C]$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

"Математик" осы сөздермен дәрісін тәмамдады да, жалпымызға мынадай бір сұрақ қойды:

— Бұл айтылғандардан түсінбеген жерлерің бар ма?

"Математиктің" бір сөзін де қағыс жібермей, оның бар айтқанын жете ұғынып алғанымыз шындық та еді. Бірақ біздің математиканы маңайламас жандар екенімізге шәк келтіріп көрмеген "математик" бұған онша сенбеді білем, былай деп қалды:

— Сынап көремін. Кәне, әрқайсысың әлгі мен көрсеткен тәсілмен бірінші үлестірімділік заңын, яғни V заңды, есептеу арқылы дәлелдеп шығарыңдар.

— Құп!

Қыздардың жұмбақ есебін шешумен шұғылданудың сәті тез түсуін тағатсыздана күткен біздер, бұрынғыдай бұра, бұйдалай сөйлеудің бәрінен мүлде тыйылып, "математиктің" не айтқанын саптағы солдатқа сай қимылмен жедел орындауға тырысып бағудамыз. Дес бергенде, "математиктің" бұл жолғы тапсырмасының жауабын біз лезде әрі мүлтіксіз әзір еттік (оқырмандар өз бетімен орындап көруін тиімді санап, ол жауапты мұнда келтірмедім).

Ғашықтар тілінің ашық сөйлеуі

Өз ойының орындалғанын көргенде кімнің іші жылымасын. Оқыған дәрісі арқасында біздің математикалық сауатымыз бірталай ашылып қалғанын анық байқаған "математик" мүлде шаттанып, көзі күлімдеп кетті. Шалдуар мінез, шәлкем-шалыс сөздің бәрінен ада болған жайдары жан мипаң қағып сөйлеп тұр:

— Жігіттер, қыздардың жұмбағын шешуге "Ойлау алгебрасынан" осы білгендерің жетіп жатыр. Ұғыныңтырақ болу үшін мен әуелі қыздар жұмбағын қара сөзге айналдырып, бір қайталап шығайын. Қыздар жауабын мынадай ретпен топтап айтқан ғой:

1. Ләззат Ақанды, Сара Оспанды ұнатады.
2. Гуля Ақанға, Ләззат Мұсаға ғашық.
3. Дина Ақанды, Сара Бейсенді сүйеді.

Енді осы сөйлемдерді ойлау алгебрасының тіліне аударуымыз керек. Ондағы басты нәрсе пікір ұғымы екенін білесіңдер. Ал, кәне, өздерің ойлап айтыңдаршы, бұл жауаптардың барлығы неше пікірден тұрады?

— Әр жауапта екіден, барлығы алты пікір бар, — дедім мен. "Математик" маған басын изеп, дұрыс деген ишарат берді де:

— Әр топтағы пікірлердің ақиқаттығы туралы не айтылған? — деп Оспанға қарады.

Оспан еш бөгелместен:

— Қыздардың өзі әр топтағы пікірлердің біреуін ақиқат, екіншісін жалған деп атап көрсетіпті ғой, — деді.

— Тұп-тура. Енді сенің басты бақталасың Бейсенді бір байқап көрейін, — деп "математик" құлана күліп алды да, Бейсенге қарап сөзін жалғады:

— Әр топтағы жауаптар бір-бірімен қандай жалғаулық арқылы ұштастырылған?

— Ондағы пікірлердің бір-бірімен *немесе* жалғаулығы арқылы байланысатыны жауаптардың мазмұнынан ап-айқын танылып тұр, — деп Бейсен үн қатты.

Осыдан соң "математик":

— Бейсеннің бұл айтқаны дұрыс екендігіне шүбә келтіретіндер жоқ па? — деп сұрақ қойды да, бәрімізге жағалай көз жүгіртіп өтті. Біз ұғынып отырғанымызды үнсіздікпен таныттық.

Енді "математик" алдындағы жатқан қағазға қаламымен жаза тұрып сөйледі:

1) $Л_а$; $С_о$; 2) $Г_а$; $Л_м$; 3) $Д_а$; $С_б$.

— Мұндағы тұрған бас әріптер қыздар атының алғашқы әрпі де, ал олардың төменгі жағындағы әріптер жігіттер атының алғашқы әрпі. Сонда $Л_а$ — Ләззат Ақанды сүйеді деген пікірдің белгіленуі болмақ. Кәне, Ақан, сен енді осы белгілеулерді пайдаланып, қыздар жауабын формула түрінде өрнектеп көрші.

Ақан — асып-сасуды білмейтін маңғаз жігіт. Жазуы маржандай тізілген әдемі болатын. Бұл жолы да сол байырғы салтынан танған жоқ.

Ол сөйлей пайымдап:

— Қыздар жауабының әр тобындағы пікірлер *немесе* жалғаулығы арқылы дәнекерлесіп тұрғанын жаңа Бейсен айтты. Ал *немесе* жалғаулығын пікірлерді қосу амалы деп ұғу керектігі "математиктің" өз дәрісінен аян. Сондықтан қыздар жауабының формула түрінде жазылуы, меніңше, былай болар, — деді де, сәл ойланып қалды. Артынша құдды баспадан шыққандай ғып, мына формулаларды қағазға түсірді.

1) $Л_а \vee С_0$; 2) $Г_а \vee Л_м$; 3) $Д_а \vee С_б$.

Ақан жазуын бітірген соң "математик" жалпымызға ортақ тағы бір сауал тастады:

— Бұл формулалардың ақиқат я жалған болатындығы туралы не айта аласыңдар?

Ішіміздегі ең қушыкешіміз Мұса:

— Дәу де болса ендігі кезек менікі шығар, — деп бәрімізді бір күлдіріп алды да, былайша жауап қатты:

— Бір қосылғышы ақиқат болса-ақ, қосындының ақиқат болатынын білеміз. Ендеше бұл формуланың үшеуі де ақиқат болатын формулалар. Демек, мынадай теңдіктер жазуымызға әбден болады:

$$Л_а \vee С_0 = 1 \qquad (1)$$
$$Г_а \vee Л_м = 1 \qquad (2)$$
$$Д_а \vee С_б = 1 \qquad (3)$$

"Математик", "О, мынаны қарап қой" дегендей, таңырқаған кейіппен Мұсаға одырая төніп қапты. Мұса болса басын кегжитіп алып, мықынын таянған қалпы, паңсына сіресіп тұр. Қыран-топан күлкі дендеп, тіл қата алмай біз қалдық.

Бір заматта "математиктің":

— Жетер, есепті аяқтайық, — деп зеки шыққан дауысы ес жидырып, бәріміз соның аузына қарап қалдық.

Біздің күлкіден сап болып, өзімізге өзіміз келгенімізді көргеннен кейін "математик" қайта сөз бастады:

— Есептің жауабы "Ләззат кімді және Сара қай жігітті және..." деген сияқты сөйлем боп шығатыны айқын. Сонымен қатар мұндағы әлі есімі беймағлұм болып тұрған жігіттер аты анықталғаннан кейін бұл сөйлем ақиқат болуы тиіс.

Бұл айтылғандардан қыздар есебінің жауабын пікірлердің 1-ге тең болатын көбейтіндісі түрінде табу керектігін көреміз. Сондықтан Мұса жазған әлгі (1), (2) теңдіктерді мүшелеп көбейтеміз:

$$(Л_а \vee С_0) \cdot (Г_а \vee Л_м) = 1.$$

Бірінші үлестірімділік заңы арқасында жақшаларды ашуға болады:

$$Л_а \cdot Г_а \vee Л_а \cdot Л_м \vee С_0 \cdot Г_а \vee С_0 \cdot Л_м = 1. \qquad (4)$$

Мұнда $Г_а \cdot Л_а = 0$ (жалған), өйткені есеп шарты бойынша Ләззат пен Гуля екеуі бірдей Ақанға ғашық болуы мүмкін емес. Сондай-ақ $Л_а \cdot Л_м = 0$ (жалған), себебі Ләззаттың екі жігітті бірдей сүюі шындыққа үйлеспейді. Осы айтылғандар негізінде (4) теңдіктен мынау шығады:

$$С_0 \cdot Г_а \vee С_0 \cdot Л_м = 1 \qquad (5)$$

Енді (3) және (5) теңдіктерді мүшелеп көбейтеміз:

$$(Д_а \vee С_б) \cdot (С_0 \cdot Г_а \vee С_0 \cdot Л_м) = 1$$

Бұдан

$$Д_а \vee С_0 \cdot Г_а \vee Д_а \cdot С_0 \cdot Л_м \vee С_б \cdot С_0 \cdot Г_а \vee С_б \cdot С_0 \cdot Л_м = 1 \qquad 6)$$

Мұнда да есеп шарты бойынша екі қыз бір жігітті сүюі және екі жігітке ғашық болуы мүмкін емес болғандықтан,

$Д_а \cdot С_0 \cdot Г_а = 0$; $С_б \cdot С_0 \cdot Г_а = 0$ және $С_б \cdot С_0 \cdot Л_м = 0$

Сонымен (6) теңдіктен

$$Д_а \cdot С_0 \cdot Л_м = 1$$

Көбейтінді ақиқат (1-ге тең) болғандықтан, әр көбейткішті ақиқат (1-ге тең) деп қараймыз.

Демек, $Д_а = 1$, $С_о = 1$, $Л_м = 1$. Осыдан кейін "математик", мен болдым дегендей, қолындағы қаламын үстел үстіне сарт еткізіп қоя салды.

Сонымен Динаның Ақанды, Сараның Оспанды, Ләззаттың Мұсаны және Гуляның Бейсенді сүйетіндігі дәлелденгеніне ақиқат сендік.

"Қуанған мен қорыққан бірдей" деп халық жайдан-жай айтпаған ғой. Сүйгендері сөйлеп, көңілдері дауаланған төрт ғашық жігіт құр жымың қаққандары болмаса, тіл қатарлық қауқар таппады. Олардың осы күйін аңғарған мен:

— Көкейтесті армандарын анық тауып, көңілдерін дауалағаның үшін саған мына төрт жігіттің атынан мың да бір рақмет, — деп "математикке" ұсынуға қолымды ыңғайлай бергенімде, "математик" қолымен маған қоя тұр деген ишарат берді де:

— Айтпақ рахметің адал ниет болса, бесеуіміздің атымыздан демей, өзіңді аналардан несіне жырымдап қап тұрсың?— деп мені кінәлай сөйледі. Оның бұлай ытырынып, жазғыра сөйлеуі маған да ұнаған жоқ. Мен де жауапты қиқарлана қитар қайырдым:

— Ненің беделімен саған рақмет айтпақпын. "Біреу қыз алып қашса, мен босқа қаштым" деген пікір мен үшін де аумай ақиқат боп шықты деп алғыс білдірейін бе!

"Математикке" менің бұл сөзім мән берер пікір боп көрінбеді білем, ол басын шайқап, алара қарап тұрды да:

— Тергеуші деген тереңнен ойлар болар еді. Көрерсің, осы бүгінгі оқыған дәрістен саған тиер септік аз болмайды, әлі сонда маған рақметті қазіргідей бір рет қана емес, мың рет айтатын боларсың, — деді.

Мен немқұрайды ғана:
— Оны көрерміз, — дей салғам.
"Математиктің" бұл айтқаны алда мен үшін ақиқат боп келетін нағыз болжамды пікір болатындығын онда мен қайдан білейін.

Терезе сындырған тентек кім?

Оқу бітіріп, қызметке орналасқанда "математик" екеуміз бір аудан орталығына келгенбіз. Жыландай жылжып жылдар өтті. Студенттік шағымыздың қызықтары көрген түстей көнеріп, оларды "баяғыда..." деп еске алатын болғалы қашан. Алайда "математик" екеуміздің ара жібіміз бір үзілген жоқ. Міне, мен оның кабинетінде тағы отырмын. Қазір ол білдей мектеп директоры. Мен келгенде өзінің төрт оқушысымен әңгіме үстінде екен. Сөздерін бөліп, көлденеңнен килігe қоймадым. Бір заматта оқушылары қоштасып кетті-ау, әйтеуір.
— Бүгін алғашқы сабақтан кейінгі үзіліс кезінде 8-сынып терезесінің бір көзін оқушылардың біреуі сындырып қойды. Бұл бұзақылық Рахым, Дәурен, Мұрат, Төкен деген төрт баланың біреуінің қолынан келгені хақ. Жаңағы төртеу солар. Анық айыпты осылардың қайсысы екенін анықтау үшін екі сағат сарп етіп, тергеу жасауыма тура келді. Өзіңе аян, айыпты адам тіке сұраққа ешқашан тура жауап бермейді ғой. Соны ескеріп, мен баяғыдағы өзіміздің төрт ғашықты аяқтандырған кездегі қолданған тәсілге салдым. Әр оқушыға әр түрлі сұрақ қоюмен егжей-тегжейіне жете отырып, терезені сындырған тентектің кім екендігі туралы есеп шешуге жеткілікті шарт боларлық жауаптарды оқушылардан алдым, ақыры. Сол жауаптардың ретке келтірілген түрі мынадай.
"Математик" осыны айтты да, алдында жатқан қағазды маған қарай ысырып қойды. Өзі үнсіз маған қарап тұр. Мен қағазға тез көз жүгіртіп өттім. Онда мынадай жауаптар жазылған екен:
Р а х ы м:
1. Мен ешқандай айыпты емеспін.
2. Тіпті терезенің қасына жақындағаным да жоқ. Үзіліс бойы партада отырған күйімде кітап оқумен болдым.
3. Терезені кім сындырғанын Мұрат біледі.

М ұ р а т:
1. Мен терезені сындырғам жоқ.
2. Оны істеген Рахым.
3. Менің кінәлі емес екеніме Дәурен айғақ бола алады, өйткені үзіліс кезінде мен сонымен әңгімелесіп, қасында болғам.

Д ә у р е н:
1. Терезені сындырған мен емеспін.
2. Мен Мұратпен көптен аразбын, онымен сөйлеспеймін де, үзіліс аяқтала бергенде кітап оқып отырған Рахымның қасына бардым.
3. Терезені сындырған Төкен.

Т ө к е н:

1. Жоқ, терезені сындырған мен емеспін.
2. Сындырған Мұрат.
3. Дәуреннің мен сындырды дегені жала.

— Оқушыларды қажап қайта сұрағанымда, олардың әрқайсысы берген жауаптарының біреуі ғана өтірік, ал екеуі шындық екендігін айтты.

Осы фактілерге сүйеніп, терезе сындырған тентектің кім екенін анықтау керек!

"Математиктің" ұсынған қағазында жазылған осы сөздерді зер сала оқып шыққан соң, мұны маған қайт дейсің дегендей түр білдіріп, оған қарап бас көтердім. Менің бұл дағдарған қалпымды "математик" те ұқты білем, былайша жауап қатты:

— Менің қазір сабағым бар. Әне, сыныпқа кіруге қоңырау да берілді, мен сонда барам. Баяғыда "ғашықтар есебін" шешу үшін ойлау алгебрасынан өздеріңе оқыған менің дәрісімнің жәрдемімен талай қылмыстың сырын ашып жүрмін дегенің есімде. Енді соны бір сынап көрудің сәті түсті білем. Міне, қағаз бен қарындаш. Жаңа өзің оқып шыққан менің тергеуімдегі жауаптарға сүйене отырып, математикалық логика әдісімен есептеу арқылы терезе сындырған тентектің кім екенін мен сабақтан келгенше анықтап қой.

"Математик" осыларды айтып болды да, менің жауабымды күтпестен-ақ журналын қолтықтап сабағына жөнелді. Торға түскен тотыдай боп, бөлмеде жападан-жалғыз мен қалдым. Әуелі тас түйін боп ойланып, "математиктің" логикадан оқыған дәрісінің ұзын-ырғасын еске түсіруге тырысып бақтым. Бәрі бәз-баяғы қалпында, нақ бір кинодағы кадрдай, көз алдымнан тізбектеліп өтіп шықты. Пікір ұғымынан бастап пікірлерді көбейту, қосу және терістеу амалдарының бәрін ойша бір шолып шықтым. Осылайша өзіме-өзім ұйымдастырған аз-кем сынақтан кейін ғана "математиктің" әлгі беріп кеткен есебін шешуге кірістім.

Есептің шешуі. Рахымның бірінші жауабын — P_1, екінші жауабын — P_2, ал үшіншісін P_3 әріптері арқылы белгілейік. Сонымен қатар оқушылардың өтірік берген жауабын сол жауабының терістеуі түрінде белгілеуге келісеміз. Мәселен, Рахымның бірінші жауабы өтірік болса, ол P_1 арқылы белгіленеді.

Есеп шарты бойынша, логика тілімен айтқанда, Рахым жауаптарының екеуі ақиқат та, біреуі жалған. Сондықтан оның қай жауабы жалған екендігі жөнінде үш түрлі ұйғарым жасауға болады.

1. Айталық, Рахымның бірінші жауабы–(P_1) және екінші жауабы (P_2) ақиқат және де үшінші жауабы (P_3) жалған болсын. Бұл ұйғарымды ойлау алгебрасының формуласы түрінде былайша өрнектей аламыз: $P_1P_2P_3$.

2. Айталық, Рахымның бірінші жауабы (P_1) және үшінші жауабы (P_3) ақиқат және де екінші жауабы (P_2) жалған болсын. Сонда $P_1P_2P_3$ формуласы шығады.

3. Айталық, Рахымның екінші және үшінші жауаптары ақиқат және де бірінші жауабы жалған болса, онда: $\bar{P}_1P_2P_3$ болады.

Жалпы алғанда, осы үш ұйғарымның ең болмағанда біреуі шындық болатындықтан, мынадай теңдік жаза аламыз:

Рахымнан басқа оқушылардың жауаптарына да дәл осындай талдаулар жасай отырып, мына теңдеулерді құрамыз:

$$P_1P_2\bar{P}_3 \vee P_1\bar{P}_2P_3 \vee \bar{P}_1P_2P_3 = 1 \qquad (1)$$

$$M_1M_2\bar{M}_3 \vee M_1\bar{M}_2M_3 \vee \bar{M}_1M_2M_3 = 1 \qquad (2)$$

$$Д_1Д_2\bar{Д}_3 \vee Д_1\bar{Д}_2Д_3 \vee \bar{Д}_1Д_2Д_3 = 1 \qquad (3)$$

$$T_1T_2\bar{T}_3 \vee T_1\bar{T}_2T_3 \vee \bar{T}_1T_2T_3 = 1 \qquad (4)$$

Егерде оқушылар жауаптарын байыппен байқап қарайтын болсақ, онда Төкеннің бірінші жауабы мен үшінші жауабы тең мағыналы пікірлер екенін аңғару қиын емес. Демек, $T_1 = T_3$. Осыдан $\bar{T}_1 = \bar{T}_3$. Осы теңдіктерге сүйеніп, (4) теңдеуді былайша жазамыз:

$$T_1T_2\bar{T}_1 \vee T_1\bar{T}_2T_1 \vee \bar{T}_1T_2T_1 = 1$$

Бұл теңдеуді көбейту үшін орындалатын ауыстырылымдық және терімділік заңы бойынша түрлендіреміз, сонда:

$$\left(T_1 \cdot \bar{T}_1\right) \cdot T_2 \vee \left(T_1 \cdot T_1\right) \cdot \bar{T}_2 \vee \left(\bar{T}_1 \cdot T_1\right) \cdot T_2 = 1$$

Қайшылық заңы негізінде $T_1 \cdot \bar{T}_1 = 0$, ал жұтылу заңы бойынша $T_1 \cdot T_1 = T_1$. Сондықтан $0 \cdot T_2 \vee T_1 \cdot \bar{T}_2 \vee 0 \cdot T_2 = 1$. Ал бұдан $T_1 \cdot \bar{T}_2 = 1$ болатындығы шығады. Көбейтінді ақиқат болса, ондағы әрбір көбейткіш ақиқат болуы тиіс. Демек, $T_1 = 1$, $\bar{T}_2 = 1$. Терістеудің анықтамасы бойынша $\bar{T}_2 = 1$ теңдігінен $T_2 = 1$ болады дейміз. Сонымен Төкеннің бірінші жауабы ақиқат, ал екінші жауабы жалған екендігіне көз жеткіздік. Ендеше, терезені сындырушы Төкен емес және оның Мұрат сындырды деуі жалған.

Төкеннің жауабын талдаудан шыққан қорытындыға қарап, Дәуреннің "Терезені сындырған Төкен" деуі жала екенін көреміз. Демек, $Д_3 = 0$, ал бұдан осы теңдіктер негізінде (3) теңдіктен мынау шығады:

$$Д_1Д_2\bar{Д}_3 = 1$$

Ал бұдан $Д_1 = 1$, $Д_2 = 1$ және $\overline{Д}_3 = 1$. Басқаша айтқанда, Дәуреннің бірінші және екінші жауаптары ақиқат. Сондықтан терезе сындырған Дәурен емес және оның Мұратпен араз екендігі, үзіліс кезінде кітап оқып отырған Рахымның қасына баруы шындық.

Енді Мұраттың жауабын қарастырсақ, оның үшінші жауабы мен Дәуреннің екінші жауабы бір-біріне қарама-қарсы екенін байқаймыз. Сондықтан $М_3 = \overline{Д}_2$ деп алуымызға болады. Жоғарыда көрсетуіміз бойынша $Д_2 = 1$. Ендеше $\overline{Д}_2 = 0$. Демек, $М_3 = 0$, ал осыдан $\overline{М}_3 = 1$. Соңғы екі теңдіктердің негізінде жоғарыдағы (2) формула былайша анықталады:

$$М_1 \cdot М_2 \cdot \overline{М}_3 = 1$$

Осы теңдіктен $М_1 = 1$, $М_2 = 1$ және $\overline{М}_3 = 1$ болатындығы шығады.

Сонымен, Мұраттың бірінші, екінші жауаптары ақиқат болғандықтан, терезені сындырған Рахым деген қорытынды жасаймыз.

"Математик" есебінің осы баяндалып өткен шешуін қағазға түсіріп болғанымда, сабақтан оның өзі де келген еді. Ол менің жазбаларымды қолына алып, үнсіз біраз қарап тұрды да, селсоқ қана:

— Дұрыс екен, — дей салды.

Бұдан жөндем сөзді "математиктен" мен де күтпегем. Дегенмен "математиктің" мені есептен мүлдем нөл көретін нанымына осы жолы бір нұқсан келтірдім деп ойлаймын.

МАЗМҰНЫ

Нұрсұлтанов Қажи

Қызықты математика
Ертегі есептер

Редакторы З. Башбаева
Суретші М. Срайлова
Үйлестірушісі Г. Жадрина
Көркемдеуші редакторы Г.Солтанбаева
Техникалық редакторы Г. Сәбитова
Компьютерде беттеген Ә. Молдахметова

ИБ №15

Басуға 07.09.11 ж. қол қойылды. Пішімі $60x90^1/_{16}$. Офсеттік басылым. Офсеттік қағаз. Шартты баспа табағы 4,5. Есептік баспа табағы 4,8. Таралымы 2000 дана.

Таймас" баспа үйі" ЖШС.
050009, Алматы қаласы, Абай даңғылы, 153, 27 офис.
Тел./факс: 266-21-14, тел.: 250-09-95, 250-09-96, 250-09-97, 250-09-98.

ISBN 978-601-264-062-5

9 786012 640625