Қ.ҚАБДЫҚАЙЫРҰЛЫ
Л.Н.ОРАЗБЕКОВА

ЭКОНОМИКАДАҒЫ МАТЕМАТИКА

Алматы 1999

Қ. ҚАБДЫҚАЙЫРҰЛЫ
Л. Н. ОРАЗБЕКОВА

ЭКОНОМИКАДАҒЫ МАТЕМАТИКА

Оқу құралы

Алматы
"Қазақ университеті"
1999

Баспаға әл-Фараби атындағы Қазақ мемлекеттік ұлттық университетіндегі механика-математика факультетінің Ғылыми кеңесінің шешімімен ұсынылып, университеттің оқу-әдістемелік Кеңесі бекіткен

Пікір жазған

педагогика ғылымының кандидаты
Ғ.Б. Әбенова

Қ.Қабдықайырұлы, Л.Оразбекова.
Экономикадағы математика: Оқу құралы. -Алматы: Қазақ университеті, 1999. - 210 бет.

ISBN 5-7667-6709-9

Бұл оқулықта жоғары математика курсының функция, шек, туынды, анықталған және анықталмаған интеграл, дифференциалдық теңдеулер ұғымы, екі айнымалыдан тәуелді функция дифференциалы, сан қатары бөлімдері қарастырылып, қысқаша лекция мен практикалық есептерге топтастырылып берілген. Жоғары математиканың кейбір қарапайым экономикалық қолданыстары келтірілген.

Бұл оқу құралы экономика факультеттері студенттері және өз бетімен білімін жетілдірушілерге арналған.

ISBN 5-7

АЛҒЫ СӨЗ

Ақыл деген - денеге егілген дән,
Суғарылса кіреді оған да жан.
Ақылдың өсіп-өніп, зор аймағы
Көрген, білген нәрседен ғибрат алған.

Шәкәрім.

Бұл оқу құралы әл-Фараби атындағы ҚазМҰУ-дың экономист-студенттеріне арналған. "Экономикадағы математика" курсына жоспарланған сағат көлеміне сәйкестендіріліп жазылған. Бұнда жоғары математиканың функция, шек, үзіліссіздік, туынды және дифференциалдық, интегралдық есептеулер, дифференциалдық теңдеулер ұғымы, екі айнымалыдан тәуелді функция дифференциалы, сандық және дәрежелік қатарлар тарауларын қамтиды. Бірінші бөлімдегі әрбір лекциялық материалға екінші бөлімдегі практикалық сабақтар сәйкес келеді.

Теориялық материалдың негізгі көлемі Қ.Қабдықайырұлының университеттегі негізгі мамандығы математик емес факультеттерге арналып жазылған "Жоғары математика" атты оқулығынан алынды. Математикалық ұғымдардың экономикалық мағынасын ашатын, жоғары математиканың қарапайым экономикалық қолданыстарын көрсететін материалдар, кейбір экономикалық есептер Н.Ш.Кремердің, А.Я.Боярский оқулықтарынан алынған. Көптеген теоремалар, қасиеттер дәлелдеусіз қабылданып, оның орнына есептердің шығарылу жолдары көрсетілген.

Ал практикалық материалдар әр түрлі есеп кітаптарынан жинақталды. Үй тапсырмасының есептері стандарт (бәріне міндетті деңгей) және жоғарғы (бір жұлдызшамен (*) "төрттік" деңгей, екі жұлдызшамен (**) "бестік" деңгей) деңгейге бөлініп мөлшерленген.

Осылайша сұрыпталып жазылған бұл құралды оқулықпен жұмыс істеу тәжірибесі әлі қалыптаспаған бірінші курс студенті үшін күнделікті оқу құралы есебінде қолдануға тиімді болады деген ойдамыз. Айтылар тілектер мен сын-ескертпелерді ықыласпен қабылдаймыз.

Авторлар

БІРІНШІ БӨЛІМ

Бірінші лекция

ФУНКЦИЯ ҰҒЫМЫ

1.1. Жиын ұғымы. Қандай да бір заттардың бірігуін не тобын математикада жиын деп атайды. Мысалы, университеттегі студенттер жиыны; бір нақтылы саладағы өндірістер жиыны; натурал сандар жиыны. Егер A әрпімен қандай да бір жиынды, ал x - пен ондағы затты белгілесек, онда x A жиынының *элементі* деп аталып, былайша жазылады: $x \in A$. y A жиынының элементі болмаса, онда былайша жазады: $y \notin A$.

Бір де бір элементсіз жиынды *бос жиын* дейді де, былайша белгілейді: $\varnothing$.

Егер B жиыны A элементтерінің бір бөлігінен тұратын болса, онда B жиынын A - ң *ішкі жиыны* деп, былайша жазады: $B \subset A$.

Егер екі жиын бірдей элементтерден тұратын болса, оларды өзара *тең жиындар* дейді.

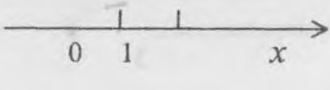
A және B жиындарының *бірігуі* деп, кемінде біреуінде жатқан элементтерден құрылған жиынды айтады: $C = A \bigcup B$.

A және B жиындарының *қиылысуы* деп осы екі жиында бірдей бар элементтерден құрылған жиынды айтады: $D = A \bigcap B$.

A және B жиындарының *айырымы* деп A жиынында жатып, B жиынында жатпайтын элементтерден құрылған жиынды айтады: $E = A \setminus B$.

Нақты сандардан құрылған жиынды *сандар жиыны* дейді. Мектеп курсынан сіздер R - нақты, Q - рационал, I - иррационал, Z - бүтін, N - натурал сандар жиынын білесіздер. $N \subset Z \subset Q \subset R$, $I \subset R$ және $R = Q \bigcup I$ екені айқын.

R - нақты сандар жиыны *сан түзуінің* (немесе *сан өсінің*), яғни санақ басы, бірлік өлшемі, оң бағыты көрсетілген түзу нүктелерімен белгіленеді.



X жиынының элементтері $a \le x \le b$ теңсіздігін қанағаттандырса *кесінді* (немесе *сегмент*) $[a,b]$ деп, $a < x < b$ теңсіздігін қанағаттандырса *интервал* $(a;b)$ деп, $a \le x < b$ немесе $a < x \le b$ теңсіздіктерін қанағаттандырса *жартылай интервал* $[a;b)$ және $(a;b]$ деп аталады. Бұған қоса $(-\infty;a)$, $(b;\infty)$, $(-\infty;\infty)$, $(-\infty;a]$ және $[b;\infty)$ шексіз интервалдар мен жарты интервалдар да қарастырылады. Осы жиындардың барлығын біз келешекте *X аралығы* терминіне біріктіреміз.

1.2. Экономика саласындағы функциялық тәуелділіктерге мысалдар. Экономика саласындағы кездесетін шамалар әдетте айнымалы шамалар болып келеді: өнім, еңбек өнімі, құн, қосымша құн, ақша, ақша айналымы, қаржы, процент, күрделі процент, сұраныс, халық санының өсуі, т.с.с. шамалардың бәрі уақытқа да, кеңістікке де байланысты өзгеріп отыратын шамалар.

Экономикалық шамалардың өзгерісін, өзара байланысын тереңірек зерттеп, заңдылықтарын айқындап, алдын ала болжау жүргізу үшін осы шамаларды байланыстыратын функция арқылы өрнектеп, математикалық тәсілдер арқылы зерттеу керек.

Мысалдар қарастырайық.

1. Айталық r - жұмыс күнінің ұзақтығы, V - қажетті уақыт, m-қосымша уақыт болсын. Осы үш шаманы байланыстыратын теңдеу жазайық

$$m = r - V$$

Егер, жұмыс күнінің ұзақтығы тұрақты болса, айталық $r = 10$ сағат, онда

$$m = 10 - V$$

2. Нақтылы жағдайларда қандай да бір товарға деген сұраныс оның бағасынан тәуелді болады. Товарға деген сұранысты g деп, товардың бағасын p деп белгілесек, айтылған тәуелділікті

$$g = f(p)$$

деп, функция түрінде жазуға болады. Бұл функция сұраныс функциясы деп аталады. Түрлі жағдайларға байланысты бұл функция әр түрлі болады, мысалы

$$g = \frac{500}{p+4}$$

3. Белгілі бір көлемдегі ақшаны қолданғаны үшін төленетін қаржы процент деп аталады. Айталық K бастапқы ақша (қор) болсын. p - жылдық (немесе айлық) процент мөлшері, n- жыл саны болсын. Қаржы саласында процент мөлшерінің орнына i- шектік процент мөлшерін (яғни, ақшаның бір бөлігіне төленетін процент) қолданған тиімді. Екеуінің арасында мынадай байланыс бар:

$$i = \frac{p}{100}.$$

Егер қосылған процентке келесі жылы процент есептелмесе, онда мұндай төлем қарапайым процент деп аталады. n жылдағы қарапайым проценттік өсім $K \cdot n \cdot i$ болады, ал барлық жиналған қор мынандай болады:

$$K_n = K + Kni = K(1+ni) \quad (*).$$

Осы формулада төрт айнымалы K, n, i, K_n шама бар. Басқа үшеуі белгілі болса осы шамалардың әрқайсысын есептеуге болады.

Ай сайын 10 проценттік қарапайым өсімге берілген ақша 5 жылдан кейін 10000 болуы үшін басында қанша ақша салу керектігін есептейік.

$n = 5$ жыл $\times$ 12 ай = 60 ай

$p = 10$ %, $i = \frac{10}{100} = 0{,}1$

$K_n = 10000$

K -ны табу керек. $(*)$ формуладан K -ны тауып белгілі мәндерді орнына қоямыз.

$$K = \frac{K_n}{1+ni} = \frac{10000}{1+60 \cdot 0{,}1} = 1428{,}5$$

Сонымен $K = 1428{,}5$.

Бұдан да басқа сан түрлі мысалдар келтіруге болады. Бәрі күрделене келе математикалық мәселелерді шешуге, функцияны зерт теуге әкеп соғады.

1.3. Функция ұғымы. Мәні өзгеріссіз болатын шаманы *тұрақты шама* деп атайды.

Өзінің тұрақтылығын тек белгілі бір процесс жағдайында ғана сақтайтын шаманы ***параметр*** деп атайды.

Түрлі мәнді қабылдайтын шаманы ***айнымалы*** деп атайды. Мысалы, бірқалыпты қозғалысты қарастырсақ $S = v \cdot t$, S -жол мен t уақыт айнымалы шама болады да, v - параметр болады.

Функция ұғымына көшейік.

Анықтама. X жиынының әр элементіне белгілі заң немесе ереже бойынша $У$ жиынының бір элементі сәйкес қойылса, онда X жиынында функция берілген деп атайды да, көбінесе $y = f(x)$ деп белгілейді.

Берілген функция анықталатын x аргументтерінің жиынтығын функцияның *анықталу облысы* деп, ал сәйкес y айнымалының жиынтығын *мәндер облысы* деп атайды. Функцияның анықталу облысын $D(f)$ деп, мәндер жиынын $E(f)$ деп белгілейік.

Экономикалық есептерде функция көбінесе көп айнымалыдан тәуелді болады:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

мұндағы $x_1, x_2, \dots, x_n$ - тәуелсіз айнымалы немесе аргумент, y - тәуелді айнымалы немесе функция.

Функция аргументтің кез келген мәнінде мағыналы бола бермейді. Мысалы цех ауданын S, онда орналасқан станок санынан x тәуелді $S = S(x)$ функция деп қарастырайық. Сонда бұл функция бөлшек немесе теріс санды станоктар үшін мағынасыз болады.

1.4.Функцияның берілу тәсілдері. Функцияның кез келген аргументіне (анықталу облысында) функция мәнін көрсете алсақ, онда біз функция берілді дейміз.

1. *Функцияның таблицалық берілуі.* Егер функцияның анықталу облысы арқылы жиын болса, мұндай функцияны барлық парларды атап көрсету арқылы беруге болады, яғни сол парлар жиынын мына таблица түрінде жазамыз:

x	x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n
y	y_1	y_2	...	y_{n-1}	y_n

Өзіміз білетін сандар квадраттарының, кубтарының, түбірлерінің, логарифмдердің таблицалары, сондай-ақ тригонометриялық функциялар мәндерінің таблицаларының әрқайсысы осы функцияның таблицалық берілуінің мысалы бола алады. Сондай-ақ бухгалтерлік жұмыстарда, жинақ кассаларында, банктерде көптеген дайын таблицалар қолданылады.

2. *Функцияның аналитикалық тәсілмен берілуі.* Бұл жағдайда айнымалылар арасындағы функциялық байланыс теңдеу арқылы беріледі. Бұлайша берілу тәсілі анықталу облысы ақырсыз жиын болып келген функцияларды сипаттап көрсетуге аса қолайлы.

Егер теңдеу функцияға қатысты шешілген болса, яғни $y = f(x)$ түрінде, онда функция *айқын түрде* берілген дейді. Егер теңдеу функцияға қатысты шешілмеген болса, яғни $F(x, y) = 0$ түрінде, онда функция *айқындалмаған түрде* берілген дейді.

Мысалы, цехтың ауданы S берілген болып x-ені, y-ұзындығы десек,

$$x \cdot y = S$$

теңдеуінде y айнымалысы x-тен тәуелді айқындалмаған функция болады. Ал осы теңдеуден y-ті тауып, яғни $y = \frac{S}{x}$-ті жазсақ, онда y функциясы айқын түрге келеді.

3. *Функцияның графиктік берілуі.* Бұл жағдайда функцияның аргументке байланысты өзгерісін графиктік түрде көрсетеді.

Экономикалық талдауларда және экономикалық статистикада функция өзгерісін көрсету үшін әдетте тік бұрышты декарт координат жүйесін қолданады, тек кейбір ерекше жағдайларда ғана поляр координат жүйесін қолданады.

Талдауларда қандай да бір функциялық тәуелділікті нақтылы математикалық теңдеулермен немесе таблицалық мәнімен беруге мүмкін болмайды. Мысалы, әр нақтылы t уақытта бір елдің нақтылы N саны болады, бұл санды t уақыттан тәуелді функция деп қарастыруға болады

$$N = F(t).$$

Осы типтес тәуелділіктерді графиктік тәсілмен көрсеткен қолайлы.

1.5. Сандық функция классификациясы мен қарапайым сипаттамалары.

1. Сандық функция классификациясы. f функциясы $y = f(x)$ формуласымен берілсін. $f(x)$ өрнегін алу үшін x аргументі мен тұрақты сандарға саны шектеулі алгебралық амалдар (қосу, көбейту, бөлу, түбір табу) қолданылатын болса, онда өрнекті алгебралық өрнек деп, сәйкес функцияны *алгебралық функция* деп атайды.

Алгебралық емес функцияларды *трансценденттік функция* деп атайды. Көрсеткіштік, логарифмдік, тригонометриялық, кері тригонометриялық функциялардың барлығы да трансценденттік функциялар қатарына жатады. Сондай-ақ, $y = x^{\alpha}$ формуласымен (мұндағы α -иррационал сан) анықталатын функция да трансценденттік функция болады.

2. Сандық функциялардың қарапайым сипаттамаларын қарастырайық.

а) Шенелген және шенелмеген функциялар. $y = f(x)$ функциясы берілсін. Егер оң C саны табылып барлық $x \in X \subset D(f)$ мәндері үшін $|f(x)| \le C$ теңсіздігі орындалса, онда f функциясы X жиынында *шенелген функция* деп аталады.

Мынадай, $\exists$ - табылады немесе бар болады, $\forall$ - кез келген математикалық символдар көмегімен анықтаманы жазайық:

$$\exists C > 0 | \forall x \in X \subset D(f) \Rightarrow |f(x)| \le C$$

Шенелмеген функция анықтамасын алу үшін шенелген функция анықтамасындағы $\exists$ мен $\forall$ символдарының орнын ауыстыру жеткілікті:

$$\forall C > 0 | \exists x' \in X \subset D(f) \Rightarrow |f(x')| > C$$

б) Жұп және тақ функциялар. Анықталу облысы координат басына қарағанда симметриялы болып келген функция *жұп (тақ)* деп аталады, егер кез келген $x \in D(f)$ үшін $f(-x) = f(x)$ $(f(-x) = -f(x))$ теңдігі орындалса. Жұп функцияның графигі ординаталар осіне қатысты симметриялы да, тақ функцияның графигі координаталар бас нүктесіне қатысты симметриялы болып келеді.

в) Периодты функциялар. Егер кез келген $x \in X$ және $x + T \in X$ үшін $f(x+T) = f(x)$ теңдігі орындалатын T саны табылса, онда $f(x)$ ***периодты функция*** деп аталады. Осындай T сандардың ең кішісі функцияның ***негізгі периоды*** деп аталады. Егер f функциясының негізгі периоды T болса, оның графигін салу үшін $[0;T]$ аралығындағы функция графигін білу жеткілікті. Осы салынған графикті абсциссалар осі бойымен $k \cdot T(k \in Z)$ аралығына көшіру керек.

г) Бірсазды (монотонды) функциялар. Егер Е жиынының кез келген $x_1 < x_2$ элементі үшін $f(x_1) < f(x_2)$ теңсіздігі орындалса, онда $f(x)$ функциясы E жиынында ***өспелі*** деп аталады. Бұны символдар арқылы былайша жазуға болады:

$$\forall x_1, x_2 \in E | x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Егер $\forall x_1, x_2 \in E | x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ болса, онда $f(x)$ функциясы E жиынында ***кемімейтін*** функция деп аталады.

Егер $\forall x_1, x_2 \in E | x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ болса, онда $f(x)$ функциясы ***кемімелі*** деп аталады.

Егер $\forall x_1, x_2 \in E | x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$ болса, онда $f(x)$ функциясы ***өспейтін*** функция деп аталады.

E жиынында өспелі, кемімейтін, кемімелі және өспейтін функцияларды осы жиында ***бірсазды функция*** деп атайды.

Кейде өспелі және кемімелі функцияларды "қатаң бірсазды" деп те атайды.

1.6. Негізгі элементар функциялар.

1. Негізгі элементар функция деп төмендегі функцияларды айтамыз:

1) дәрежелік функция $y = x^{\alpha}$, мұндағы $\alpha \in R$;

2) көрсеткіштік функция $y = a^{x}$, мұндағы $a > 0, a \neq 1$;

3) логарифмдік функция $y = \log_a x$, мұндағы $a > 0$, $a \neq 1$;

4) тригонометриялық функциялар $y = \sin x, y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$, $y = \sec x$, $y = \operatorname{cosec} x$;

5) кері тригонометриялық функциялар $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$.

Жалпы *элементар функция* деп негізгі элементар функцияларға қосу (азайту), көбейту, бөлу амалдарын және саны ақырлы композицияны (күрделі функцияны алуды) қолдану нәтижесінде табылатын бір ғана аналитикалық өрнекпен (формуламен) жазылған функцияны атайды. Мысалы, $\varphi(x) = arctg\left(\lg^2 x + \sin x\right)$.

Элементар емес функция мысалы ретінде $f(x) = |x|$ функциясын келтіруге болады:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, x < 0 \\ 0, x = 0 \\ x, x > 0 \end{cases}$$

2. Функция графигін белгілі функция графигін жылжыту және деформациялау арқылы алу.

$y = f(x)$ функциясының графигі берілсе, төмендегі функциялардың графигін салуға болады:

1. $y = f(x - a)$. Бұл функция графигі берілген графикті Ox осінің бойымен a шамаға ($a > 0$ болса оңға; $a < 0$ болса солға) жылжыту арқылы салынады.

2. $y=f(x)+b$. Бұл функция графигі берілген графикті Oy осінің бойымен b шамаға ($b>0$ болса жоғары; $b<0$ болса төмен) жылжыту арқылы салынады.

3. $y=C\cdot f(x)$. Берілген графикті Oy осі бойымен $C>1$ болғанда C рет созу керек те, $0<C<1$ болғанда $1/C$ рет қысу керек. $C<0$ болғанда функция графигі ретінде $y=|C|\cdot f(x)$ функциясының графигінің Ox осіне қарағандағы симметриялық бейнесін аламыз.

4. $y=f(kx)$. Берілген графикті Ox осі бойымен $0<k<1$ болғанда $1/k$ рет созамыз, $k>1$ болғанда k рет сығамыз. $k<0$ болғанда функция графигі ретінде $y=f(|k|x)$ функциясының графигін Oy осіне қарағандағы симметриялық бейнесін аламыз.

Яғни, $y=f(x)$ функциясының графигін біртіндеп түрлендіру арқылы $y=C\cdot f[k(x-a)]+b$ функциясының графигін салуға болады.

Мысал. $y=-3\sin(2x+8)$ функциясының графигін салу керек.

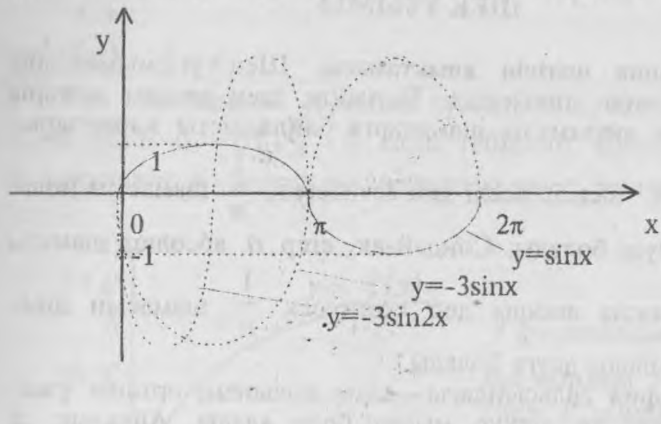
Шешуі. Берілген функцияны түрлендіріп,

$$y=-3\sin(2x+8)=-3\sin 2(x+4), \qquad y=Cf\left[k(x-a)\right]+b$$

өрнегімен салыстырайық: $C=-3$, $k=2$, $a=-4$, $b=0$.

Берілген функция біздің мысалда $y=\sin x$ жоғарыдағы нұсқауды пайдаланып функция графигін салайық. Белгілі $y=\sin x$ функциясының графигінің әрбір нүктесінің ординатасын - 3-ке көбейтіп, абсциссасын өзгертусіз алып, $y=-3\sin x$ функциясының графигін саламыз; $y=-3\sin x$ функциясының графигінің әрбір нүктесінің абсциссасын 2 есе азайтып, ординатасын өзгертусіз алып $y=-3\sin 2x$ функциясының графигін $0x$ осі бойымен сол жаққа 4 өлшем бірлікке жылжытамыз да ізделінді графикті аламыз.

Берілген функцияның периодтылығын ескеріп, алынған графикті екі жаққа периодты жалғастырып салуға болады.



Екінші лекция

ШЕК ҰҒЫМЫ

2.1.Функция шегінің анықтамасы. Шек ұғымымен біз мектеп курсынан таныспыз. Негізінде шек ұғымы жоғары математикада айнымалы шамаларға байланысты қарастырылады. Егер n шексіз өседі деп есептесек, $\frac{1}{n}$ шамасын нөлге ұмтылады деуге болады. Сондай-ақ, егер n абсолют шамасы бойынша шексіз азаяды деп есептесек $\frac{1}{n}$ шамасын шексіздікке ұмтылады деуге болады.

Демография саласындағы адам жасының орташа ұзақтығын есептеу де шекке мысал бола алады. Айталық x жастағы адамның енді алдында жасайтын өмірінің орташа ұзақтығы e_x дейік. Әрине, жас балаға қарағанда 80 жастағы қарт адам үшін бұл орташа ұзақтық бірталай аз екенін түсіну қиын емес. Жас ұлғайған сайын алдымыздағы жастың ұзақтығы e_x әрине қысқарады. Бірақ, алдын ала e_x нөлге тең болатын x-ті көрсету мүмкін емес. Олай болғанда адам сол жасқа жеткенде бірден өлу керек болар еді. Сонымен e_x шамасы, x өскен сайын, еш уақытта нөлге тең емес, ол тек біртіндеп нөлге ұмтылады.

Енді функция шегінің анықтамасын берейік. a нүктесінің қандайда бір $(c;d)$ маңайында (мүмкін a нүктесінде де) анықталған f функциясын қарастырайық.

1- анықтама. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ санына сәйкес $\delta > 0$ саны табылып, $0 < |x-a| < \delta$ шартын қанағаттандыратын барлық x үшін $|f(x) - A| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда A санын f функциясының x-тің a-ға ұмтылғандағы шегі деп аталып, былай белгіленеді:

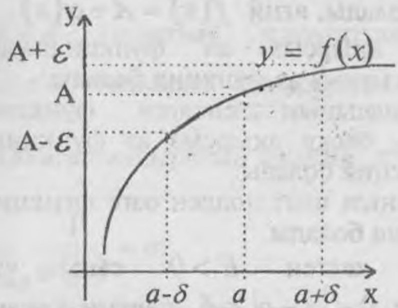
$$A = \lim_{x \to a} f(x) \qquad (1)$$

Символдар арқылы жазсақ:

$$(A = \lim_{x \to a} f(x)) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0)(0 < |x - a| < \delta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Бұл анықтаманы суретпен түсіндірейік, яғни кез келген $\varepsilon > 0$ үшін $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып, аргумент мәндері a нүктесінің δ маңайына (тесілген) тиісті болғанда



f функциясының сәйкес мәндері A нүктесінің ε маңайына (y осі бойында) тиісті болады.

2.2. Бір жақты шектер. Егер $x < a$ және $x \to a$ болса, онда $x \to a - 0$ деп, сәйкесінше $x > a$ және $x \to a$ болса, онда $x \to a + 0$ деп жазады.

$$f(a-0) = \lim_{x \to a-0} f(x) \quad \left(f(a+0) = \lim_{x \to a+0} f(x) \right)$$

санын x-тің a-ға ұмтылғандағы $f(x)$ функциясының *сол жақты (оң жақты) шегі* деп аталады.

$x \to a$ жағдайдағы f функциясының (екі жақты) шегі мен оның бір жақты шектерінің арасындағы байланысты мына теорема арқылы тұжырымдайды.

Теорема. $A = \lim_{x \to a} f(x)$ болуы үшін $A = \lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x)$ болуы қажетті және жеткілікті.

2.3. Ақырсыз аз және ақырсыз үлкен функциялар.

Анықтама. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $\delta = \delta(\varepsilon)$ саны табылып $0 < |x - a| < \delta$ шартын қанағаттандыратын барлық x үшін $|\alpha(x)| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда $\alpha(x)$ функциясы $x \to a$ жағдайда ақырсыз аз функция деп аталады және былай жазуға болады: $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$.

Ақырсыз аз функциялардың қасиеттерін келтірейік.

1^0. Егер $f(x)$ функциясы $x \to a(x \to \infty)$ жағдайында A шегі бар болса, онда осы функцияны A саны мен $x \to a(x \to \infty)$ жағдайда ақырсыз аз болатын $\alpha(x)$ шаманың қосындысы түрінде жазуға болады, яғни $f(x) = A + \alpha(x)$.

2^0. Саны шектеулі ақырсыз аз функциялардың алгебралық қосындысы да ақырсыз аз функция болады.

3^0. Ақырсыз аз функциясының шенелген функцияға (сонымен қатар, тұрақтыға, басқа ақырсыз аз функцияға) көбейтіндісі ақырсыз аз функция болады.

4^0. Ақырсыз аз функцияның шегі нолден өзге функцияға қатынасы ақырсыз аз функция болады.

Анықтама. Егер кез келген $E > 0$ саны үшін $\delta = \delta(E > 0)$ саны табылып $0 < |x - a| < \delta$ шартын қанағаттандыратын барлық x үшін $|f(x)| > E$ теңсіздігі орындалса, онда f функциясы $x \to a$ жағдайда ақырсыз үлкен функция деп аталады және былай жазуға болады:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

Ақырсыз үлкен функциялардың қасиеттерін көрсетейік.

1^0. Ақырсыз үлкен функцияның шегі нолден өзге функцияға көбейтіндісі ақырсыз үлкен функция болады.

2^0. Ақырсыз үлкен функция мен шенелген функция қосындысы ақырсыз үлкен функция болады.

3^0. Ақырсыз үлкен функцияның a нүктесінде шегі бар функцияға қатынасы ақырсыз үлкен функция болады.

Енді ақырсыз аз функциялар мен ақырсыз үлкен функциялар арасындағы қарапайым байланысты көрсетейік.

Теорема. Егер $\alpha = \alpha(x)$ функциясы $x \to a$ жағдайда ақырсыз аз және $x \neq a$ үшін $\alpha(x) \neq 0$ болса, онда $x \to a$ жағдайда $f(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$ функциясы ақырсыз үлкен болады.

Дәлелдеуі. $\alpha = \alpha(x)$ функциясы $x \to a$ жағдайда ақырсыз аз болсын. Ақырсыз аз функцияның анықтамасы бойынша кез келген $\varepsilon > 0$ үшін $\delta = \delta(\varepsilon > 0)$ саны табылып, $0 < |x - a| < \delta$ шартын қанағаттандыратын x үшін $0 < |\alpha(x)| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалады. Бұдан $0 < |x - a| < \delta$ шартын қанағаттандыратын барлық x үшін $\left|\dfrac{1}{\alpha(x)}\right| > \dfrac{1}{\varepsilon} = E$, яғни $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{\alpha(x)} = \infty$.

Осыған ұқсас түрде мына тұжырым дәлелденеді: Егер f функциясы $x \to a$ жағдайда ақырсыз үлкен болса, онда $\alpha(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ функциясы $x \to a$ жағдайда ақырсыз аз болады.

2.4. Фукция шектері туралы теоремалар. Бұл пунктте функция шектеріне арифметикалық амалдар қолдану жөнінде әңгімеленеді.

1-теорема. Егер $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ және $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ шектері бар болса, онда $\lim\limits_{x \to a} \left[f(x) \pm g(x)\right]$ шегі де бар болады және мына теңдік орындалады:

$$\lim_{x \to a} \left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) \qquad (2)$$

2-теорема. Егер $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ және $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ шектері бар болса, онда $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]$ шегі де бар болады және мына теңдік орындалады:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x) \qquad (3)$$

Ескерту. Егер $f(x)=C$ (тұрақты сан) болса, онда

$$\lim_{x\to a} f(x)=C$$

1-салдар. Егер $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ бар болса, онда кез келген C саны үшін $\lim\limits_{x\to a} C\cdot f(x)=C\cdot\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (4)

2-салдар. Егер $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ бар болып, k - натурал сан болса, онда $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\right)^k=\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^k$ (5)

3-теорема. Егер $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ және $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$ шектері бар болса, онда $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ шегі де бар болады және

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} \qquad (6)$$

теңдігі орындалды.

Енді бірнеше мысал қарастырайық.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$ шегін есепте.

Шешуі. Шенелген функцияның ($|\sin x| < 1$) ақырсыз үлкен $x(x \to \infty)$ шамаға қатынасы ақырсыз аз шама болатындықтан

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 0.$$

2. $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}$ шегін есепте.

Шешуі. Ақырсыз аз $x(x \to 0)$ шаманың шенелген функцияға ($\left|\cos\frac{1}{x}\right| \le 1$) көбейтіндісі ақырсыз аз шама

болатындықтан $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0$

2.5. Күрделі процент жөнінде. Көптеген экономикалық есептерде күрделі процентпен жұмыс істеу керек болады. Бұнда бастапқы қаржыға берілетін процент қосылып, келесі уақыт бөлігінде процент бастапқы қаржыға емес, проценті қосылып өскен қаржыға есептеледі.

Айталық бастапқы K қаржыға n жыл бойы i - шектік күрделі процент мөлшері белгіленді дейік. Бастапқы K қаржы шамасы

1 жылдан кейін: $K_1 = K + K\,i = K(1+i)$

2 жылдан кейін: $K_2 = K_1 + K_1\,i = K_1(1+i) = K(1+i)^2$

....

n жылдан кейін: $K_n = K_{n-1} + K_{n-1}\,i = K_{n-1}(1+i) = K(1+i)^n$ мөлшерге өседі, яғни n жылдан кейін бастапқы K қаржы былайша өзгереді:

$$K_n = K(1+i)^n \qquad (7)$$

$1+i = r$ өрнегі күрделі процент коэффиценті деп аталады. Сонымен,

$$K_n = K\,r^n \qquad (8)$$

Алдыңғы тараудағы қарастырылған қарапайым процентке келтірілген мысалды күрделі проценттік өсуді қолданып шығарайық

Сонда $n = 5$ *жыл* x 12 *ай* = *60 ай*

$$p=10\%, i=0{,}1$$
$$K_n=10000$$

K - ны табу керек. (7) формуладан K - ны тауып сандық мәндерін қоямыз.

$$K=\frac{K_n}{(1+i)^n}=\frac{10000}{(1+0{,}1)^{60}}=\frac{10000}{304{,}8}=32{,}8$$

Әрине r-дің n дәрежесін есептеу, тіпті есептеуіш машиналарды қолданған күннің өзінде, қиынға соғады. Егер логарифмдер таблицасын қолдансақ бұл есепті шешу қиынға соқпайды.

Мысалы, $x=1{,}1^{60}$, $\lg x=60\ \lg 1{,}1=60\cdot 0{,}0414=2{,}484$

бұдан $x=304{,}8$

Ал практикада дайын r коэффициентінің таблицасын қолданады.

(8)` формулада төрт айнымалы K, n, i, K_n шама бар. Басқа үшеуі белгілі болса, осы шамалардың әрқайсысын есептеуге болады.

(8)` формуладан r табайық:

$$\log r=\frac{\log K_n-\log K}{n}$$

Логарифмдер таблицасын қолданып r - дің мәнін, яғни p проценттік мөлшерді табуға болады.

$$r=1+i=1+\frac{p}{100},\quad 100r=100+p,\quad p=100r-100 \qquad (9)$$

Экономикалық талдауларда (9) формуланы өндіріс дамуының орташа қарқынын табуда жиі қолданады.

Мысалы. Бес жылдың ішінде өнім өндіру көлемі 85%- ке өсу керек деп жоспарланған болса, жылдық орташа өсу қарқыны қандай болу керек ?

Жыл басында өндіріс көлемі K болсын. 5 жылдан кейін ол $K_5=K\cdot r^5$ болады. Бірақ, $K_5=1{,}85K$ болу керек деп жоспарланған, яғни $1{,}85K=K\cdot r^5$ осыдан $r^5=1{,}85$, $r=1{,}131$. (9) формуладан $p=13{,}1\%$ екені шығады.

Үшінші лекция

АҚЫРСЫЗ АЗ ФУНКЦИЯЛАРДЫ САЛЫСТЫРУ БІРІНШІ ЖӘНЕ ЕКІНШІ ТАМАША ШЕКТЕР

3.1. Ақырсыз аз функцияларды салыстыру. Ақырсыз аз функцияларды салыстыру үшін, олардың $x \to a$ жағдайдағы қатынасының сипаты пайдаланылады. $\alpha(x)$ және $\beta(x)$ функциялары $x \to a$ жағдайда ақырсыз аз функциялар және $x \neq a$ болғанда $\alpha(x) \neq 0$, $\beta(x) \neq 0$ дейік.

1-анықтама. Егер $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ (1)

болса, онда $x \to a$ жағдайда $\alpha(x)$ функциясы $\beta(x)$ функциясымен салыстырғанда жоғары ретті ақырсыз аз функция деп аталады және $\alpha(x) = 0(\beta(x))$ деп белгілейді.

2-анықтама. Егер $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$ $(C = const)$

болса, онда $x \to a$ жағдайда $\alpha(x)$ пен $\beta(x)$ функцияларын бірдей ретті ақырсыз аз функциялар деп атайды.

3-анықтама. Егер $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ $\left(\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1\right)$

болса, онда $x \to a$ жағдайда $\alpha(x)$ мен $\beta(x)$ функцияларын эквивалентті ақырсыз аз функциялар деп атайды да, $\alpha(x) \sim \beta(x)$ $(x \to a)$ деп белгілейді.

Егер $x \to a$ жағдайда ақырсыз аз екі функция қатынасының шегі болмаса / не анықталмаған болса /, онда бұл екі функцияны өзара салыстыруға болмайды.

Екі функцияның өзара эквиваленттілігінің қажетті де жеткілікті шартын мына теорема түрінде айтады .

1- теорема. $x \neq 0$ болғанда $\alpha(x) \neq 0$, $\beta(x) \neq 0$ шарттарын қанағаттандыратын $\alpha(x)$ және $\beta(x)$

функциялары $x \to a$ жағдайда эквивалентті ақырсыз аз функциялар болуы үшін $\beta - \alpha = 0(\alpha)$ немесе $\beta - \alpha = 0(\beta)$ $(x \to a)$ болуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеуі. Қажеттілік. $x \to a$ жағдайда $\alpha(x) \sim \beta(x)$ болсын. Сонда $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. Бұдан, $\lim\limits_{x \to a} \left(1 - \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right) = 0$, яғни $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\beta(x) - \alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ немесе (1) формуладан $x \to a$ жағдайда $\beta - \alpha = 0(\beta)$. Осыған ұқсас түрде $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$ теңдігінен $x \to a$ жағдайда $\beta - \alpha = 0(\alpha)$ болатыны шығады.

Жеткіліктілік. $x \to a$ жағдайда $\beta - \alpha = 0(\beta)$ болсын. Сонда $\dfrac{\beta - \alpha}{\beta} = \dfrac{0(\beta)}{\beta}$ немесе $1 - \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{0(\beta)}{\beta}$, яғни

$\lim\limits_{x \to a} \left(1 - \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{0(\beta)}{\beta} = 0$. Бұдан $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

$\beta - \alpha = 0(\alpha)$ теңдігінің жеткілікті болатыны осыған ұқсас түрде дәлелденеді.

Келесі теорема іс жүзінде пайдалануға аса қолайлы.

2- теорема. Айталық, $x \to a$ жағдайда $\alpha \sim \alpha_1$ және $\beta \sim \beta_1$ болсын. Сонда, егер $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ бар болса, онда $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ шегі де бар болады және $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ теңдігі орындалады.

$x \to 0$ жағдайда мына ақырсыз аз функциялар эквивалентті болады:

$$x \sim \sin x \sim tgx \sim \arcsin x \sim arctgx \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1.$$

Демографияда x жасқа жеткен адамдардың алдыңғы өмірінің орташа ұзақтығы e_x - пен қатар, сол x жасқа жеткендердің санын l_x - ті де қарастырады.

Айталық дүниеге келген 1000 сәбидің 172-сі 80 жасқа, 46-сы 90 жасқа, 6-сы 100 жасқа , 0,5-сі (яғни 2000 адамның біреуі) 110 жасқа жетті дейік. Және де, 80 жасқа жеткендердің қалған өмірінің орташа ұзақтығы T_{80} = 7,2, сол сияқты l_{100} = 3,5, l_{110} = 1,5 болсын дейік.

Енді x жасқа жеткен адамдардың барлығы бірігіп енді қанша жыл өмір сүретінін есептейік. Оны T_x деп белгілейік және ол $e_x\, l_x$ - ке тең болады. Сонда, T_{80} = 7,2 × 172 = 1238,4 жыл, T_{100} = 3,5 × 6 = 21 жыл, T_{110} = 0,5 × 1,5 = 0,75. Осыдан x өскен сайын T_x - те ақырсыз аз шама екенін көреміз. Бірақ T_x - тің реті e_x немесе l_x - тің ретінен жоғары. Шынында да

$$T_x = l_x\, e_x.$$

Сондықтан $T_x : l_x = e_x \to 0$ және $T_x : e_x = l_x \to 0$.

3.2. Бірінші және екінші тамаша шектер.

1-теорема. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (бірінші тамаша шек)

Бірінші тамаша шектің салдары:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=1$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx}{x}=1$

Бұл теореманы дәлелдеуінің орнына бірнеше мысалдар қарастырайық .

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$ шегін есепте.

Шешуі. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}=3\cdot 1=3$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(x^n\right)}{(\sin x)^m}$ шегін есепте, мұндағы n мен m оң бүтін сандар.

Шешуі.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^n\right)}{(\sin x)^m}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^m\sin\left(x^n\right)\cdot x^n}{(\sin x)^m\cdot x^m\cdot x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{x^n}{x^m}=$$

$$\begin{cases}0, n>0\\ 1, n=m\\ \infty, n<m\end{cases}$$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$ шегін есепте.

Шешуі

$$\lim_{x\to\infty}x\ \sin\frac{1}{x}=(\infty\cdot 0)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\frac{1}{x}=y\\ x\to\infty\Rightarrow y\to 0\end{array}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$$

2-теорема. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ (екінші тамаша шек) $e=2{,}718281...$ саны Эйлер саны деп аталады.

Екінші тамаша шектің салдары:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$; жеке жағдайда $(a=e)$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$; жеке жағдайда $(a=e)$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha.$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\left(1^{\infty}\right)=\left|-\dfrac{1}{x}=\alpha, x=-\dfrac{1}{\alpha}, x\to\infty\to\alpha\to 0\right|=$

$=\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}}=\lim\limits_{\alpha\to 0}\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{-1}=\left[\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{-1}=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}=\left(1^{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2-6}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{6}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}=$

$=\left|-\dfrac{6}{3x+2}=\alpha, x\to\infty, \alpha\to 0, -\dfrac{6}{\alpha}=3x+2\Rightarrow x=-\dfrac{2}{\alpha}-\dfrac{2}{3}\right|=$

$=\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{-\frac{2}{3\alpha}-\frac{2}{9}+\frac{1}{3}}=\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{-\frac{2}{3\alpha}+\frac{1}{9}}=\lim\limits_{\alpha\to 0}\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{-\frac{2}{3}}\cdot$

$\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{9}}=e^{-\frac{2}{3}}\cdot 1^{\frac{1}{9}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{e^{2}}}.$

Екінші тамаша шектің экономикалық қолданысын көрсететін бір мысал қарастырайық. Жинақ кассасы салынған ақшаға жылына екі процент өсім төлейді дейік. 1 қаңтарда 100 теңге салсақ жыл соңында 2 теңге өсім аламыз. Ал егер 1-шілдеде алатын болсақ, 2 теңге емес, 1 теңге төлейді. 1-сәуірде алсақ 50 тиын (2·1/4) ғана төлейді.

Жинақ кассалары процентті жылдың соңында немесе ақшаны түгелдей қайтып алған кезде ғана қосады. Сондықтан, салынған 100 теңгені 1 шілдеде толық алып, қайтадан салған тиімді. Шынында да, жыл соңында алсақ 102 теңге болады. Ал 1 шілдеде алсақ 101 теңге аламыз, ал бірақ екінші жарты жылға енді 100 теңгеге емес, салынған 101 теңгеге процент есептеліп, жыл соңында 102,1 теңге аламыз.

Егер айына бір рет немесе тіпті жұмасына бір рет алып қайта салып отырсақ, бұдан да көп процент қосылады Шындығында күніне бір рет алып қайта салу осы операцияның шегі болар еді, себебі жинақ кассасы күннің бөлігіне процент есептемейді. Ал математикалық тұрғыдан алсақ осы операцияны шексіз жалғастыра беруге болады дегенді елестету қиын емес.

Сонымен, жылына m рет осы операцияны жүргіздік дейік және шектік жылдық проценттік өсім i болсын. Сонда ақшаның 1 бөлігіне $\frac{1}{m}$ жыл өткенде $\frac{i}{m}$ өсім қосылады. Яғни, 1 бөлік ақша өз өсімімен бірге $\frac{1}{m}$ жыл өткеннен кейін $1+\frac{i}{m}$,

$\frac{2}{m}$ жыл өткеннен кейін $\left(1+\frac{i}{m}\right)^2$,

....

1 жыл өткеннен кейін $\left(1+\frac{i}{m}\right)^m$,

....

n жыл өткеннен кейін $\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m \cdot n}$ болады.

Сонымен бастапқы салынған K мөлшердегі ақша жылдық процент өсімі i болса және ол жылына m рет қосылып отырса, n жылдан кейін барлық K_n ақша мынадай болады:

$$K_n = K\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m \cdot n}.$$

Мысалы, жылдық процент мөлшері p=6% болатын K=100000$, n =3 жылға салынды делік. Процент мөлшері ай сайын қосылып отырады деп, соңғы ақша мөлшерін есептейік.

Шешуі: K=100000$, n =3 , i=0,06, m=12.

$$K_3 = 100000\left(1+\frac{0,06}{12}\right)^{12 \cdot 3} = 10^5\,(1,005)^{36} = 119620\$.$$

Салыстыру үшін, егер жылдық процент күрделі болса, онда K_3=119101,6$, қарапайым процент болса K_3=118000$ мәніне тең болатынын өткен лекцияларда есептелген.

Егер проценттің қосылуы үздіксіз болып тұрады (яғни $m \to \infty$) десек, онда

$$K_n = \lim_{m\to\infty} K\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot n} = K\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot n} =$$

$$= K\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{i}\cdot in} = \left|\frac{i}{m}=x\right| = K\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}in} = K\,e^{ni},$$

$$K_n = K\,e^{ni}.$$

Жоғарыдағы мысалды үздіксіз проценттік қосылумен есептеп көрейік.

$$K_3 = 10^5\, e^{3\,0,06} = 10^5\, 2{,}718^{0,18} = 119720\$.$$

Тағы бір мысал. Халықтың жылдық өсуінің оның орташа санына қатынасы халықтың табиғи өсу коэффициенті деп аталып (оны *к* деп белгілейік) халық санының өсу көрсеткіші болады. Басында халық саны P_0 болса, бір жылдан кейін ол $P_0\,\kappa$ шамаға өседі (әрине, бұнда біраз ауытқуларды есептемегенде) деуге болады.

Жыл соңындағы жалпы халық саны:

$$P_0 + P_0\,\kappa = P_0(1+\kappa).$$

Егер біз ең болмағанда халық санының жылдың екінші бөлігінде бірінші бөлігіне қарағанда көбірек болатынын ескерсек, бұл сан нақтырақ болады Егер *к* жылдық өсу көрсеткіші болса, жарты жылдық өсу көрсеткіші $\kappa/2$ болады. Жарты жылда халық $1+\kappa/2$ есеге, ал бір жылда, яғни екі жарты жылда- $(1+\kappa/2)^2$ есеге өседі. Нәтижені тағы айқындай түсу үшін біз әр айдағы халық санының өсуін ескеруіміз керек. Онда бір жылда халық $(1+\kappa/12)^{12}$ есеге өседі.

Бұдан көрініп тұрғандай халықтың үздіксіз өсуін ескерсек біз нақтылы нәтижеге мейлінше жақындаған болар едік, яғни бір жылдан кейін халық саны $P_0 e^{\kappa}$ болар еді.

Төртінші лекция

ФУНКЦИЯ ҮЗІЛІССІЗДІГІ. ҮЗІЛІС ТҮРЛЕРІ

4.1.Функцияның нүктедегі және аралықтағы үзіліссіздігі. Мысал қарастырайық. Айталық x - өндіріс орнының жұмсаған электр энергиясының мөлшері (киловатт - сағат), ал y - оның құны (тиын) делік. Осы екеуінің байланысы мына теңдеумен

$$y=k\cdot x$$

анықталады, мұндағы k - 1 квт - сағаттың құны.

Аргументтің x_1 және x_2 екі мәніне функцияның сәйкес $k\,x_1$ және $k\,x_2$ мәндері сәйкес келеді.

Егер x_1 және x_2 мәндер бір-біріне жеткілікті түрде жақын орналасса, сәйкес $k\,x_1$ мен $k\,x_2$ де өзара өте жақын орналасады. Бұл жағдайда функция үзіліссіз.

Енді электр энергиясын үнемдеу мақсатында жаңа шарт қояйық: екі түрлі тариф енгіземіз - $x=a$ шамасына дейінгі электр энергиясының шығыны бұрынғыша k, ал шығын a - дан асып кетсе, яғни $x>a$, онда тариф l - ға көбейеді, яғни 1 кватт - сағаттың құны $k+l$ болады.

Сонымен, $y=k\cdot x$, егер $x\le a$

$y=(k+l)x$, егер $x>a$

Енді аргументтің екі мәнін a және $a+h\,(h>0)$ қарастырайық. Функциялардың бұл нүктедегі мәндері $k\,a$ және $(k+l)(a+h)$. $x=a$ - дан $x=a+h$-қа өткен кездегі функция өсімшесі мынадай болады: $\Delta y=(k+l)(a+h)-k\,a=l\,a+(k+l)h$.

Егер біртіндеп h-ты азайтсақ, екінші қосылғышты қалауымызша азайтуға болады. Бірақ бірінші қосылғыш өзгеріссіз қалады, сондықтан да h-ты қандай аз қылып алсақ та функцияның $x=a$ және $x=a+h$ нүктелеріндегі мәндерінің айырмашылығы $l\,a$ шамасынан кем болмайды. Бұл жерде біз функцияның үзілісін көреміз.

Анықтама. Егер берілген нүктеде аргументтің ақырсыз аз өсімшесіне функцияның да ақырсыз аз өсімшесі сәйкес келсе, онда функцияны берілген нүктеде үзіліссіз деп атайды. Яғни

$$f(x+\Delta x)-f(x)\xrightarrow[\Delta x\to 0]{}0.$$

Егер осы шарт қандай да бір интервалдың кез келген x-сі үшін орындалса, онда функция осы интервалда үзіліссіз болады.

Осы анықтаманы басқаша да жазуға болады.

1 - анықтама. Егер

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

болса, онда x_0 нүктесінде f функциясы үзіліссіз деп аталады.

1-анықтама мынадай төрт шарттың орындалуымен мәндес деп саналады.

1) $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінің қандай да бір маңайында анықталған болуы керек.

2) x_0 нүктесінде функцияның бір жақты шектері бар.

3) Олар өзара тең, яғни $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$.

4) Функцияның бір жақты шектері оның осы нүктесіндегі мәніне тең болады: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$

Осы айтылған тұжырым практикада қолдану үшін аса қолайлы.

4.2. Функцияның үзіліс нүктелері және олардың түрлері.

Анықтама. Функцияның үзділіссіздік қасиеті орындалмайтын нүктелерін осы функцияның үзіліс нүктелері деп аталады.

Сондықтан функцияның әрбір үзіліс нүктесінде оның үзіліссіздігі шарттарының кемінде бір шарты бұзылады. Осы шарттардың бірі болмаса бірі орындалмауына қарай үзіліс нүктелері мына түрге бөлінеді.

1. Жойылатын үзіліс. Егер $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ бар болып және x_0 нүктесінде f функциясы не анықталмаған, не $f(x_0)$ $\neq\left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right.$ болса, онда x_0 нүктесі f функциясының жойылатын үзіліс нүктесі деп аталады. Мысалы, $x=0$ нүктесі $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ функциясының жойылатын үзіліс нүктесі болады. Шынында да, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, алайда $x=0$ нүктесінде функция анықталмаған.

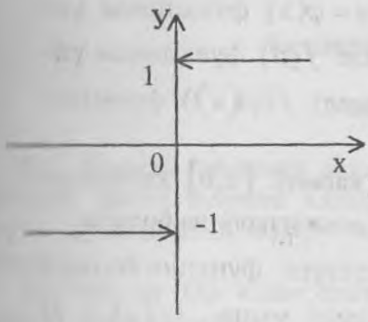
Егер x_0 нүктесі f функциясының жойылатын үзіліс нүктесі болса, онда бұл үзілісті функцияның x_0 нүктесінен өзге нүктелердегі мәндерін өзгертпей жоюға болады. Ол үшін $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ деп алу жеткілікті. Сонда f функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз функция болып шығады. Жоғарыда қарастырылған мысалда $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ деп алу жеткілікті. Сонда функция $x=0$ нүктесінде үзіліссіз болады.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$$

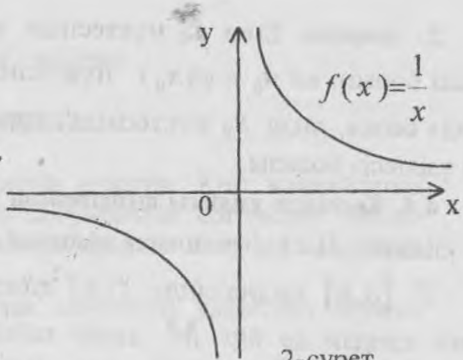
2. Бірінші текті үзіліс. Егер x_0 нүктесінде f функциясының сол жақты және оң жақты шектері бар болып, бірақ олар бір-біріне тең болмаса, онда x_0 нүктесі f функциясының бірінші текті үзіліс нүктесі деп аталады.

Бірінші текті үзілісті кейде *ақырлы секіріс* деп те атайды.

Мысалы, $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ функциясының $x=0$ нүктесінде бірінші текті үзілісі бар. Шынында да, $\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{|x|}{x}=-1$, $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{|x|}{x}=1$, яғни f функциясының бұл нүктедегі бір жақты шектері бірі-бірінен өзгеше. Ал $x=0$ нүктесінде функция анықталмаған (1-сурет).



1-сурет



2-сурет

3. Екінші текті үзіліс. Егер x_0- нүктесінде алынған f функциясының бір жақты шектерінің кемінде бірі ақырсыз болып, не тіпті ол шек болмаса, онда x_0 нүктесі f функциясының екінші текті үзіліс нүктесі деп аталады.

Мысалы, $f(x)=\frac{1}{x}$ функциясының $x=0$ нүктесінде екінші текті үзілісі бар болады. Шынында да

$$\lim_{x\to -0} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x}=-\infty,\ \lim_{x\to +0} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x}=+\infty$$

Бір жақты шектердің екеуі де бұл нүктеде шексіздікке тең (2-сурет).

4.3.Үзіліссіз функциялардың қасиеттері. Функцияны үзіліссіздікке зерттегенде мынадай қасиеттерді басшылыққа алу керек.

1- теорема. Егер $f(x)$ және $g(x)$ функциялары сандық өстің бір ғана аралығында беріліп және осы аралыққа тиісті x_0 нүктесінде үзіліссіз болса, онда сол нүктеде мына функциялар да

$$f(x)\pm g(x),\quad f(x)\cdot g(x),\quad \frac{f(x)}{g(x)}$$

үзіліссіз болады (соңғы өрнек $g(x)\neq 0$ шарты орындалғанда ғана үзіліссіз болады).

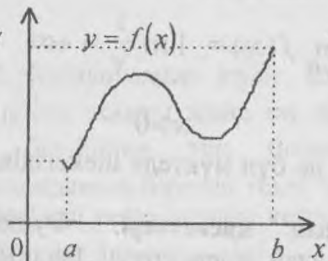
2- теорема. Егер x_0 нүктесінде $u=\varphi(x)$ функциясы үзіліссіз болып, ал $u_0=\varphi(x_0)$ нүктесінде $f(u)$ функциясы үзіліссіз болса, онда x_0 нүктесінде күрделі $f(\varphi(x))$ функциясы үзіліссіз болады.

4.4. Кесіндіде үзіліссіз функцияның қасиеті. $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз $f(x)$ функциясы мынадай қасиеттерге ие болады:

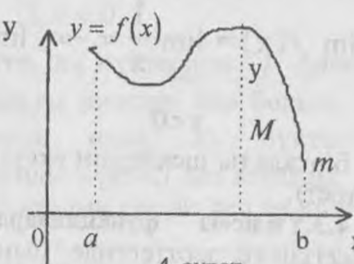
1^0. $[a,b]$ кесіндісінде $f(x)$ шектелген функция болады, яғни қандай да бір M саны табылып мына $|f(x)|\le M$ теңсіздік орындалады (3-сурет)

2^0. $[a,b]$ кесіндісінде $f(x)$ функциясының ең үлкен M және ең кіші m мәні бар болады (4-сурет).

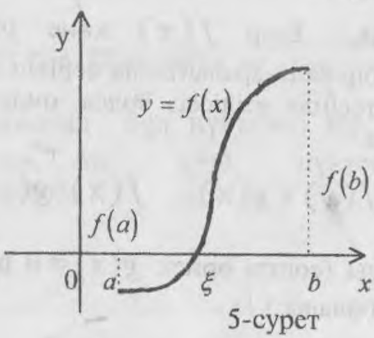
3^0. Егер $f(x)$ функциясының кесіндінің ұштарындағы мәндері $f(a)$ және $f(b)$ түрліше болса, онда қандай да бір $\xi\in(a,b)$ нүктесі табылып, $f(\xi)=0$ теңдігі орындалады (5-сурет).



3-сурет



4-сурет



5-сурет

Бесінші лекция

ТУЫНДЫ

5.1. Туынды ұғымына әкелетін есептер. Көп жағдайларда функция мәнін білумен қатар аргументтің өзгерісіне байланысты функцияның өзгеру жылдамдығын білу де маңызды болады.

Қандай да бір елдің халық санының уақыттан тәуелді өзгеруін қарастырайық.

Айталық халық саны 40201 мың болсын. Енді халық санының осы уақытта қаншалықты жылдам өскенін білу үшін, біз оны біраз уақыттан кейінгі өзгерген халық санымен салыстыруымыз керек. 10 жылдан кейін бұл сан 41897 мыңға дейін көбейді дейік. Он жыл ішінде 41897-40201 = 1696 мыңға, ал бір жылда 169,6 мыңға көбейді.

Бірақ бұл біздің сұрауға жауап емес. Бізге керектісі сол уақытта халық саны қаншалықты жылдам өскені, ал біз он жыл ішінде қаншаға өскенін алдық. Бұл уақыт ішінде өсу жылдамдығы әр түрлі болуы мүмкін, кейде тіпті өсу болмауы немесе кемуі мүмкін.

Сұрағымызға анығырақ жауап алу үшін 10 жыл емес 5 жыл аралығын алайық. Бастапқы халық саны 5 жылдан кейін 41031 мың болған. Сонымен 5 жыл ішінде 41031-40201 = 830 мыңға, ал бір жылда 830:5 = 166 мыңға көбейген.

Бірақ бұл да анық емес. 1 жылды алайық. Бастапқы халық саны бір жылдан кейін 40350 мыңға дейін көбейді. Сонда бір жыл ішінде 40350-40201 =149 мыңға көбейді.

Енді математикалық символдар көмегімен жазайық. x деп жылды белгілейік. Халық санын $y=f(x)$ функциясымен белгілейік. Сонымен санақ жыл ортасында (1 шілде) жүргізілді десек $f(0,5)$=40201 (мың). Ал жылдамдық өлшенетін уақыт аралықтарын Δx деп белгілейік (бірінші жолы $\Delta x=10$, екіншісінде - $\Delta x=5$, үшіншісінде $\Delta x=1$)

Сонда халық санының осы интервалдағы өсуі

$$\Delta y=f(0,5+\Delta x)-f(0,5)$$

Немесе бір жылға есептесек

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(0,5+\Delta x)-f(0,5)}{\Delta x}$$

Қойылған сұраққа анық жауап алу үшін, біз Δx-ті мейлінше азайтуымыз керек.

Математикалық тұрғыдан бұны біз "Δx-ті ақырсыз аз қылу керек"- дейміз, немесе $\Delta x \to 0$ деп жазамыз.

Сонымен, халық санының (сол жылдың 1-шілдесінде) өсу жылдамдығы, x=0,5 тең болғанда, мынаған тең

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0,5+\Delta x) - f(0,5)}{\Delta x}.$$

Ал жалпы $f(x)$ функциясы үшін x уақытта бұл жылдамдық мынаған тең

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Осы өрнек функция болады:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Туынды дегеніміз функция өсімшесінің аргументтің ақырсыз аз өсімшесіне қатынасының шегі. Функцияның туындысын табу амалын берілген функцияны ***дифференциялдау*** деп атайды.

Тағы бір мысал қарастырайық. Автокөліктің 100км жолға жұмсайтын жанар май мөлшері оның жылдамдығынан тәуелді. Қандай да бір қозғалыстар жағдайында бұл тәуелділік мына формуламен берілсін:

$$f(x)=20-0,4x+0,005x^2,$$

мұндағы x-жылдамдық(км/сағ); $f(x)$- 100км-ге жұмсалған жанар май(литр).

x жылдамдықтың өсуіне байланысты жанар май шығыны бір бағытта өсе бермейді. Егер жылдамдық аз (40км/сағ) болса, шығын азаяды, ал көп болса шығын көбейеді. Айталық автокөлік 60км/сағ жылдамдықпен келеді. Егер жылдамдықты көбейтсек жанар май шығыны қалай және қаншалықты тез өзгеретінін байқайық.

Жылдамдықты 60 км-ден 70 км-ге өзгертсек, онда

$$f(60)=20-0,4\ 60+0,005\ 60^2=14$$

$$f(70)=20-0,4\ 70+0,005\ 70^2=16,5$$

Жанар май өсуі 2,5л, ал әр километрге 0,25л. Бірақ бұл нақты емес, бұл өзгеріс 65-тен 70-ке ауысқанда болып, ал 60-

тан 65-ке ауысқанда шығын мұнша болмауы да мүмкін. Шынында да,

$$f(65)=20\text{-}0{,}4\ 65+0{,}005\ 65^2=15{,}125.$$

Бұл дегеніміз әр километрге $\dfrac{15{,}125-14}{5}=0{,}225$ л жанар май шығындалды деген сөз. Бізге 60км/сағ жылдамдықпен келе жатқан көліктің жанар май шығыны керек болғандықтан екінші көрсеткіш анығырақ.

Бұдан да анығырақ алғымыз келсе жылдамдықтың 60-тан 61-ге өзгерісін қарастыруға болады: $f(61)=14{,}205$

$$\frac{14{,}205-14}{1}=0{,}205 \text{ л.}$$

Ал жылдамдық 60-тан 60,1-ге өзгерсе, 1км-ге шаққандағы шығын 0,2005 болды.

Жалпы x 60-тан (60+ Δx)-қа өзгергенде жанар май шығыны:

$$f(60+\Delta x)-f(60)=0{,}2\Delta x+0{,}005(\Delta x)^2$$

x жылдамдықтың 1км өзгерісі мынадай болады:

$$\frac{0{,}2\Delta x+0{,}005(\Delta x)^2}{\Delta x}=0{,}2+0{,}005\cdot\Delta x$$

Жылдамдық 60км/сағ-қа жеткенде жанар май шығыны қанша болатынын айқын білу үшін, біз Δx -ті мейлінше азайтуымыз керек. Ол дегеніміз

$$\lim_{\Delta x\to 0}(0{,}2+0{,}005\cdot\Delta x)=0{,}2.$$

Яғни, 60 км/сағ жылдамдықпен келе жатқан көліктің арықарайғы жылдамдығының көбейуі әр 1км/сағ жылдамдыққа 0,2 л қосымша жанар май жұмсалатынын көрсетеді.

Осы есепті 80км/сағ келе жатыр деп есептесек, мынадай нәтиже аламыз

$$f(80+\Delta x)-f(80)=0{,}4\Delta x+0{,}005(\Delta x)^2$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0{,}4\Delta x+0{,}005(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(0{,}4+0{,}005\Delta x)=0{,}4$$

Жалпы кез келген x жылдамдық үшін

$$f(x+\Delta x)-f(x)=(-4+0{,}01x)\Delta x \div 0{,}005(\Delta x)^2,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(-0{,}4+0{,}01x)\Delta x+0{,}005(\Delta x)^2}{\Delta x}=-0{,}4+0{,}01x$$

Осы нәтиже $x=60$ болғанда $-0{,}4+0{,}01\cdot 60=0{,}2$, ал $x=80$ болғанда $-0{,}4+0{,}01\cdot 80=0{,}4$ береді.

Шыққан нәтижені былай жазуға болады: $y=20-0{,}4x+0{,}005\,x^2$ функциясы берілген, оның туындысы табылды, ол $y'=-0{,}4+0{,}01x$.

Еңбек өнімділігі жөнінде есеп. Айталық, t уақыт аралығында u өндірілген өнім көлемі $u=u(t)$ функциясы берілсін. t_0 уақыт моментінде өндіріс қарқынын табу қажет болсын.

t_0 уақыттан $t_0+\Delta t$ уақытқа дейінгі аралықта өндірілген өнім көлемі $u_0=u(t_0)$ деп $u_0+\Delta u=u(t_0+\Delta t)$ - ге өзгереді.

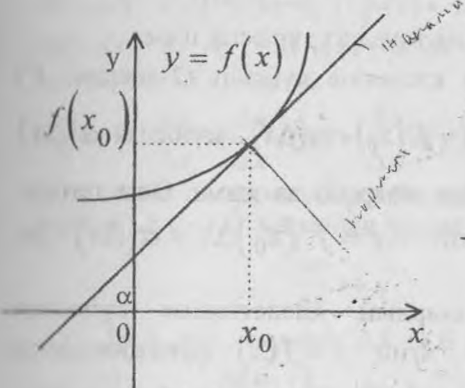
Сонда осы уақыт аралығындағы орташа еңбек өнімділігі $z_{op}=\dfrac{\Delta u}{\Delta t}$ болады. t_0 уақыт моментіндегі еңбек өнімділігін t_0 ден $t_0+\Delta t$ уақыт аралығындағы орташа еңбек өнімділігінің $\Delta t\to 0$ жағдайдағы шектік мәні ретінде анықтауға болады, яғни

$$z=\lim_{\Delta t\to 0}z_{op}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta t}.$$

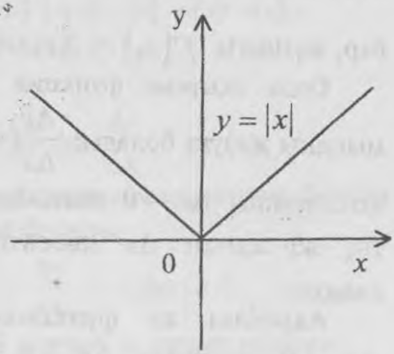
Мектеп курсынан біз туындының геометриялық мағынасын білеміз: $f'(x_0)$ туынды дегеніміз $y=f(x)$ қисығына x_0 нүктесінде жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициенті, яғни $k=tg\alpha=f'(x_0)$ (1-сурет).

Сонда $y=f(x)$ қисығын x_0 нүктесінде жүргізілген жанама тендеуі мынадай:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$



1-сурет



2-сурет

Мысал қарастырайық: $x = 0$ нүктеде $y = |x|$ функциясы дифференциалданбайтынын дәлелдейік (2-сурет).

Егер туынды бар болса, онда біз оны мына формуламен есептеген болар едік: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x}$.

$\dfrac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$ теңдігі $\Delta x > 0$ болғанда 1 -ге, $\Delta x < 0$ болғанда -1 тең болғандықтан $\Delta x \to 0$ жағдайда бұл қатынастың шегі жоқ, ал бұл $y = |x|$ функциясының $x = 0$ нүктесінде туындысы жоқ деген сөз.

Функцияның үзіліссіздігі мен дифференциалдануы арасындағы байланыс.

Теорема. Егер функция $y = f(x)$ x_0 нүктесінде дифференциалданатын болса, онда ол осы нүктеде үзіліссіз болады.

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$ нормаль теңдеуі.

Дәлелдеу. Шарт бойынша $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде дифференциалданады, яғни $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$ шегі бар, мұндағы $f'(x_0)$ - Δx тен тәуелсіз тұрақты шама.

Онда ақырсыз функция қасиетіне сүйеніп (2-лекция, 1^0) мынаны жазуға болады: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$, мұндағы $\alpha(\Delta x)$ қосылғышы $\Delta x \to 0$ жағдайда ақырсыз аз шама. Осы теңдіктің екі жағын Δx көбейтіп $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ аламыз.

Ақырсыз аз функциялардың қасиеттеріне сүйенсек $\Delta x \to 0$ жағдайда $\Delta y \to 0$, яғни $y = f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде үзіліссіз екендігі (3-лекция, 1-анықтама) шығады.

Жалпы алғанда кері теорема дұрыс емес. Оған жоғарыдағы мысал дәлел бола алады.

5.2. Арифметикалық амалдармен байланысты дифференциалдау ережелері.

1 - теорема. Егер $u(x)$ және $v(x)$ функцияларының әрқайсысы берілген x нүктесінде дифференциалданатын болса, ол функциялардың қосындысы (айырымы), көбейтіндісі және қатынасы ($v(x) \neq 0$ болғанда) сол нүктеде дифференциалданатын функция болады және мына формулалар орындалады:

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$$

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

Дәлелдеуі. Барлық үш формула да бір типтес дәлелденеді. Сондықтан олардың біреуін, атап айтқанда, екіншісін ғана дәлелдейік.

$y=u(x)\cdot v(x)$ функциясының өсімшесін жазайық.

$\Delta y=u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)=\left[u(x)+u(x+\Delta x)-u(x)\right]\cdot\left[v(x)+\right.$
$\left.v(x+\Delta x)-v(x)\right]-u(x)\cdot v(x)=\left[u(x)+\Delta u\right]\cdot\left[v(x)+\Delta v\right]-u(x)\cdot v(x)=$
$u(x)\cdot v(x)+\Delta u\cdot v(x)+\Delta v\cdot u(x)+\Delta u\cdot\Delta v-u(x)\cdot v(x)=$
$\Delta u\cdot v(x)+\Delta v\cdot v(x)+\Delta u\cdot\Delta v.$

Бұдан $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}v(x)+\frac{\Delta v}{\Delta x}u(x)+\Delta u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}\qquad (*)$$

u және v функцияларын дифференциалданатын болғандықтан $\Delta x\to 0$ жағдайда былай болады:

$$\frac{\Delta u}{\Delta x}\to u' \qquad \frac{\Delta v}{\Delta x}\to v',\Delta u\to 0$$

Енді $(*)$ теңдікте $\Delta x\to 0$ жағдайда шекке көшсек

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(u\cdot v)}{\Delta x}=u'(x)v(x)+v'(x)u(x)+0\cdot v'$$

Сонымен, $(uv)'=u'v+v'u.$

5.3. Негізгі элементар функциялардың туындылары кестесі. Бұл формулалардың барлығын туынды анықтамасын қолданып қорытып шығаруға болады.

1. $c'=0$, $c=const$.
2. $x'=1$, x - тәуліксіз айнымалы.
3. $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$, $x>0$, α - кез келген нақты сан,

жеке жағдайда $\alpha=-1$ және $\alpha=\dfrac{1}{2}$ болғанда, сәйкес

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2};\quad \left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

4. $a^x=a^x\ln a$, $-\infty<x<+\infty$, $0<a\neq 1$;

жеке жағдайда $\left(e^x\right)'=e^x$

5. $\left(\log_a x\right)'=\dfrac{1}{x\ln a}$ $x\neq 0$, $0<a\neq 1$

жеке жағдайда $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

6. $(\sin x)' = \cos x, \qquad -\infty < x < \infty$

7. $(\cos x)' = -\sin x, \qquad -\infty < x < \infty$.

8. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}; \qquad x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in z$

9. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}; \qquad x \neq \pi\, k, \quad k \in z$

10. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \qquad -1 < x < 1$

11. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \qquad -1 < x < 1$

12. $(arctgx) = \dfrac{1}{1+x^2}; \qquad -\infty < x < \infty$

13. $(arctgx) = -\dfrac{1}{1+x^2}; \qquad -\infty < x < \infty$

Алтыншы лекция

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ЖӘНЕ ОНЫҢ ЖУЫҚТАП ЕСЕПТЕУЛЕРДЕ ҚОЛДАНЫЛУЫ. КЕРІ ЖӘНЕ КҮРДЕЛІ ФУНКЦИЯ ТУЫНДЫСЫ

6.1. Дифференциал және оның жуықтап есептеуде қолданылуы. Өткен лекцияда автокөлік жылдамдығының жанар майға тәуелділігін көрсететін $y=20-0{,}4x+0{,}005x^2$ функцияны дифференциалдауды қарастырайық.

$x=60$ болғанда $\Delta y=0{,}2\Delta x+0{,}005(\Delta x)^2$ өсімшесін Δx-қа бөліп $\frac{\Delta y}{\Delta x}=0{,}2+0{,}005\Delta x$. $\Delta x\to 0$ жағдайда шекке көшкенде $y'=0{,}2$ мән алған болатынбыз.

Осы нәтижені Δy өрнегіндегі $0{,}005(\Delta x)^2$ қосылғышын алып тастасақ та алар едік.

Бұл қосылғыш $0{,}2\Delta x$ қосылғышына қарағанда, Δx азайған сайын, өте аз шама болады. Мысалы: 0,25, 0,225, 0,205, 0,2005.

Басқаша айтсақ Δy өрнегінде $0{,}2\Delta x$ қосылғышы негізгі мүше болады. Бізге Δy-тің Δx-қа қатынасы керек болғандықтан шекке көшкен кезде Δy-тің өте аз бөлігі негізгі нәтижеге ешқандай әсер етпейді.

Сонымен, функцияның ақырсыз аз өсімшесінің негізгі бөлігі оның дифференциалы деп аталып, d символымен белгіленеді. Сонда dy Δy-тің $\Delta x\to 0$ жағдайындағы негізгі бөлігін белгілейді.

Ал аргументтің ақырсыз аз өсімшесі оның негізгі бөлігімен сәйкес келеді деп, Δx-тің орнына dx деп жазуға болады.

Осыны ескерсек біздің мысалда

$$dy=0{,}2dx$$

($0{,}005(\Delta x)^2$-ті аз шама ретінде қалтырып кетеміз). Ал 0,2 туынды мәні болғандықтан

$$dy = y'dx$$

деп жазамыз.

Функция дифференциалы оның туындысын аргумент дифференциалына көбейткенге тең.

Жалпы түрде көрсетсек:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to y', \quad \text{яғни} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \varepsilon$$

Мұндағы ε -ақырсыз аз шама. Бұдан $\Delta y = y'\Delta x + \varepsilon\Delta x$

$\Delta x \to 0$ жағдайды $\varepsilon \cdot \Delta x$ шамасы екі ақырсыз аз шаманың көбейтіндісі ретіне жоғары реттегі ақырсыз аз болады. Енді Δy -тен негізгі бөлікке көшсек $dy = y'dx$ аламыз.

Сонымен, $y = f(x)$ функциясының дифференциалы

$$dy = f'(x)dx \qquad (1)$$

болды. Дифференциалдың қасиеті туындының қасиетіндей. Оларды дәлелдеусіз келтіре кетейік:

1. $dc = 0$.
2. $d(cu) = cdu$.
3. $d(u \pm v) = du \pm dv$.
4. $d(uv) = vdu + udv$.
5. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$.

Дифференциалдың жуықтап есептеулерде қолданатын формуласын көрсетейік. Δx аргумент өсімшесі абсолют шамасы бойынша аз шама болғанда $\Delta y \approx dy$ деп алуға болады. Осы жуық теңдікті ашып жазсақ

$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)dx$, осыдан

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)dx \qquad (2)$$

Δx шамасы неғұрлым аз болса, формула соғұрлым дәлірек болады. (2) формуланы қолданып мынадай формулаларды оңай алуға болады (мұнда $\alpha < 1$).

$$(1 \pm \alpha)^n \approx 1 \pm n\alpha; \quad \sqrt[n]{1 \pm \alpha} \approx 1 \pm \frac{\alpha}{n}; \quad \frac{1}{1 \pm \alpha} \approx 1 \mp \alpha; \quad e^{\alpha} \approx 1 + \alpha;$$

$$\ln(1\pm\alpha)\approx\pm\alpha;\quad \sin\alpha\approx\alpha;\quad \cos\alpha\approx 1+\frac{\alpha^2}{2}\quad \text{және т.б.}$$

6.2. Күрделі функция туындысы. Күрделі функция құрайтын $u=\varphi(x)$ және $y=f(u)$ функциясының сәйкес x_0 және $u_0=\varphi(x_0)$ нүктелеріндегі туындылары белгілі деп алып, күрделі $y=f[\varphi(x)]$ функциясының туындысын есептеп шығару ережесін анықтайық.

Теорема. $u=\varphi(x)$ функциясы x нүктесінде, ал $y=f(u)$ функциясы сәйкес $u=\varphi(x)$ нүктесінде дифференциалданатын болсын. Сонда күрделі $y=f[\varphi(x)]$ функциясы берілген x нүктесінде дифференциалданатын болады және оның осы нүктедегі туындысы үшін мына формула дұрыс болады:

$$\{f[\varphi(x)]\}'=f'[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x) \qquad (3)$$

Қысқаша оны былай жазады:

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x \qquad (3^*)$$

Дәлелдеуі. x аргументіне $\Delta x\neq 0$ өсімше берсек, онда $u=\varphi(x)$ функциясы $\Delta u=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)$ өсімшесін алады. Жалпы алғанда бұл өсімше нөлге айналуы да мүмкін. Δu өсімшесіне $u=\varphi(x)$ нүктесінде $y=f(u)$ функциясының $\Delta y=f(u+\Delta u)-f(u)$ өсімшесі сәйкес келеді. $y=f(u)$ функциясы $u=\varphi(x)$ нүктесінде дифференциалданатын болғандықтан, дифференциалдану шарты бойынша оның өсімшесі алынған $u=\varphi(x)$ нүктесінде мына түрде жазылады:

$$\Delta y=f'(u)\Delta u+\alpha(\Delta u)\Delta u,$$

мұндағы $\alpha(\Delta u)$ дегеніміз $\Delta u\to 0$ жағдайда ақырсыз аз функция.

Осы формула $\Delta u=0$ болғанда да дұрыс болып қала береді. Бұл теңдіктің екі жағын да Δx-ке бөлсек, мынау табылады:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u)\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x} \qquad (4)$$

Енді (4) теңдіктің оң жағының (демек, оның сол жағының да) $\Delta x \to 0$ жағдайда шегі болатындығын дәлелдейік. x нүктесінде $u = \varphi(x)$ функциясы дифференциалданатын болғандықтан, біріншіден, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = \varphi'(x)$ шегі бар болады, екіншіден,

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u = 0$ болады. Сонда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha[\Delta u] = \lim\limits_{\Delta u\to 0}\alpha[\Delta u] = 0$.

Демек, (4) теңдеудің шегі бар болып және ол $f'(u)\cdot\varphi'(x)$-ке тең болады. (3) немесе (3*) теңдік дәлелденді.

6.3. Кері функция туындысы. Көп жағдайларда функция мәніне сәйкес келетін аргументті көрсету керек болады. Мысалы, өнім өндіру деңгейі уақытқа байланысты өзгеріп отырады. $f(x)$ функциясын x-уақыттың өзгеруіне байланысты өндіріс деңгейін бейнелейтін функция деп қарастырайық.

Жоспарланған уақытта өнімнің y мөлшерін шығару керек деп белгіленген болсын. Өнім мөлшері y-қа жеткен кезде біз жоспар орындалды дейміз. Енді сол кезді (сол уақытты) анықтау үшін $y = f(x)$ теңдеуінен x-ті табуымыз керек.

Айталық, өнім өндірісі мынадай нақты $100\cdot 1{,}17^x$ функциямен беріліп, геометриялық прогрессия бойынша өсті дейік. x-жоспарланған бес жылдық уақыт (жыл есебімен) өлшеуіші болсын.

Бес жыл соңында өнім 180-ге өсті дейік (яғни өсу бесжылдықтың басымен салыстырғанда 80%-ке артты). Осы бес жылдық жоспар қанша уақытта орындалғанын табу үшін теңдеу шешеміз.

$$100\cdot 1{,}17^x = 180 \quad \text{немесе} \quad 1{,}17^x = 1{,}8$$
$$x\cdot\lg 1{,}17 = \lg 1{,}8 \qquad 0{,}06819x = 0{,}25527$$

Бұдан $x = 3{,}74$. Жоспар 3,74 жылда немесе 3 жыл 9 айда орындалған екен.

Біз теңдеуді шешкенде кері амал жасадық, яғни x-ті y арқылы өрнектедік. Осылай анықталған функцияны берілген функцияға *кері функция* дейміз.

Жалпы функцияның кері фунциясы болуы үшін, берілген функция қарастырылып отырған аралықта анықталған, қатаң бірсарынды және үзіліссіз болуы керек.

Осындай функцияның x нүктесінде $y' = f'(x) \neq 0$ туындысы бар болсын. Сонда оған кері $x = f^{-1}(y)$ функцияның туындысы бар болады және

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)} \qquad (5)$$

Осы формуланы қолданып $y = \ln x$ функциясының туындысын тауып көрейік.

Бұл функцияға кері функция экспонента болады

$$x = f^{-1}(y) = e^{y}.$$

Ал бұл функцияның туындысы $x' = e^{y}$.

Алынған нәтижені (5) формулаға қоямыз.

Сонда $x'(y) = (\ln x)' = \frac{1}{e^{y}}$. Ал $e^{y} = x$. Сонымен,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \qquad (6)$$

6.4. Функцияны логарифмдеп туындысын табу. (6) формуланы қолданып күрделі $y = \ln u$ функциясының туындысын есептейік, мұндағы $u = f(x)$ дифференциалданатын функция.

Туынды есептейік

$$y' = (\ln|u|)' = \frac{1}{u}u' = \frac{f'(x)}{f(x)} \qquad (7)$$

(7) формуланы қолданып көрсеткішті-дәрежелік $y = u(x)^{v(x)}$ функциясының туындысын есептейік, мұндағы u және v функциялары x нүктесінде $u'(x)$ және $v'(x)$ туындылары бар x-тан тәуелді $(u > 0)$ функциялар.

$\ln y = v(x)\ln u(x)$ болғандықтан (7) формуланы қолданайық

$$\frac{y'}{y} = \left[v(x)\ln u(x)\right]' = v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Бұдан, $y = u(x)^{v(x)}$ екенін ескерсек көрсеткішті дәрежелік функцияның туындысын есептейтін формула аламыз.

$$y' = u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right]. \qquad (8)$$

Мысалы $y = x^x$ функцияның туындысын есептейік. Бұл функцияны $y = u(x)^{v(x)}$ түрінде қарастырамыз. $u(x) = x$, $v(x) = x$. (8) формуланы қолданып

$$y' = x^x\left[1\ln x + x\frac{1}{x}\right] = x^x(\ln x + 1)$$

аламыз.

Енді кейбір күрделі функциялар үшін туындылар мен дифференциалдар кестесін келтірейік.

Айталық, $u = \varphi(x)$ дифференциалданатын функция болсын, сонда

1. $\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha u^{\alpha-1}\cdot u'$, $\quad d\left(u^{\alpha}\right) = \alpha u^{\alpha-1}du$, $\quad u > 0$

2. $\left(a^{u}\right)' = a^{u}\cdot\ln a\cdot u'$, $\quad d\left(a^{u}\right) = a^{u}\ln a du$, $-\infty < u < +\infty$,

$0 < a \neq 1$; жеке жағдайда $\left(e^{u}\right)' = e^{u}u'$, $\quad d\left(e^{u}\right) = e^{u}du$

3. $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{u'}{u\ln a}$, $\quad d\left(\log_a u\right) = \dfrac{du}{u\ln a}$, $u > 0$, $\quad 0 < a \neq 1$

жеке жағдайда $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$, $\quad d(\ln u) = \dfrac{du}{u}$.

4. $(\sin u)' = \cos u\cdot u'$, $\quad d(\sin u) = \cos u du$, $\quad -\infty < u < \infty$

5. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$, $d(\cos u) = -\sin u du$, $-\infty < u < \infty$

6. $(tgu)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$, $d(tgu) = \dfrac{du}{\cos^2 u}$; $u \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$

7. $(ctgu)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$, $d(ctgu) = -\dfrac{du}{\sin^2 u}$; $u \neq \pi\, k$, $k \in Z$

8. $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; $d(\arcsin u) = \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}$, $-1 < u < 1$.

9. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$; $d(\arccos u) = -\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}$, $-1 < u < 1$

10. $(arctgu)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$; $d(arctgu) = \dfrac{du}{1+u^2}$, $-\infty < u < \infty$

11. $(arcctgu)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$; $d(arcctgu) = -\dfrac{du}{1+u^2}$,

$-\infty < u < \infty$

Жетінші лекция

ЖОҒАРЫ РЕТТІ ТУЫНДЫЛАР ЖӘНЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛДАР. ДИФФЕРЕНЦИАЛДАНАТЫН ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ АРАЛЫҚ НҮКТЕДЕГІ МӘНДЕРІ ТУРАЛЫ НЕГІЗГІ ТЕОРЕМАЛАР. ЛОПИТАЛЬ ЕРЕЖЕСІ

7.1. Жоғары ретті туынды және дифференциал туралы түсінік.

1-анықтама. $y = f(x)$ функциясы (a,b) интервалында анықталған болып және бұл интервалдың әрбір x нүктесінде $f'(x)$ туындысы бар болсын. Егер қандай болса да бір $x \in (a,b)$ нүктесінде $f'(x)$ функциясының туындысы бар болса, оны $y = f(x)$ функциясының екінші туындысы дейді және $f''(x)$ деп белгілейді.

Сонымен анықтама бойынша $f''(x) = (f'(x))'$.

Осылайша сәйкес шарттар орындалғанда функцияның үшінші және одан да жоғары ретті туындыларын анықтауға болады:

$$f'''(x) = (f''(x))', \ldots, f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$$

Жоғары ретті туындылардың экономикалық құбылыстардағы нақтылы мәнін түсіну үшін мысал қарастырайық.

"А" заводында шығарылатын қосалқы бөлшектер "Б" заводына жіберіледі. "Б" заводында шығарылатын дайын станоктар "В" фабрикасына жіберіледі; ал "В" фабрикасы ол станоктарды өндіріс көлемін кеңейтуге қолданады. Осы фабриканың шығаратын өнімін, $y = f(x)$ мұндағы - x - уақыт (бір жыл мөлшерінде) қарастырайық.

Оңай болу үшін станоктарды оның қуаттылығымен, яғни оның көмегімен бір жылда қанша көлемдегі өнім шығаратынымен бағалайық. "А" заводының өнімі үшін де осындай өлшем бірлік енгізейік. Сонда "В" фабрикасындағы өндіріс көлемінің кеңейуі "Б" заводының өніміне тең, ал "Б" заводының өндіріс көлемінің кеңейуі "А" заводының өніміне тең болады. Әрине өндірістің кеңейуі сәйкес орынға өндіріс өнімдерінің жылдың қай мезгілінде келіп түскеніне байланысты. Шынында да, жыл бойы "А" заводы ештеңе өндірмей, тек жыл соңында ғана "Б" заводына өз өнімін берсе, жыл бойы "Б" заводы өзінің бұрынғы көлемінде жұмыс істемеген болады. "А" заводы жылдық өнімін жыл бойы үздіксіз беріп отырса, онда кейінгі орындар да өнімдерін өсіруге мүмкіндік алған болар еді.

Осы мәселенің бәрін аналитикалық тұрғыдан қарастырса оңай шешіледі. Аз уақыт интервалын Δx алайық. Басында "А" заводы u жылдық жоспарды қамтамасыз ете алатын қарқынмен жұмыс істеді дейік, және u үзіліссіз функция деп қарастырамыз. Интервал соңында өндіріс $u+\Delta u$ шамаға өсті. Интервал бойында өндіріс мөлшері u болса, онда Δx уақыт ішінде $\Delta x \cdot u$ өнім берген болар еді, ал мөлшер $u+\Delta u$ болса, $(u+\Delta u)\Delta x = u\Delta x + \Delta u \cdot \Delta x$ өнім берген болар еді, яғни $\Delta u \cdot \Delta x$ шамаға өскен. Анығында завод u деңгейінен $u+\Delta u$ деңгейге Δx уақытта көтерілді. Егер $\Delta x \to 0$, яғни dx - ке айналса, онда $\Delta u \cdot \Delta x$ қосылғышы $u \cdot \Delta x$ - пен салыстырғанда жоғары ретті ақырсыз аз болады. Сондықтан, біз dx уақыт аралығында "А" заводы udx өнім берді деп айта аламыз. "Б" заводында бұл уақытта өндіріс деңгейі s болсын. Жоғарыдағыдай талдасақ оның осы уақытта $s\,dx$ өнім берді деп айта аламыз.

Дәл осы $s\,dx$ шамаға фабрика өнімі, қарастырылып отырған интервал соңында, көтеріледі. Сонымен $dy = sdx$, $\frac{dy}{dx} = s$, яғни y функциясының туындысы s болады $y' = s$.

Екінші жағынан "Б" заводы dx уақыт аралығында "А" заводының udx өнімін алып, өз өндірісін ds деңгейге көбейтті. Демек, $ds = udx$ және $s' = \frac{ds}{dx} = u$. s y - тің туындысы болғандықтан $u = s' = y''$ яғни "А" заводының өндіріс деңгейі "В" фабрикасының өндіріс деңгейінің екінші туындысы екен. Басқаша айтсақ фабрика өнімінің өсу жылдамдығы "Б" заводының өнімінен тәуелді болса, ал оның өсу қарқыны "А" заводының өніміне тәуелді болады екен.

Енді жоғары ретті дифференциалды анықтайық.

Анықтама. $y = f(x)$ функциясының тәуелсіз айнымалының $dx = \Delta x$ дифференциалына (өсімшесіне) сәйкес келетін қандай болса да бір белгіленген x нүктесіндегі екінші ретті дифференциалы деп оның бірінші ретті дифференциалынан алынған дифференциалын атайды және $d^2 y$ деп белгілейді.

Сонымен, анықтама бойынша

$$d^2 y = d(dy) = d\big(f'(x)dx\big) = d\big(f'(x)\big)dx = \big(f'(x)\big)' \, dxdx =$$

$$= f''(x)d\,x^2$$

немесе $d^2 y = f''(x)dx^2$.

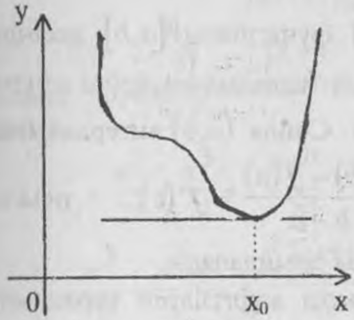
Осылайша келесі дифференциалдарды есептеуге болады:

$$d^3 y = f'''(x)d\,x^3, ..., d^n y = f^{(n)}(x)d\,x^n$$

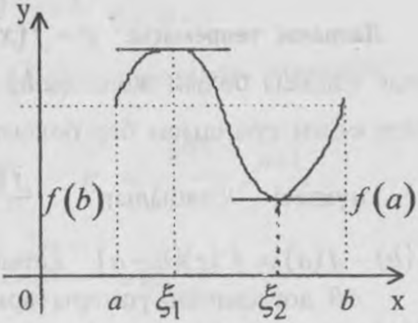
7.2. Дифференциалданатын функциялардың аралық нүктедегі мәндері туралы негізгі теоремалар. Бұл теоремаларды дәлелдеусіз қарастырайық.

Ферма теоремасы. Егер $y = f(x)$ функциясы (a,b) интервалында анықталған, қандай болса да бір $c \in (a,b)$ нүктесінде дифференциалданатын болып және осы c нүктесінде (a,b) интервалындағы мәндердің ең үлкен немесе ең кішісін қабылдаса, онда $f'(c) = 0$ болады.

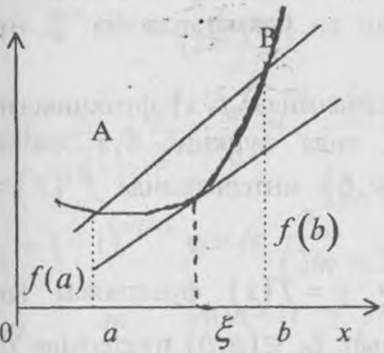
Ферма теоремасының геометриялық мағынасы: (a,b) аралығында функцияның ең үлкен не ең кіші мәндерін қабылдайтын нүктеде графикке жүргізілген жанама абсцисса осіне параллель болады. (1-сурет)



1-сурет



2-сурет



3-сурет

Ролль теоремасы. $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үздіксіз және (a,b) интервалының әрбір нүктесінде оның туындысы бар болсын. Сонымен бірге, $f(a) = f(b)$ дейік. Сонда $c \in (a,b)$ нүктесі табылып, $f'(c) = 0$ болады.

Геометриялық мағынасы: функция графигіне жүргізілген жанама абсцисса осіне параллель болатын ең болмағанда бір нүкте табылады және сол нүктеде функция туындысы нөлге тең болады. (2-суретте мұндай нүкте екеу: ξ_1 және ξ_2)

Дербес жағдайда $f(a) = f(b) = 0$ болса, онда Ролль теоремасы функцияның қатар жатқан екі түбірінің арасында туындының ең болмағанда бір түбірі болатынын көрсетеді.

Лагранж теоремасы. $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үздіксіз болып және (a,b) интервалының әрбір нүктесінде оның туындысы бар болсын. Сонда (a,b) интервалында c нүктесі табылып $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ немесе $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ қатысы орындалады.

AB доғасының ұштары арқылы жүргізілген хорда мен $f(x)$ функция графигіне жүргізілген жанама параллель болатындай (a,b) аралығынан ең болмағанда біз ξ нүкте табылады. (3-сурет)

Салдары. Егер (a,b) интервалында $f(x)$ функциясының туындысы нөлге тең болса, онда функция бұл аралықта тұрақты болады. Яғни, егер (a,b) интервалында $f'(x) = 0$ болса, онда $f(x) = const$.

Тейлор формуласы. Егер $y = f(x)$ функциясы (a,b) интервалында анықталған болып, $x_0 \in (a,b)$ нүктесінде n-ге дейінгі (n-ді қоса) барлық ретті туындылары бар болса, онда мына теңдік орындалады:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n,$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

мұндағы ξ x_0 мен x -тің арасында жатыр, яғни $\xi = a + \theta(x - a)$ және $0 < \theta < 1$.

$x_0 = 0$ тең болғанда Тейлор формуласы *Маклорен формуласы* деп аталады.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+i}, \quad 0 < \theta < 1$$

Кейбір функциялардың Маклорен қатарына жіктелуін келтірейік.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n; \quad R_n = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1};$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^{m+1} x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_{2m};$$

$$R_{2m} = (-1)^m \cos\theta x \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^m \cdot x^{2m}}{(2m)!} + R_{2m+1};$$

$$R_{2m+1} = (-1)^{m+1} \cos\theta x \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!} x + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \ldots +$$

$$\frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{n!} x^n + R_n;$$

$$R_n = \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{(n+1)!} x^{n+1} (1+\theta x)^{m-n-1}$$

(барлық формулада $0 < \theta < 1$).

7.3. Анықталмағандықтарды Лопиталь ережесі бойынша ашу.

$f(x)$ және $g(x)$ функциялары x_0 нүктесінің қандай да бір тесілген аймағында дифференциалданатын және $g'(x) \neq 0$ болсын.

Егер $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ немесе $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$, яғни $f(x)/g(x)$ қатынасы $x=x_0$ нүктесінде $\frac{0}{0}$ немесе $\frac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандықтарды берсе, және $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ шегі бар болса, онда мына теңдік

орындалады: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$0\cdot\infty, \infty-\infty$ түріндегі анықталмағандықтарды ашу үшін, берілген функцияны алгебралық түрлендірулер арқылы $\left(\frac{0}{0}\right)$ немесе $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ түріне келтіріледі, осыдан кейін ғана Лопиталь ережесі қолданылады.

0^0 немесе ∞^∞ немесе 1^∞ түріндегі анықталмағандықтарды ашу үшін берілген функцияны логарифмдеп шекті функция логарифмінен табады.

Бірнеше мысал қарастырайық.

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$$

Бұл жерде Лопиталь ережесі екі рет қолданылып тұр.

2. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right).$$

Бұл жерде $(\infty-\infty)$ анықталмағандығы шығады. Шекті табу үшін бөлшектерді ортақ бөлімге келтіреміз. Сонда біз $\left(\frac{0}{0}\right)$ анықталмағандығын аламыз. Бұл жағдайда Лопиталь ережесін қолдануға болады:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x\left(e^x-1\right)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(2+x)}=\frac{1}{2}$$

3. $\lim_{x\to 0}(\sin x)^x$.

Бұл жерде (0^0) анықталмағандығы шығады.

Берілген функцияны y арқылы белгілеп, $y=(\sin x)^x$, оны логарифмдейміз:

$$\ln y = x\ln\sin x=\frac{\ln\sin x}{1/x}$$

Берілген функцияның логарифмінен шек табамыз:

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{1/x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x/\sin x}{-1/x^2}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x}{\sin x}=-\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\cos x\cdot\frac{x}{\sin x}\right)=0.$$

Яғни, $\lim_{x\to 0}y=e^0=1$.

7.4. Ферма теоремасының экономикалық түсіндірілуі.

Өндіріс теориясының негізгі заңдарының бірі былай айтылады: товар өндірудің ең тиімді деңгейі шектік шығын мен шектік кірістің теңдігімен анықталады.

Яғни, кәсіпкер үшін x_0 - өндіріс деңгейі ең тиімді болады, егер $MS(x_0)=MD(x_0)$, мұндағы MS - шектік шығын, ал MD - шектік кіріс.

Түсетін пайданы $C(x)$ функциясымен белгілейік. Сонда $C(x)=D(x)-S(x)$. Пайда максималды болатын өндіріс (x) мәні ең тиімді өндіріс деңгейі болатыны айқын, яғни $C(x)$ функциясы экстремум (максимум) қабылдайтын x_0 - өндіріс мәнін табу керек. Ферма теоремасы бойынша бұл нүктеде $C'(x)=0$. Ал $C'(x)=D'(x)-S'(x)$, сондықтан $D'(x_0)=S'(x_0)$, яғни $MD(x_0)=MS(x_0)$.

Өндіріс теориясының тағы бір маңызды ұғымы - товарды өндіруге кеткен орташа шығын минималды болатын өндірістің үнемді деңгейі орташа және шектік шығынның теңдігімен анықталады.

Бұл шартты Ферма теоремасының салдары ретінде алуға болады. $AS(x)$ орташа шығын $\frac{S(x)}{x}$ - түрінде, яғни товарды өндіруге кеткен шығынның оның жалпы санына қатынасы түрінде анықталады.

Бұл шама өзінің минимумын $y = AS(x)$ функциясының күдікті нүктесінде қабылдайды. $AS'(x) = \frac{S'x - S}{x^2} = 0$, бұдан $S' \cdot x - S = 0$ немесе $S' = \frac{S}{x}$, яғни $MS(x) = AS(x)$.

Сегізінші лекция

ФУНКЦИЯНЫ ЗЕРТТЕУ

8.1. $y = f(x)$ функциясы берілсін. Осы функцияның анықталу облысына енетін қандай да бір X аралығынан алынған кез келген $x_1 < x_2$ үшін $f(x_1) < f(x_2)\left(f(x_1) > f(x_2)\right)$ теңсіздігі орындалса, онда f функциясы X жиынында *өспелі (кемімелі) функция* екені мектеп курсынан белгілі.

Теорема (функцияның өсуінің (кемуінің) жеткілікті шарты). Егер (a,b) интервалында дифференциалданатын $y = f(x)$ функцияның барлық $x \in (a,b)$ үшін туындысы $f'(x) > 0$ $\left(f'(x) < 0\right)$ болса, онда осы интервалда функция өспелі (кемімелі) болады.

Дәлелдеу. Теореманы $f'(x) > 0$ жағдайы үшін дәлелдейік. x_1 мен x_2 (a,b) интервалының кез келген екі нүктесі болсын. Енді $[x_1, x_2]$ кесіндісінде f функциясына Лагранж теоремасын қолданайық. Сонда $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, мұндағы $x_1 < c < x_2; c \in (a,b)$ болғандықтан $f'(x) > 0$, олай болса, соңғы теңдіктің оң жақ бөлігі оң болады. Демек, $x_2 > x_1$ болғанда $f(x_2) - f(x_1) > 0 \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$, яғни (a,b) интерва-лында $y = f(x)$ функциясы өседі.

Ал $f'(x) < 0$ болғанда теорема осыған ұқсас дәлелденеді.

8.2. Функцияның локальді экстремумы. $y = f(x)$ функциясы бекітілген x_0 нүктесі маңайында анықталған болсын.

Анықтама. Егер x_0 нүктенің қандай да бір маңайындағы барлық $x(x \neq x_0)$ нүктесі үшін $f(x) < f(x_0)\left(f(x) > f(x_0)\right)$ теңсіздігі орындалса, онда x_0 нүктесі $y = f(x)$ функциясының локальді максимум (локальді минимум) нүктесі деп атайды.

Функцияның максимумы мен минимумын жалпы *функция экстремумы* деп атайды.

Теорема (экстремумның қажетті шарты). f функциясы x_0 нүктесінің қандай болса да бір маңайында анықталған функция болсын да, x_0 нүктесі f функциясының жергілікті экстремум нүктесі болсын. Сонда не $f'(x_0)=0$, не $f'(x_0)$ анықталмаған.

Дәлелдеуі. $y=f(x)$ функциясы x_0 нүктесінің маңайында дифференциалданатын болсын. Анықтама бойынша f функциясының локальді максимум (локальді минимум) x_0 нүктесіндегі мәні осы нүкте маңайындағы функция мәндерінің ішіндегі ең үлкені (кішісі) болып табылады. Олай болса, Ферма теоремасы бойынша $f'(x_0)=0$.

Функцияның x_0 нүктесінде туындысы болмаса да, оның экстремумы болуы мүмкін. Мысалы, $f(x)=|x|$ функциясының $f'(0)$ туындысы болмаса да, $x=0$ нүктесінде оның локальді минимумы бар болады.

Экстремумның қажетті шарты орындалған нүктелер күдік (немесе стационар) нүктесі деп аталады. Сонымен, егер қандай да бір нүктеде экстремум бар болса, ол нүкте күдік нүктесі болады. Бірақ керісінше сөйлем дұрыс бола бермейді. Күдік нүктесі экстремум нүктесі болмауы да мүмкін.

Енді экстремумның бар болуының жеткілікті шарттарын қарастырайық.

Теорема (экстремумның бірінші жеткілікті шарты). x_0 нүктесі $y=f(x)$ функциясының күдікті нүктесі болсын. Егер x_0 нүктесінің қандай болса да бір маңайы табылып және бұл маңай ішінде функцияның туындысы $f'(x)$ таңбасы x_0 - дің сол жағында $f'(x)>0$, ал оң жағында $f'(x)<0$ болса, онда x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының локальді максимум нүктесі де, ал керісінше жағдайда x_0 нүктесі локальді минимум нүктесі болады. Егер x_0 нүктесінің қандай болса да бір маңайында $f'(x)$ функциясы өз таңбасын үнемі сақтап қалдырса, онда x_0 нүктесі f функциясының экстремум нүктесі болмайды.

Теорема (экстремумның екінші жеткілікті шарты). $f'(x_0)=0, f''(x_0)\neq 0$ болсын. Сонда x_0 экстремум нүктесі болады. Сонымен бірге $f''(x_0)<0$ болғанда x_0 максимум нүктесі де, ал $f''(x_0)>0$ болғанда x_0 минимум нүктесі болады.

Бұл теоремалардың дәлелдеуін кез келген жоғары математика оқулығынан қарап танысуға болады. Біз бір мысал қарастырайық.

Кәсіпкер өзінің өндірген затының әр данасын p теңгеден өткізеді, ал ол затты өндіруге кеткен шығын мынадай $S(x)=ax+\lambda x^3$ $(a<p, \lambda>0)$ формуламен анықталсын. Кәсіпкер үшін оптималды өндіріс көлемі мен одан түсетін пайдасын анықтау керек.

Шешуі. Шығарылатын өнім көлемін x деп белгілейік. Пайда есептейтін формуланы табайық: $C(x)=px-(ax+\lambda x^3)$, мұндағы px - өткізілген өнімнің жалпы құны.

1) $C'(x)=(p-a)-3\lambda x^2$ туындыны есептейік.

2) Күдікті нүктелерін табамыз: $C'(x)=p-a-3\lambda x^2=0$,

$x_1=\sqrt{\dfrac{p-a}{3\lambda}}$ (есептің мазмұнына байланысты екінші күдік нүктені $x_2=-\sqrt{\dfrac{p-a}{3\lambda}}$ қарастырмаймыз).

3) Екінші туындыны $C''(x)=-6\lambda x$ тауып, x_1 нүктесіндегі таңбасын анықтайық:

$$C''\left(\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}\right)=-6\lambda\cdot\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}<0$$

(мына жағдайда кез келген $x>0$ үшін $C''(x)<0$, яғни, $x=\sqrt{\dfrac{p-a}{3\lambda}}$ болған кезде $C(x)$ пайда максимум мәнін қабылдайды екен.

4) Функцияның максимум мәнін (яғни, максималды пайда мөлшерін) табамыз.

$$C_{\max}\left(\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}\right)=\frac{(p-a)\sqrt{p-a}}{3\sqrt{3\lambda}}.$$

8.3. Функцияның кесіндідегі ең үлкен және ең кіші мәні. Егер $y=f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда осы кесіндіде функцияның ең үлкен және ең кіші мәнін әр уақытта табуға болады. Функция ол мәндерін экстремум нүктелерінде немесе кесінді ұштарында қабылдауы мүмкін.

Функцияның ең үлкен және ең кіші мәнін табу үшін мынадай үлгімен жұмыс істеген жөн:

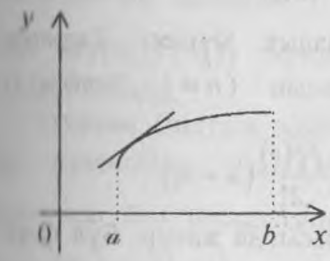
1) $f'(x)$ туындысын табу;

2) $f'(x)=0$ немесе туындысы жоқ болатын функцияның күдікті нүктелерін табу;

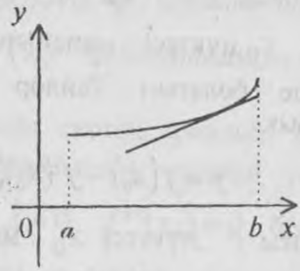
3) функцияның күдікті нүктелеріндегі және кесінді ұштарындағы мәндерін есептеп, солардың ішінен ең үлкені мен ең кішісін таңдап алу.

8.4. Функция графигінің дөңестігі және иілу нүктелері. Айталық $y=f(x)$ функциясы (a,b) интервалында дифференциалданатын болсын дейік.

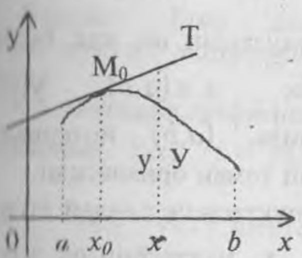
Анықтама. Егер (a,b) интервалында $y=f(x)$ функциясының графигі кез келген нүктесінде (жанасу нүктесін ескермегенде) жүргізілген жанамадан төмен жатса, онда $y=f(x)$ функциясының графигі дөңес (немесе дөңестігі жоғары қараған) деп аталады (1а-сурет). Ал егер функция графигі жанамадан жоғары жатса, онда функция графигі ойыс (немесе дөңестігі төмен қараған) деп аталады (1б- сурет)



1а-сурет



1б-сурет



2-сурет

Теорема (дөңестіктің жеткілікті шарты). $y = f(x)$ функциясы (a,b) интервалында екі рет дифференциалданатын болсын. Сонда, егер барлық $x \in (a,b)$ үшін $f''(x) < 0, (f''(x) > 0)$ болса, онда бұл интервалда f функциясының графигі дөңес (ойыс) болады.

Дәлелдеуі. Теореманы f функциясы графигінің дөңес болатын жағдайы үшін дәлелдейміз (ойыстығы осыған ұқсас дәлелденеді). Барлық $x \in (a,b)$ үшін $f''(x_0) < 0$ болсын. Қалауымызша $x_0 \in (a,b)$ нүктесін аламыз. Қарастырылып отырған интервалда барлық $x(x \neq x_0)$ үшін $y = f(x)$ функциясының графигі (2-сурет) $M_0(x_0, f(x_0))$ нүктесінен өтетін M_0T жанамасынан төмен жатқандығын дәлелдеу керек. Ол үшін

Сонда $Y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Енді біз f функциясы үшін x_0 нүктесі маңайындағы қалдық мүшесі Лагранж түрінде болатын Тейлор формуласын ($n = 1$ болғанда) жазайық:

$$y = f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2,$$

мұндағы c нүктесі x_0 мен x арасында жатыр. Бұл формуладан шығатыны $-Y + y = \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2$ $c \in (a,b)$ болғандықтан, $f''(c) < 0$. Сондықтан формуланың оң жақ бөлігі теріс болады. Демек, барлық $x \in (a,b)$ үшін $y - Y < 0 \Leftrightarrow Y > y$. Басқаша айтқанда, (a,b) интервалы аймағында функция графигі жанамадан төмен орналасқан.

Анықтама. Егер Ox осінде x_0 нүктесінің қандай болса да бір маңайы табылып, бұл маңайда x_0 нүктесінің оң жағы мен сол жағында $y = f(x)$ функциясы графигінің дөңестік қалпы ауысатын болса, онда $M_0(x_0, f(x_0))$ нүктесі графиктің иілу нүктесі деп аталады.

Енді иілудің қажетті және жеткілікті шарттарын дәлелдеусіз келтірейік.

Теорема (иілудің қажетті шарты). (a,b) интервалында $y = f(x)$ функциясының екінші ретті үздіксіз туындысы бар дейік. Егер $M_0(x_0, f(x_0))$ нүктесі функция графигінің иілу нүктесі болса, онда $f''(x_0) = 0$ болады.

Теорема (иілудің жеткіліктілігінің бірінші ережесі). $y = f(x)$ функциясының (a,b) интервалында екінші ретті үзіліссіз туындысы бар дейік. Сондықтан x_0 нүктесінде берілген функция үздіксіз болады. Егер x_0 нүктесінің қандай болса да бір маңайы табылып, бұл маңайда x_0 нүктесінің сол және оң жағында $f''(x)$ туындысы әр таңбалы болса, онда $M_0(x_0, f(x_0))$ нүктесі $y = f(x)$ функциясының иілу нүктесі болады.

Теорема (иілудің жеткіліктілігінің екінші ережесі). Егер x_0 нүктесінде $y = f(x)$ функциясының үшінші ретті туындысы бар болып және $f''(x_0) = 0$ $f'''(x_0) \neq 0$ болса, онда $M_0(x_0, f(x_0))$ нүктесі функция графигінің иілу нүктесі болады.

Ескерту. Егер дифференциалданатын функцияның күдікті нүктесі экстремум нүктесі болмаса, ол иілу нүктесі болады.

8.5. Функция графигінің асимптоталары.

1-анықтама. Егер $y = f(x)$ функциясы үшін $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ немесе $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ шектерінің ең болмағанда біреуі $+\infty$-ке не $-\infty$-ке тең болса, онда $x = a$ түзуі функция графигінің вертикаль асимптотасы деп аталады.

2-анықтама. $y = kx + b$ түзуі $f(x)$ функциясы былай жазылып көрсетілгенде

$$f(x) = kx + b + \alpha(x) \qquad \left(\lim_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0\right) \qquad (*)$$

$x \to +\infty$ жағдайда $y = f(x)$ функциясы графигінің көлбеу асимптотасы деп аталады.

Теорема (көлбеу асимптотаның бар болу шарты). $x \to +\infty$ жағдайда $y = f(x)$ графигінің $y = kx + b$ көлбеу асимптотасы бар болу үшін

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - kx\right] = b \qquad (**)$$

шектердің бар болуы қажетті де жеткілікті.

Дәлелдеуі. Қажеттілік $x \to +\infty$ жағдайда $y = f(x)$ функция-сының $y = kx + b$ асимптотасы бар дейік, яғни (*) шарт орындалсын. Сонда

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{kx + b + \alpha(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[k + \frac{b}{x} + + \frac{\alpha(x)}{x} \right] = k$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \to +\infty} [kx + b + \alpha(x) - kx] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} [b + \alpha(x)] = b.$$

Жеткіліктілік. Енді (**) шектер бар болсын. Бұлардың екіншісі бойынша $x \to +\infty$ жағдайда $f(x) - kx - b = \alpha(x)$ шексіз аз функция болады. Демек, $y = f(x)$ функциясы үшін (*) шарт, онымен бірге 2- анықтама да орындалады. Сонымен теорема дәлелденді.

8.6. Функция графигін салу. Функцияның өзгеруін зерттеп, оның графигін салуды мына үлгі бойынша орындау тиімді.

1) Функцияның анықталу облысы мен үзіліс (егер бар болса) нүктелерін табу .

2) Функцияның жұп-тақтылығын, периодын анықтау.

3) Вертикаль, көлбеу асимптоталарды (егер бар болса) табу.

4) Функцияның күдікті нүктелерін тауып, өсу, кему аралықтарын, экстремум нүктелерін табу.

5) Функцияның иілу нүктелерін, ойыс, дөңес аймақтарын табу.

6) Графиктің өстермен қиылысу нүктелерін табу.

7) Функция графигін сызып көрсету.

8.7. Қосымша танысу үшін. Мысал. 1 млрд.теңге 50 % -ік жылдық өсімімен банкке салуға болады немесе өндіріске индвестицияға беруге болады және бұнда тиімділігі 100 %, ал шығын квадраттық тәуелділікпен беріледі. Түскен пайдадан p% салық алынады. p-ның қандай мәнінде капиталды таза банкке салып қойғаннан өндіріске жұмсау тиімдірек болады ?

Шешуі. Айталық x (млрд.теңге) өндіріске инвестицияға жұмсалсын да, $1 - x$ - банкке проценттік өсімге салынсын.

Енді бір жылдан кейін банкке салынған капитал мынадай болады $(1-x)\left(1+\frac{50}{100}\right)=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}x$, ал өндіріске жұмсалған капитал $x\left(1+\frac{100}{100}\right)=2x$ болады. Шығын $\alpha x^2(\alpha>1)$ болады. Сонда түсетін пайда $c=2x-\alpha x^2$. Ұсталынатын салық мөлшері мынадай $\left(2x-\alpha x^2\right)\frac{\rho}{100}$ болады. Сонда таза пайда $\left(1-\frac{\rho}{100}\right)\left(2x-\alpha x^2\right)$ болады.

Сонымен, бір жылдан кейінгі жалпы капитал:

$$A(x)=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}x+\left(1-\frac{\rho}{100}\right)\left(2x-\alpha x^2\right)=\frac{3}{2}+\left[2\left(1-\frac{\rho}{100}\right)-\frac{3}{2}\right]x-$$

$$-\alpha\left(1-\frac{\rho}{100}\right)x^2.$$

Енді осы функцияның $[0;1]$ кесіндіде максималды мәнін табу керек.

Функция туындысын табайық

$$A'(x)=2\left(1-\frac{\rho}{100}\right)-\frac{3}{2}-2\alpha\left(1-\frac{\rho}{100}\right)x \quad \text{және}$$

$$A'(x)=0 \quad \text{бұдан} \quad x_0=\frac{2\left(1-\frac{\rho}{100}\right)-\frac{3}{2}}{2\alpha\left(1-\frac{\rho}{100}\right)}.$$

$A''(x)=-2\alpha\left(1-\frac{\rho}{100}\right)<0$, яғни экстремумның екінші жеткілікті шарты бойынша x_0 - максимум нүктесі.

Енді x_0 $[0;1]$ кесіндісінде жатуы үшін мына шарт орындалуы керек:

$$0 < 2\left(1 - \frac{\rho}{100}\right) - \frac{3}{2} < 2\alpha\left(1 - \frac{\rho}{100}\right), \text{ бұдан } p < 25.$$

Сонымен, егер $p < 25$ болса өндіріске ешт жұмсалмай, бәрін банкке салған тиімді. Егер $p < 25$ бол онда $x = x_0$ болғанда

$$A(x_0) = \frac{3}{2} + \frac{\left[2\left(1 - \frac{\rho}{100} - \frac{3}{2}\right)\right]^2}{4\alpha\left(1 - \frac{\rho}{100}\right)} > \frac{3}{2} = A(0),$$ яғни банк

салғаннан көрі өндіріске жұмсаған тиімдірек.

Тоғызыншы лекция

АНЫҚТАЛМАҒАН ИНТЕГРАЛ ЖӘНЕ ОНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ

9.1. Алғашқы функция. Анықталмаған интеграл және оның қарапайым қасиеттері. Туындысы белгілі функцияны табу мәселесін қарастырайық. f және F функциялары ақырлы немесе ақырсыз X аралығында анықталған функциялар дейік.

1-анықтама. Егер X аралығының барлық ішкі нүктелерінде дифференциалданатын F функциясы

$$F'(x) = f(x) \quad \text{немесе} \quad dF(x) = f(x)dx$$

теңдеулерін қанағаттандыратын болса, онда сол аралықта үзіліссіз F функциясы f функциясының алғашқы функциясы деп аталады.

1-теорема (алғашқы функциялар жиыны туралы). Егер X аралығында $F(x)$ және $\Phi(x)$ функциялары $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы болса, онда қандай да бір тұрақты C саны табылып, мына теңдік орындалады: $\Phi(x) = F(x) + C$

Дәлелдеуі. $\left(\Phi(x) - F(x)\right)' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ болғандықтан Лагранж теоремасының салдары (7-лекция) бойынша, қандай да бір тұрақты C саны табылып, мына теңдік орындалады $\Phi(x) - F(x) = C$ немесе $\Phi(x) = F(x) + C$.

Бұл теоремадан, егер $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы болса, онда $F(x) + C$ функциясы $f(x)$ функциясының барлық алғашқы функцияларының жиынтығы екені шығады.

2-анықтама. X аралығындағы $f(x)$ функциясының барлық алғашқы функцияларының жиыны оның сол аралықтағы анықталмаған интегралы деп аталып, $\int f(x)dx$ арқылы белгіленеді. $\int$ символы интеграл белгісі, $f(x)$-

интеграл астындағы функция, $f(x)dx$ - интеграл астындағы өрнек деп аталады.

Егер $F(x)$ функциясы X аралығында $f(x)$ функциясының алғашқы функцияларының бірі болса, онда 1-теорема бойынша

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Мұндағы C еркінше алынған тұрақты шама.

1 және 2-анықтамалардан анықталмаған интегралдың мынадай қарапайым қасиеттері тікелей шығады:

$$1^0.\ \left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$$

$$2^0.\ d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx$$

$$3^0.\ \int dF(x) = F(x) + C$$

1^0-қасиет $\left[\int f(x)dx\right]' = \left[F(x)+C\right]' = F'(x) = f(x)$ теңдіктері арқылы дәлелденеді, яғни анықталмаған интегралдың туындысы интеграл астындағы функцияға тең.

2^0-қасиет $d\left[\int f(x)dx\right] = d\left[F(x)+C\right] = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$ теңдіктері көмегімен дәлелденеді, яғни, егер дифференциал таңбасы интеграл таңбасынан бұрын тұрса, онда d мен $\int$ - таңбалары өзара қысқарып кетеді.

3^0-қасиет $\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$ теңдіктері арқылы дәлелденеді, яғни егер дифференциал және интеграл таңбаларының орындарын алмастырып, оларды қысқартсақ, онда ол таңбалардың өзара қысқаруы кез келген тұрақты C саны дәлдігімен орындалады.

4^0. Егер $f_1(x)$ және $f_2(x)$ X аралығында алғашқы функциялары бар болса, онда сол аралықта $f_1(x) + f_2(x)$ функциясының да алғашқы функциясы бар болады және

$$\int\left[f_1(x)+f_2(x)\right]dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx \qquad (2)$$

теңдігі орындалады.

Шынында да, $\int f_1(x)dx=F_1(x)+C_1$ және $\int f_2(x)dx=F_2(x)+C_2$ дейік. Олай болса 1^0-қасиет бойынша $F_1'(x)=f_1(x)$ және $F_2'(x)=f_2(x)$. $F_1(x)$ және $F_2(x)$ функциялары қосындысын $F(x)$ деп белгілейік. Сонда X аралығында

$$F'(x)=\left[F_1(x)+F_2(x)\right]'=F_1'(x)+F_2'(x)=f_1(x)+f_2(x)$$

теңдігі орындалады. Ал бұл теңдік $F(x)$ функциясының $f_1(x)+f_2(x)$ функциясының алғашқы функциясы екенін көрсетеді. Сондықтан $\int\left[f_1(x)+f_2(x)\right]dx=F(x)+C=F_1(x)+F_2(x)+C.$ Демек (2) формуланың сол жағы $F_1(x)+F_2(x)+C$ қосындысынан тұрады. Бірақ C,C_1,C_2 тұрақтылары кез келген ерікше алынған тұрақтылар болғандықтан, $C=C_1+C_2$ деп алуға болады, яғни $F_1(x)+F_2(x)+C$ және $F_1(x)+C_1+F_2(x)+C_2$ жиындары біріне-бірі тең.

5^0. Егер $f(x)$-тің X аралығында алғашқы функциясы бар болса, онда кез келген $k\neq 0$ саны үшін $k\cdot f(x)$ функциясының да сол аралықта алғашқы функциясы бар болып және мына теңдік орындалады:

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$$

Дәлелдеуі 4^0-қасиеттің дәлелдеуіне ұқсас.

6^0. Егер X аралығында $\int f(x)dx=F(x)+C$ болса, онда сол аралықта

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$$

теңдігі орындалады.

Шынында да,

$$\left[\frac{1}{a}F(ax+b)+C\right]' = \frac{1}{a}F'(ax+b)+(ax+b)' = \frac{1}{a}F'(ax+b)$$

$$\cdot a = F'(ax+b) = f(ax+b)$$

Демек, $\frac{1}{a}F(ax+b)$ функциясы $f(ax+b)$ функциясының алғашқы функциясы. Іс жүзінде мына жағдайлар жиі кездеседі:

егер $a=1$ болса, онда $\int f(x+b)dx = F(x+b)+C$;

егер $b=0$ болса, онда $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax)+C$.

9.2. Негізгі анықталмаған интегралдар кестесі. Функцияны интегралдау деп аталатын берілген функцияның анықталмаған интегралын табу амалы функцияны дифференциалдау амалына, яғни берілген функцияның туындысын табу амалына кері амал. 5 - лекцияның 3 параграфында негізгі элементар функциялардың туындылары кестесін алған болатынбыз. Оның әрбір формуласы $F'(x)=f(x)$ теңдігін дәлелдей тұра, интегралдаудың $\int f(x)dx = F(x)+C$ формуласына әкеліп соқтырады. Сөйтіп, негізгі анықталмаған интегралдар кестесін аламыз:

1. $\int 0dx = C$;   2. $\int 1dx = x+C$;

3. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \qquad x>0, \alpha\neq -1.$

4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|+C, \qquad x\neq 0,$

5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} - C, \qquad 0 < a \neq 1$, егер $a = \ell$, болса,

онда $\int \ell^x dx = \ell^x + C.$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C;$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C, \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in z$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C, \qquad x \neq k\pi, \quad k \in z$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C, \end{cases} \qquad -1 < x < 1,$

11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \mathrm{arctg} x + C, \\ -\mathrm{arcctg} x + C, \end{cases}$

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a} + C, \\ -\arccos \frac{x}{a} + C, \end{cases} \qquad -a < x < a, \quad a > 0$

13) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C \\ -\frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C \end{cases}$

14) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \qquad (|x| \neq a)$

Енді бірнеше мысалдар қарастырайық.

1. $\int\left(5\sin x+\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{2}{1+x^2}+\frac{10}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

$4^0,5^0$- қасиеттер мен 7,3,11,10- формулалар негізінде біз мына теңдікке келеміз:

$$\int\left(5\sin x+\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{2}{1+x^2}+\frac{10}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx=$$

$$=5\int\sin xdx+3\int\frac{dx}{\sqrt{x}}-2\int\frac{dx}{1+x^2}+10\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=-5\cos x+6\sqrt{x}-2arctgx+10\arcsin x+C.$$

2. а) $\int(3x+4)^{17}dx$, б) $\int\frac{dx}{5x+4}$,

в) $\int\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{3}}$, г) $\int\cos(x+1)dx$.

Бұл есептерді интегралдың 6^0 - қасиетін қолданып шығарамыз:

а) $\int(3x+4)^{17}dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+4)^{18}}{18}+C=\frac{(3x+4)^{18}}{54}+$
$+C \quad (a=3;b=4)$

б) $\int\frac{dx}{5x+4}=\frac{1}{5}\ln|5x+4|+C \quad (a=5;b=4)$

в) $\int\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{3}}=\frac{1}{\frac{1}{3}}tg\frac{x}{3}+C=3tg\frac{x}{3}+C \quad \left(a=\frac{1}{3};b=0\right)$

г) $\int\cos(x+1)dx=\sin(x+1)+C \quad (a=1; \quad b=1)$

9.3. Интегралдаудың негізгі әдістері.

1. Белгісізді ауыстыру жолымен интегралдау. Кестелік интегралдарға жатпайтын көптеген интегралдардың астындағы функциялардың алғашқы функцияларын бірден табу көбіне қиындыққа түседі. Мұндай интегралдарды шешудің ең тиімді әдістерінің бірі белгісізді ауыстыру әдісі болып табылады. Ауыстыру әдісі интегралдарды қарапайым интегралдарға түрлендіреді. Бұл әдіс мына қарапайым теоремаға негізделген:

2-теорема. Егер кейбір T аралығында үздіксіз $g(t)$ функциясы $\int g(t)dt = G(t)+C$ теңдігін қанағаттандыратын болса, онда X аралығында үздіксіз дифференциалданатын (яғни, туындысы да үзіліссіз) $t=\varphi(x)$ функциясы $\int g[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = G(\varphi(x))+C$ теңдігін қанағаттандырады (мұндағы T аралығы $t=\varphi(x)$ функциясының өзгеру облысы).

Дәлелдеуі. Теореманы дәлелдеу үшін мына байланысты келтіреміз:

$$\frac{d}{dx}G[\varphi(x)] = \frac{dG}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dx} = G'[\varphi(x)]\varphi'(x) = g[\varphi(x)]\varphi'(x),$$ мұндағы $G'[\varphi(x)] = g[\varphi(x)]$. Бұдан теңдіктің дәлелдемесі тікелей шығады.

$\int f(x)dx$ интегралын есептеу керек дейік. Интеграл астындағы $f(x)dx = g[\varphi(x)]\varphi'(x)dx$ теңдігін қанағаттандыратындай, дифференциалданатын $t=\varphi(x)$ функциясы табылды дейік. Сонымен бірге $\int g(t)dt = G(t)+C$ интегралы оңай интегралданатын болсын. Сонда, 2 - теорема негізінде берілген интеграл үшін $\int f(x)dx = G[\varphi(x)]+C$ формуласы орындалады.

Есептер шығарғанда жазудың мына тізбегін пайдаланған жөн:

$$\int f(x)dx = \int g[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \left\| \begin{matrix} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x)dx \end{matrix} \right\| = \int g(t)dt =$$

$$= G(t) + C = G[\varphi(x)] + C.$$

Мысал қарастырайық. 1) $\int(1+\cos^2 x)\sin x dx$.

$\sin x dx = d(\cos x)$ болғандықтан, $t = \cos x$ деп алып, интеграл астындағы өрнекті былайша түрлендіреміз:

$$(1+\cos^2 x)\sin x dx = (1+\cos^2 x)(-d(\cos x)) = -(1+t^2)dt.$$

Бұл өрнекті интегралдау қиын емес: $-\int(1+t^2)dt = -t - \frac{t^3}{3} + C$

Енді t - ның орнына $\cos x$ функциясын қойып, біржола мына теңдікті аламыз:

$$\int(1+\cos^2 x)\sin x dx = -\cos x - \frac{\cos^3 x}{x} + C$$

2) $\int \frac{xdx}{1+x^4} = \left| \begin{matrix} x^2 = t \\ xdx = \frac{dt}{2} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} arctgt + C = \frac{1}{2} arctgx^2 + C$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$

Бұл интеграл Эйлер ауыстыруын қолдану арқылы есептеледі:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \left\| \begin{matrix} t = x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \Rightarrow dt = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\right)dx \Rightarrow \\ \Rightarrow dt = \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2} + x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx \Rightarrow \frac{dt}{t} = \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$$

Сонымен, бұл формуланы да кестеге енгіземіз.

15) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

4) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \left\| \begin{matrix} x = a\cos t \Rightarrow dx = -a\sin t dt \\ \sqrt{a^2 - x^2} = a\sqrt{1-\cos^2 t} = a|\sin t| = a\sin t \end{matrix} \right\| =$

$= a^2 \int \sin^2 t dt = -\frac{1}{2}a^2 \int (1 - \cos 2t)dt = -\frac{a^2}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C = =$

$\left| \cos t = \frac{x}{a} \Rightarrow t = \arccos\frac{x}{a}; \frac{1}{2}\sin 2t = \sin t\cos t = \right.$

$= \frac{x}{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2} \left| = -\frac{a^2}{2}\arccos\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + C. \right.$

5) $\int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)} = \left\| \begin{matrix} x = atgt \Rightarrow dx = \frac{adt}{\cos^2 t}; \\ \left(x^2 + a^2\right)^2 = a^4\left(1 + tg^2 t\right)^2 = \frac{a^4}{\cos^4 t} \end{matrix} \right\| =$

$= \frac{1}{a^3}\int \cos^2 t dt = \frac{1}{2a^3}\int (1 + \cos 2t)dt = \frac{1}{2a^3}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + C =$

$= \left| \begin{matrix} x = atgt \Rightarrow t = arctg\frac{x}{a}; \frac{1}{2}\sin 2t = \sin t\cos t = \\ = \frac{tgt}{\sqrt{1 + tg^2 t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 t}} = \frac{ax}{x^2 + a^2} \end{matrix} \right| =$

$= \frac{1}{2a^3} arctg\frac{x}{a} + \frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2 + a^2} + C.$

2. Бөліктеп интегралдау.

3-теорема. $u(x)$ және $v(x)$ функциялары X аралығында үздіксіз және оның ішкі нүктелерінде дифференциалданатын функциялар болсын. Сонда, егер X аралығында $\int v du$

интегралы бар болса, онда сол аралықта $\int udv$ интегралы да бар болып, және

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (3)$$

теңдігі орындалады. (3) формула бөліктеп интегралдау формуласы деп аталады. Бұл формула $\int udv$ интегралын одан көрі есептеуге жеңілдеу $\int vdu$ интегралына түрлендіреді.

Теорема дәлелдеуінің орнына мысалдар қарастырайық.

1) $\int x\ell^{x}dx$. Бұл интегралда интеграл астындағы функция алгебралық x және трансценденттік ℓ^{x} функциясының көбейтіндісінен тұрады. Интегралдар кестесі 5 - формула бойынша $\int \ell^{x}dx = \ell^{x} + C$. Сондықтан интеграл астында алгебралық x функциясын жою үшін оны дифференциалдау қажет. Ол үшін оны u деп белгілеп (3) формуласын қолданайық. Сонда

$$\int x\ell^{x}dx = \left| \begin{matrix} x = u \Rightarrow dx = du \\ \ell^{x}dx = dv \Rightarrow v = \ell^{x} \end{matrix} \right| = x\ell^{x} - \int \ell^{x}dx =$$

$$= x\ell^{x} - \ell^{x} + C = \ell^{x}(x-1) + C.$$

2) $$J = \int \ell^{ax}\cos bxdx = \left| \begin{matrix} \cos bx = u \Rightarrow du = -b\sin bxdx \\ \ell^{ax}dx = dv \Rightarrow v = \dfrac{\ell^{ax}}{a} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{\ell^{ax}}{a}\cos bx + \frac{b}{a}\int \ell^{ax}\sin bxdx = \left| \begin{matrix} \sin bx = u \Rightarrow du = b\cos xdx \\ \ell^{ax}dx = dv \Rightarrow v = \dfrac{1}{a}\ell^{ax} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{\ell^{ax}}{a}\cos bx + \frac{b}{a}\left(\frac{\ell^{ax}}{a}\sin bx - \frac{b}{a}\int \ell^{ax}\cos bxdx\right) =$$

$$= \frac{\ell^{ax}}{a}\cos bx + \frac{b\ell^{ax}}{a^2}\sin bx - \frac{b^2}{a^2}\cdot J;$$

$$J + \frac{b^2}{a^2}J = \frac{1}{a^2}\ell^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)$$

$$J = \frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2 + b^2} + C.$$

Төмендегі интеграл тобы тек қана бөліктеп интегралдау әдісімен есептелінеді

$$\int x^n \ln xdx; \quad \int x^n \arcsin xdx; \quad \int x^n \arccos xdx; \quad \int x^n arctgxdx;$$

$$\int x^n (\ln x)^m dx; \qquad \int x^n (arctgx)^2 dx; \qquad n \in N.$$

Оныншы лекция

КЕЙБІР ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ, РАЦИОНАЛ ЖӘНЕ ИРРАЦИОНАЛ ФУНКЦИЯЛАРДЫ ИНТЕГРАЛДАУ

10.1. Рационал функцияларды интегралдау.

$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ (мұндағы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ - нақтылы сандар $a_n \neq 0$, $n \geq 0$) түріндегі өрнекті n - дәрежелі көп мүшелік деп атайды. Мысалы, $2x+3$ - бірінші дәрежелі көпмүшелік, $-x^4+3x^2+x+4$ - төртінші дәрежелі көпмүшелік. Екі көпмүшеліктің қатынасын рационал бөлшек немесе рационал функция дейміз. Мысалы, $\frac{3x-1}{x^2+1}$, $\frac{x^3-5x^2+1}{x-1}, \ldots$, - бөлшектер рационал функциялар.

Енді осы рационал функцияларды интегралдауды қарастырайық.

Егер бөлшек бұрыс бөлшек болса, онда оны көпмүшелікті көпмүшелікке бөлу арқылы көпмүшелік пен дұрыс бөлшектің қосындысы түріне келтіреміз. Мысалы,

$$\frac{x^3-3x+4}{x-2} = x^2+2x+1+\frac{6}{x-2},$$

$$\frac{4x^4-4x+5}{x^2-2x+1} = 4x^2+8x+12+\frac{12x-7}{x^2-2x+1}.$$

Сонда бастапқы рационал бөлшектің интегралы көпмүшелік пен дұрыс бөлшектің интегралдарының қосындысына тең болады.

Егер бөлшек бөлімі бірінші дәрежелі көпмүшелік болса, онда ізделінді интеграл $\int \frac{dx}{ax+b}$ түрінде болады да, оның интегралы $\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C$ тең болады.

Егер бөлшек бөлімі екінші дәрежелі көпмүшелік болса, онда ізделінді интеграл $\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx$ түрінде болады. Интеграл астындағы бөлшекті алымында бөлшек бөлімінің туындысы болып табылатын $2x+p$ қосылғышы бөлек бөлініп шығатындай етіп түрлендіреміз. Яғни

$$\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}dx=\frac{B}{2}\int\frac{(2x+p)+\left(\frac{2C}{B}-p\right)}{x^2+px+q}dx=$$

$$=\frac{B}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}=$$

$$=\frac{B}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+C_1+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}=$$

$$=\left|\begin{matrix}x+\frac{p}{2}=t\\ q-\frac{p^2}{4}=a^2\end{matrix}\right|=\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2-a^2}+\frac{B}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+C_1=$$

$$=\frac{(2C-Bp)}{2a}arctg\frac{t}{a}+C_2+\frac{B}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+C_1=$$

$$=\frac{B}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\frac{2C-Bp}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$$

$$(C_1+C_2=C)$$

Жалпы жағдайда, егер дұрыс бөлшек бөлімі $(x-a)^\alpha$ және $\left(x^2+px+q\right)^\beta$ түріндегі көбейткіштерге жіктелетін болса, онда дұрыс бөлшекті мына түрдегі қарапайым бөлшектердің қосындысына жіктеуге болады:

$$\frac{P(x)}{(x-a)^\alpha\left(x^2+px+q\right)^\beta}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+$$

$$+\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{B_\beta x+C_\beta}{(x^2+px+q)^\beta}$$

Мұндағы $A_1, A_2, \dots, A_\alpha, B_1, B_2, \dots, B_\beta, C_1, C_2, \dots, C_\beta$ - белгісіз коэффициенттерін табу үшін анықталмаған коэффициенттер әдісін қолданамыз: теңдіктің оң жағын ортақ бөлімге келтіреміз; теңдіктің бөлімдері тең болғандықтан, алымдарын теңестіреміз; екі көпмүшелік тең болады, егер олардың сәйкес x-тің бірдей дәрежелері коэффициенттері тең болса, яғни осы сәйкес коэффициенттерді теңестіру арқылы жүйе алып, оны шешу арқылы белгісіз коэффициенттерді табамыз.

Мысалы, $\dfrac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}$ бөлшегін қарапайым бөлшектердің қосындысына жіктейік.

$$\frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{(x+1)^2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Алымдарын теңестіреміз :

$$3x^2+2x+1=A_1x^3+A_1x+A_1x^2+A_1+A_2x^2+A_2+$$

$$+Bx^3+2Bx^2+Bx+Cx^2+2Cx+C$$

$$3x^2+2x+1=(A_1+B)x^3+(A_1+A_2+2B+C)x^2$$

$$+\left(A_1+B+2C\right)x+A_1+A_2+C$$

Енді бірдей дәрежелі x - тің коэффициенттерін теңестіреміз:

$$\begin{cases} A_1+B=0 \\ A_1+A_2+2B+C=3 \\ A_1+B+2C=2 \\ A_1+A_2+C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1=-B \\ -B+A_2+2B+1=3 \\ 0+2C=2 \Rightarrow C=1 \\ -B+A_2+1=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1=-B \\ A_2+B=2 \\ C=1 \\ A_2-B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1=-B \\ 2A_2=2 \Rightarrow A_2=1 \\ C=1 \\ A_2=B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1=-1 \\ A_2=1 \\ C=1 \\ B=1 \end{cases}$$

Табылған коэффициентерді орнына қойып қарапайым бөлшектер қосындысын аламыз:

$$\frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)} = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{x+1}{x^2+1}$$

10.2. Кейбір иррационал функцияларды интегралдау. Айнымалыларды алмастыру әдісімен иррационал функцияларды интегралдауды рационал функциялардың интегралына келтіру жағдайларын қарастырайық.

а) $\int R\left(x, \sqrt[n]{x}\right)dx$ түріндегі интегралды қарастырайық.

Мұндай интегралдардағы иррационалдықты $t = \sqrt[n]{x}$ деген белгілеу енгізіп, рационал функцияға келтіреді.

1 - мысал.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx = \left| \begin{matrix} t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{matrix} \right| = \int \frac{2t^2 dt}{t^2+1} =$$

$$= 2\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt = 2\int\left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt = 2(t - arctgt) + C =$$

$$= 2\left(\sqrt{x} - arctg\sqrt{x}\right) + C.$$

б) $\int R\left(x, \sqrt[n]{x}\right)dx$ түріндегі интеграл $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ түріндегі бөлшек сызықты иррационал интегралдың дербес жағдайы болады. Енді осы интегралды қарастырайық. Егер $ad - bc \neq 0$ болса, онда $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ өрнегін $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ ауыстыруын қолданып, рационал функцияға келтіруге болады.

2 - мысал.

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{1+x} = \left| \begin{matrix} t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \Rightarrow x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; dx = -\frac{4tdt}{(1+t^2)^2} \\ 1+x = \frac{2}{1+t^2} \Rightarrow \frac{1}{1+x} = \frac{1+t^2}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{t(1+t^2)}{2}\left(-\frac{4t}{(1+t^2)^2}\right)dt = -2\int\frac{t^2dt}{1+t^2} = -2\int dt + 2\int\frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= -2t + 2arctgt + C = -2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + 2arctg\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C$$

в) $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ түріндегі интегралын қарастырайық. Қарапайым жағдайларда бұндай интеграл кестелік интегралға (9 - лекция 10,13-формулалар) келтіріледі. Ол үшін квадрат үшмүшеліктен толық квадрат бөліп алып, айнымалыны алмастыру керек.

3 - мысал.

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{8+4x-4x^2}} = \left|\begin{array}{l} 8-4x-4x^2 = 9-(1-2x)^2 \\ 1-2x = t; \quad x = \dfrac{1-t}{2}, \quad dx = -\dfrac{1}{2}dt \end{array}\right| =$$

$$= -\frac{1}{4}\int\frac{1-t}{\sqrt{9-t^2}}dt = -\frac{1}{4}\int\frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} + \frac{1}{4}\int\frac{tdt}{\sqrt{9-t^2}}$$

Бірінші интеграл кестелік интеграл, ал екіншісі $z = 9-t^2$ деген жаңа айнымалы енгізгеннен кейін кестелік интегралға келеді.

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{8+4x-4x^2}} = -\frac{1}{4}\arcsin\frac{t}{3} - \frac{1}{8}\int z^{-\frac{1}{2}}dz =$$

$$= -\frac{1}{4}\arcsin\frac{1-2x}{3} - \frac{1}{4}\sqrt{8+4x-4x^2} + C.$$

10.3. Тригонометриялық өрнектерді интегралдау. $\int R(\sin x, \cos x)dx$ түріндегі интегралды қарастырайық.

Бұндай интегралды $t = tg\frac{x}{2}$, мұндағы $-\pi < x < \pi$, ауыстыруын қолданып рационал функцияны интегралдауға келтіруге болады. Шынында да,

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$x = 2arctgt, \quad dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$. Яғни

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt.$$

1- мысал.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{(1+t^2)2dt}{(1+t^2)2t} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C.$$

Бұл ауыстыру *универсал ауыстыру* деп аталады. Кей жағдайларда бұдан да тиімді болатын алмастыруларды қарастырайық.

а) Егер $R(\sin x, \cos x)$ функциясы өз таңбасын $\sin x$ немесе $\cos x$ функцияларының біреуінің таңбасын өзгерткенде қарама-қарсы таңбаға ауыстырса, онда олардың екіншісін t арқылы белгілеу пайдалы болып шығады .

б) Егер $R(\sin x, \cos x)$ функциясы $\sin x$ пен $\cos x$ -тің таңбаларын бір уақытта өзгерткенде өз таңбасын өзгертпесе, онда $t = tgx$ ауыстыруын пайдалану тиімді.

в) Егер $R(\sin x, \cos x)$ функциясы синустар мен косинустардың көбейтіндісіне тең болса, онда оны интегралдауда бұл өрнекті қосынды мен айырымға түрлендіру арқылы жеңілдетуге болады.

2 - мысал.

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t, \quad \cos x dx = dt, \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2 \end{array} \right| =$$

$$= \int t^2(1-t^2)dt = \int (t^2 - t^4)dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

3- мысал.

$$\int \frac{\sin^2 x \cdot \cos^2 x dx}{\left(\cos^3 x + \sin^3 x\right)^2} = \int \frac{tg^2 x d(tgx)}{\left(tg^3 x + 1\right)^2} = \left|tgx = t\right| = \int \frac{t^2 dt}{\left(t^3 + 1\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{d\left(t^3+1\right)}{\left(t^3+1\right)^2} = -\frac{1}{3\left(t^3+1\right)} + C = -\frac{1}{3\left(tg^3 x + 1\right)} + C.$$

4 - мысал.

$$\int \sin 2x \sin 4x dx = \left|\sin\alpha \cdot \sin\beta = 0{,}5\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int[\cos 2x - \cos 6x]dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 6x}{6}\right] + C =$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{12}\sin 6x + C.$$

10.4. "Алынбайтын интегралдар" туралы. Дифференциалдау ережелерінен кез келген элементар функцияның туындысы элементар функция болатыны шығады. Ал интегралдау амалы мұндай қасиетке әр уақытта ие бола бермейді, яғни интегралдары элементар функция болмайтын элементар функциялар бар. Сондықтан, бұндай анықталмаған интегралдарды "алынбайтын" интеграл деп, ал интеграл астындағы функцияларды элементар функциялар жиынында интегралданбайды деп атайды. Олар:

$$\int \ell^{-x^2} dx, \ \int \cos x^2 dx, \ \int \sin x^2 dx, \ \int \frac{dx}{\ln x} (0 < x \neq 1),$$

$$\int \frac{\sin x}{x} dx, \ \int \frac{\cos x}{x} dx$$

Бірақ бұл функциялар негізгі элементар функциялармен салыстырғанда әбден, егжей-тегжейлі зерттелген, өйткені олар іс жүзінде аса жиі қолданылады.

Он бірінші лекция

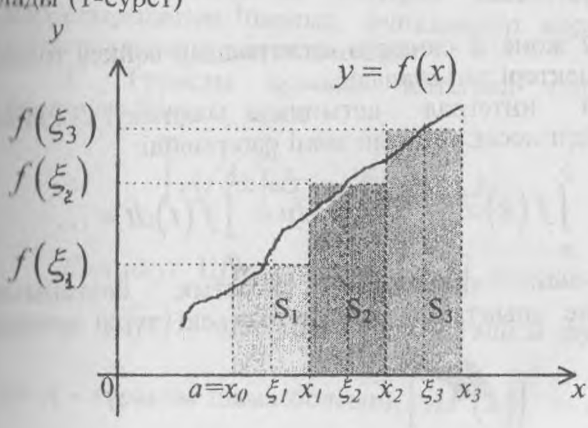
АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛ

11.1. Анықталған интеграл анықтамасы және геометриялық мағынасы. $y=f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде берілсін. $[a,b]$ кесіндісін $x_0, x_1, \ldots, x_n$ нүктелерімен n бөлікке бөлеміз: $a=x_0<x_1<x_2<\ldots x_n=b$. Әрбір $[x_{i-1}, x_i]$ кесіндісінен қандай да бір ξ_i нүктелерін алып, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ деп белгілеп (мұндағы $i=1,2,\ldots,n$) мынадай қосынды құрайық

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (1)$$

Бұл қосындыны $y=f(x)$ функциясының $[a,b]$ кесіндісіндегі интегралдық қосындысы деп атаймыз.

Енді $y=f(x)$ функциясы осы кесіндіде оң болсын. Онда (1) интегралдық қосындысының әр қосылғышы $f(\xi_i)\Delta x_i$ қабырғалары $f(\xi_i)$ және $\Delta x_i (i=1,2,\ldots,n)$ болатын тік төртбұрыштың S_i ауданына тең болады деуге болады (1-сурет)



1-сурет.

Сонда S_i дегеніміз $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ кесіндідегі $y = f\left(\xi_i\right)$ түзуінің астындағы аудан. Сондықтан (1) интегралдық қосынды әр $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ кесіндісінде абсцисса өсіне параллель болатын $f\left(\xi_i\right)$ кесінділері астындағы аудандардың қосындысына тең болады:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n$$

$\left[a, b\right]$ кесіндісін құрайтын $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ кесінділерінің ішіндегі ең үлкенін $\max \Delta x_i$ деп белгілейік.

Анықтама. (1) интегралдық қосындының $\max \Delta x_i \to 0$ жағдайдағы шегі $x_0, x_1, \ldots, x_n$ және $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ нүктелерді қалай таңдап алғанымызға байланыссыз бар және ақырлы болсын. Онда осы шек $y = f\left(x\right)$ функциясының $\left[a, b\right]$ аралығындағы анықталған интегралы деп аталып $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$ деп белгіленеді, ал $y = f\left(x\right)$ функциясы $\left[a, b\right]$ кесіндісінде интегралданады дейміз, яғни $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx = \lim\limits_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ i}} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\xi_i\right)\Delta x_i$

Мұндағы a және b сандары интегралдың сәйкес төменгі және жоғарғы шектері деп аталады.

Анықталған интеграл астындағы өрнекті қандай айнымалымен белгілесек те оның мәні өзгермейді:

$$\int\limits_a^b f\left(x\right)dx = \int\limits_a^b f\left(y\right)dy = \int\limits_a^b f\left(t\right)dt = \ldots$$

Белгілеуі мен айтылуына ұқсастық болғанымен анықталған және анықталмаған интеграл екі түрлі ұғымды береді: $\int f(x)dx$ - функциялар жиынтығы болса; $\int_a^b f(x)dx$ - нақтылы сан болады.

11.2. Анықталған интегралдың геометриялық мағынасы. Анықталған интеграл $[a,b]$ кесіндісінде $y=f(x)$ функциясы оң болғанда $\int_a^b f(x)dx$ сан мәні $y=f(x)$ функциясының астында жатқан S ауданға тең болады деп анықталды. Шынында да, $\max_i \Delta x \to 0$ жағдайда әр $[x_{i-1},x_i]$ аралықта анықталған кесінді функция қисығына шексіз жақындайды, ал бұл дегеніміз кесінді астындағы аудан функция графигі астындағы ауданға ауысады деген сөз. Сонымен, анықталған интегралдың геометриялық мағынасы: $\int_a^b f(x)dx$ - үстінгі жағынан үздіксіз және теріс емес $f(x)$ функциясы графигімен, бүйір жақтарынан $x=a, x=b$ түзулерімен, ал астыңғы жағынан $0x$ осімен шектелген қисық сызықты трапеция ауданы.

11.3. Анықталған интеграл қасиеттері. Осы бөлімде қарастырылатын барлық функциялар көрсетілген кесіндіде интегралданады деп келісейік.

1^0. Тұрақты шаманы интеграл таңбасының алдына шығаруға болады, яғни

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx.$$

Дәлелдеуі. Шынында да, $[a,b]$ кесіндісінде $F(x)$ функциясы $f(x)$ - функциясының алғашқы функциясы болсын, ал A - тұрақты шама болсын. $[AF(x)]' = AF'(x) = Af(x)$

болғандықтан, $AF(x)$ функциясы $Af(x)$-тің алғашқы функциясы болады. Сонда

$$\int_a^b Af(x)dx = AF(x)\Big|_a^b = AF(b) - AF(a) = A[F(b) - F(a)] = A\int_a^b f(x)dx$$

2^0. Екі функцияның алгебралық қосындысының интегралы сол функциялар интегралдарының алгебралық қосындысына тең болады, яғни,

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

Бұл қасиет 1^0 -қасиетке ұқсас дәлелденеді.

Анықталған интеграл анықтамасын енгізгенде $a < b$ деп есептелінген болатын. Енді $b < a$ жағдайына кеңейтейік. Бұны $\int_a^b f(x)dx$ интегралы бар деп санап, мына келісім арқылы енгіземіз:

$$\int_a^a f(x)dx = 0; \qquad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Енді бірнеше қасиетті дәлелдеусіз келтірейік.

3^0. a, b, c нүктелері қай ретте орналасса да мына теңдік орындалады:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

4^0. Егер $[a,b]$ ($a < b$) кесіндісінде $f(x) \le g(x)$ болса, онда

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

Салдары. $[a,b]$ ($a < b$) кесіндісінде $m \le f(x) \le M$ орындалсын, мұндағы m, M - қандай да бір сандар. Онда

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Орташа мән туралы теорема. Егер $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ $(a < b)$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда қандай да бір $\xi \in [a,b]$ нүктесі табылып мына теңдік орындалады.

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Бұл теорема бойынша, егер $[a,b]$ кесіндісінде $f(x) \ge 0$ болса, онда $[a,b]$ кесіндісінен $y = f(x)$ қисығының астында жатқан аудан қырлары $(b-a)$ және $f(\xi)$ болатын тік төртбұрыш ауданына тең болатындай ξ нүктесі табылады.

11.4. Жоғарғы шегі айнымалы анықталған интеграл. $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде интегралданады дейік. Сонда ол $[a,b]$ кесіндісінде жатқан кез келген $[a,x]$ кесіндісінде де интегралданады. Демек, кез келген $x \in [a,b]$ үшін $\int_a^x f(t)dt$ бар және x аргументінің функциясы болады. Оны

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt. \quad (2)$$

деп белгілейік. $\Phi(x)$ *жоғары шегі айнымалы интеграл* деп аталады. Енді осы $\Phi(x)$ функциясының екі қасиетін көрсетейік.

1^0. Егер $f(x)$ функциясы $[a,x]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда $\Phi(x)$ функциясы да сол кесіндіде үзіліссіз болады.

2^0. Егер $f(x)$ функциясы $[a,x]$ кесіндісінде үзіліссіз болса, онда $[a,x]$ кесіндісінде $\Phi(x)$ функциясының жоғары шегі бойынша туындысы интеграл астындағы функцияға тең болады.

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x).$$

11.5. Ньютон-Лейбниц формуласы.

Теорема. $f(x)$ функциясы $[a,x]$ кесіндісінде үзіліссіз, ал $F(x)$ функциясы оның сол кесіндідегі қандай болса да бір алғашқы функциясы болсын. Сон да

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{3}$$

Дәлелдеуі. $f(x)$ функциясы $[a,x]$ кесіндісіндегі алғашқы функциясы ретінде

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad a \le x \le b$$

функциясын алуға болады (2^0-қасиет бойынша).

$\Phi(x)$ және $F(x)$ функциялары $f(x)$ функциясының екі алғашқы функциясы болғандықтан, $\Phi(x) = F(x) + C$ болады, яғни

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C.$$

Бұдан $x = a$ болғанда, $C = -F(a)$ болады. Демек,

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Енді $x = b$ деп алсақ, онда керекті (2) формула шығады.

11.6. Анықталған интегралды шешудің айнымалыны алмастыру және бөлшектеп интегралдау әдістері.

Теорема. $[a,b]$ кесіндісінде $f(x)$ функциясы үзіліссіз, ал $[\alpha;\beta]$ кесіндісінде $\varphi(t)$ функциясы мен оның туындысы анықталған және үзіліссіз дейік. Мұндағы $\alpha \le t \le \beta$ болғанда $a = \varphi(\alpha) \le \varphi(t) \le \varphi(\beta) = b$ болады. Сонда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{4}$$

(4) формула анықталған интегралда айнымалыны алмастыру деп аталады.

Дәлелдеуінің орнына бір мысал қарастырайық.

1-мысал. $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$.

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx = \left| \begin{array}{l} x = a\sin t \Rightarrow dx = a\cos tdt \\ x = 0 \Rightarrow t = 0; x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 tdt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Теорема. $u = u(x), v = v(x)$ функциялары және олардың туындылары $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз дейік. Сонда

$$\int_a^b udv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b vdu. \tag{5}$$

теңдігі орындалады.

(5) формула анықталған интегралда бөлшектеп интегралдау деп аталады.

2-мысал. $\int\limits_0^1 \ln(1+x)dx = \left| \begin{array}{l} u=\ln(1+x) \Rightarrow du = \dfrac{dx}{1+x} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right| =$

$$= x\cdot\ln(1+x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{xdx}{1+x} = \ln 2 - \int\limits_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx =$$

$$= \ln 2 - \left[x - \ln|1+x|\right]\Big|_0^1 = \ln 2 - [1 - \ln 2 - 0 + \ln 1] = \ln 2 - 1 + \ln 2 = \ln 4 - 1$$

11.7. Анықталған интегралдың геометриялық қолданулары.

1. Жазық фигуралардың ауданын табу. $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде оң және үзіліссіз болсын. Онда анықталған интегралдың геометриялық мағынасынан қисық сызықты трапеция ауданы

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx$$

формуласымен есептелетіні белгілі.

1-ескерту. Егер қисық сызықты трапецияны үстінен шенейтін қисығы параметрлік $x = x(t), y = y(t),\ \alpha < t < \beta$ теңдеулері арқылы берілген болса, мұндағы $y(t)$ функциясы үзіліссіз, ал $x(t)$ функциясы үзіліссіз дифференциалданатын функция және $a = x(\alpha), b = x(\beta)$ болса, онда фигура ауданы

$$S = \int\limits_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt$$

формуласы арқылы есептелінеді.

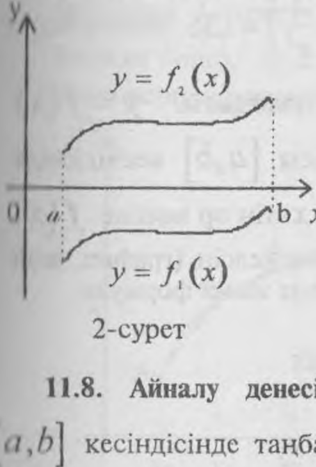
2-ескерту. $x=a$ және $x=b$ түзулері мен $f_1(x)$ және $f_2(x)$ үзіліссіз функциялары графиктерімен (мұндағы $f_1(x)\le f_2(x)$) шенелген жазық фигураның ауданы (2-сурет)

$$S=\int_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx$$

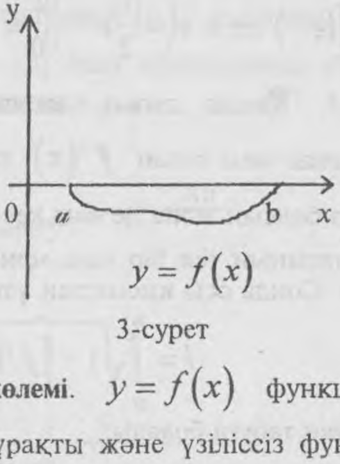
формуласы арқылы есептеледі. Жеке жағдайда, егер $f_2(x)=0$, ал $f(x)=f_1(x)\le 0$ болса (3-сурет), онда сәйкес аудан

$$S=-\int_a^b f(x)dx$$

формуласы бойынша есептеледі.



2-сурет

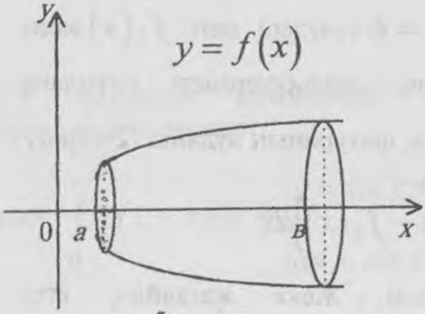


3-сурет

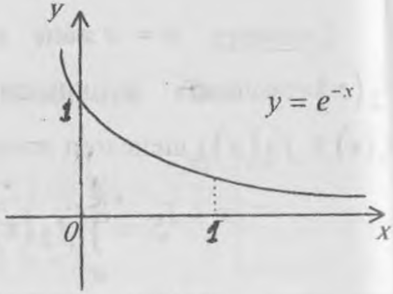
11.8. Айналу денесінің көлемі. $y=f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде таңбасы тұрақты және үзіліссіз функция болсын. $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$, $x=b$ сызықтарымен шенелген қисық сызықты трапеция абсцисса өсін айналғанда шыққан дене (5-сурет) көлемі

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

формуласымен есептелетінін дәлелдеуге болады.



5-сурет



6-сурет

Мысал қарастырайық: $y=e^{-x}$, $y=0$, $x=0$, $x=1$ сызықтарымен шенелген фигураның $0x$ өсін айналғанда пайда болған дене көлемін табу керек (6-сурет).

Шешуі. Көлем формуласын қолданамыз

$$V=\pi\int_0^1\left(e^{-x}\right)^2dx=\pi\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)\approx 1{,}36 \text{ (көлем.бір)}$$

11.9. Қисық сызық доғасының ұзындығы. $y=f(x)$ функциясы мен оның $f'(x)$ туындысы $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз болсын және де осы кесіндіде x-тің әр мәніне $f(x)$ функциясының тек бір ғана мәні сәйкес келсін (график, жәй қисық). Сонда осы қисықтың ұзындығын мына формула

$$l=\int_a^b\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx$$

көмегімен табуға болады.

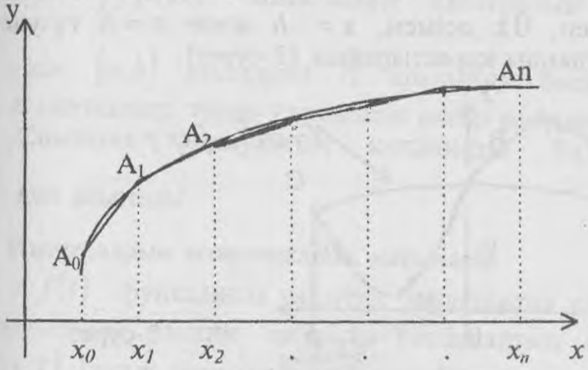
Он екінші лекция

АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛДЫҢ ЖУЫҚТАП ЕСЕПТЕЛУІ. ЭКОНОМИКАДАҒЫ ҚОЛДАНЫСЫ

Интеграл астындағы үздіксіз функциялардың бөріне бірдей элементар функциялар арқылы өрнектелетін алғашқы функциялары табыла бермейтіні туралы айтылған болатын. Осындай жағдайларда интегралды жуықтап есептеу аса маңызды мөсле болып табылады.

Интегралды жуықтап есептеудің екі тәсілін қарастырайық.

12.1. Трапециялар формуласы. Айталық $\int_a^b f(x)dx$ интегралын есептеу керек болсын (мұндағы $f(x)$ үзіліссіз функция). 1-суретте көрсетілгендей $[a,b]$ кесіндісін тең n бөлікке бөліп, $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ бөлу нүктелерінде абсциссалар осіне перпендикуляр тұрғызамыз.



1-сурет.

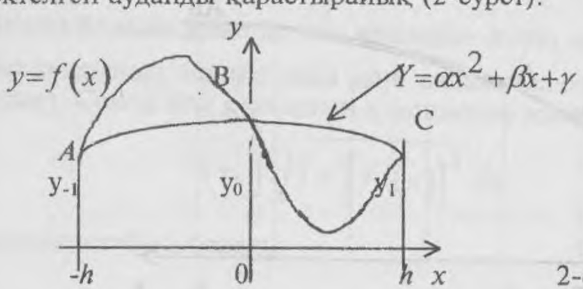
Егер перпендикулярдың үздіксіз $f(x)$ функциясының графигімен қиылысу нүктелерін түзу кесіндісімен қоссақ, онда графикке іштей сызылған $A_0 A_1 A_2 \ldots A_n$ сынық сызығын аламыз. Егер $f(x)>0$ болса, онда $[a,b]$ кесіндісін бөліктерге бөлшектегенде шыққан қисық бөлік трапециялардың аудандарын $S_i = \frac{y_{i-1}+y_i}{2}\cdot\frac{b-a}{n}$ сәйкес түзу сызықты трапециялар аудандарымен жуықтап ауыстыруға болады. Сонда $\int_a^b f(x)dx$ интегралы қисық сызықты бөлік трапециялардың аудандарын есептейтін сәйкес интегралдар қосындысына тең бола тұра, шамамен түзу сызықты бөлік трапециялар аудандарының қосындысына тең болады, яғни

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{b} f(x)dx \approx$$

$$\approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right)$$

Бұл формула трапециялар формуласы деп аталады. Бұл формуланың дәлдігін $[a,b]$ кесіндісін бөлу нүктелерінің санын көбейту арқылы арттырады.

12.2. Параболалар (Симпсон) формуласы. $y = f(x)$ функциясымен, $0x$ осімен, $x=-h$ және $x=h$ түзулермен шектелген ауданды қарастырайық (2-сурет).



2-сурет

Егер h аз болса, онда $y = f(x)$ қисығын $A(-h, y_{-1})$, $B(0, y_0)$ және $C(h, y_1)$ нүктесінен өтетін

$$Y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \tag{1}$$

параболасымен алмастыруға болады. Сонда $\int_{-h}^{h} ydx$ интеграл жуық шамамен мынаған тең

$$\int_{-h}^{h}\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)dx=\left(\frac{\alpha x^3}{3}+\frac{\beta x^2}{2}+\gamma x\right)\Bigg|_{-h}^{h}=\frac{2\alpha}{3}h^3+2\gamma h \qquad (2)$$

(1) формулаға x-тің орнына $x=-h,\ 0,\ h$ мәндерін қойып мыналарды табамыз.

$$y_{-1}=\alpha h^2-\beta h+\gamma,\ y_0=\gamma,\ y_1=\alpha h^2+\beta h+\gamma \qquad (3)$$

Бұдан

$$\gamma=y_0,\quad \alpha=\frac{y_{-1}-2y_0+y_1}{2h^2}. \qquad (4)$$

Табылған мәндерді (2) формулаға қойып мынаны аламыз:

$$\int_{-h}^{h} ydx\approx\frac{1}{3}h\left(y_{-1}-2y_0+y_1\right)+2y_0h=\frac{h}{3}\left(y_{-1}+4y_0+y_1\right)$$

(Симпсон формуласы)

Ескерту. $\int_a^b f(x)dx$ анықталған интегралын дәлірек есептеу үшін $[a,b]$ кесіндісін n аралыққа бөліп алып, мұндағы n-жеткілікті түрде үлкен етіп алған натурал сан, әр бөлікке Симпсон формуласын қолданады. Бұл кезде $h=\dfrac{b-a}{2n}$ деп алынады.

12.3. Интегралдың экономикалық мағынасы.

1. $z=f(t)$ функциясы уақытқа байланысты қандай да бір кәсіпорынның өндіріс өзгерісін сипаттайтын функция болсын. $[0,T]$ уақыт аралығындағы өндірілген u өнім көлемін анықтайық.

Егер уақыт өзгерісіне байланысты өндіріс өзгермейтін болса ($f(t)$ - тұрақты функция), онда Δu өнім көлемі $[t,t+\Delta t]$ уақыт аралығында мына $\Delta u=f(t)\Delta t$ формуламен есептелінер еді. Ал жалпы жағдайда $\Delta u=f(\xi)\Delta t$, мұндағы

$\xi \in [t, t+\Delta t]$, жуық формуласын аламыз, және де бұл формула неғұрлым Δt аз болса, соғұрлым дәлірек болар еді.

$[0,T]$ кесіндіні $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T$ нүктелерімен бөлейік. $[t_{i-1}, t_i]$ уақыт аралығында өндірілген өнім көлемі Δu_i үшін мына формуланы аламыз. $\Delta u_i = f(\xi_i)\Delta t_i$, мұндағы $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i], \Delta t_i = = t_i - t_{i-1}, i = 1,2,\ldots,n$

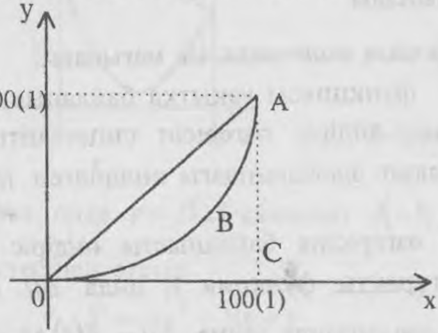
Сонда $u \approx \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta u_i = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi)\Delta t_i$ $\max\limits_{i} \Delta t_i \to 0$ жағдайда бұл формула нақтылы мәніне дәлірек жақындар еді, сондықтан

$$u = \lim_{\max\limits_{i} \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta t_i$$

Анықталған интегралдың анықтамасын ескерсек

$$u = \int_0^T f(t)dt$$

яғни, егер $f(t)$ - еңбек өнімділігі болса, онда $\int_0^T f(t)dt - [0,T]$ уақыт аралығында өндірілген өнім көлемі болады.



3-сурет

2.Барлық қосымша пайданың халыққа таралуының процентті көрсеткішін Лоренц қисығы бейнелейді.

Егер пайда халыққа бірқалыпты таратылса Лоренц қисығы түзу сызық - OA биссектриса болады. Ал басқа жағдайларда ол қисық түрі OBA доғасы түрінде болады (3-сурет). Осы қисықты зерттеу нәтижесінде халыққа пайданың дұрыс таратылмау дәрежесін анықтауға болады. Осы дәрежені (немесе, Джини коэффициенті) табу үшін OAB фигурасының ауданын OAC үшбұрышының ауданына бөлуіміз керек:

$$k = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}} = 1 - \frac{S_{OBAC}}{S_{\Delta OAC}} = 1 - 2S_{OBAC}, \quad \text{өйткені} \quad S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}.$$

Лоренц қисығы нақтылы функция түрінде берілсе S_{OBAC} ауданы анықталған интеграл көмегімен тауып, Джини коэффициентін есептеуге болады.

3. Жылдық өсу процент мөлшері p болатын t (жыл) уақыт өткеннен кейін жиналған құн мөлшеріне байланысты басында қанша ақша салғанын анықтауды дисканттау деп атайды. Бұндай есептер салынған капиталдың экономикалық тиімділігін анықтау үшін қажет.

Айталық, K_t - соңғы (t жыл ішінде жиналған) құн, K - бастапқы (дисканттталатын) құн. Егер процент қарапайым болса, онда $K_t = K(1+it)$, мұндағы $i = \frac{p}{100}$ екенін білесіздер. Сонда $K = K_t/(1+it)$. Ал процент күрделі болса $K_t = K(1+it)$, ал $K = K_t/(1+it)^t$.

Енді жыл сайын түсіп отыратын пайда уақытқа байланысты өзгеріп, $f(x)$ функциясымен беріледі дейік және шектік процент мөлшері i болып, ол процент үздіксіз қосылып отырады делік. Осы жағдайда T уақытта бастапқы (дисканттталған пайда) құн K мына

$$K = \int_0^T f(t)e^{-it}dt$$

формуласымен есептелінетінін көрсетуге болады.

4. Затты жасауға кеткен өндірісті меңгеру дәрежесінен тәуелді уақытты бейнелейтін $t = t(x)$ функциясы белгілі болсын, мұндағы x - заттың реттік номері болсын. Онда затты

меңгерудің x_1 ден x_2 аралығындағы затты дайындауға кеткен орташа уақыт t_{op} орта мән туралы теоремамен есептеледі

$$t_{op} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} t(x) dx .$$

Затты дайындауға кеткен уақыт өзгерісін көрсететін $t = t(x)$ функциясы көбіне $t = ax^{-b}$ түрінде болады, мұндағы a - бірінші затты өндіруге кеткен уақыт, b - өндіріс процесінің көрсеткіші.

Он үшінші лекция

ҚАРАПАЙЫМ (ЖӘЙ) ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

1-анықтама. Тәуелсіз x, ізделінді функция y және оның әр түрлі ретті туындыларын байланыстыратын теңдеуді дифференциалдық теңдеу деп атайды.

Жалпы түрде дифференциалдық теңдеуді

$$F(x, y, y', \ldots, y^n) = 0$$

түрінде жазып көрсетуге болады.

Дифференциалдық теңдеуге кіретін туындының ең жоғарғы реті осы теңдеудің реті болады.

Бірінші ретті дифференциалдық теңдеуді қарастырайық.

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

(1) теңдеуді тепе-теңдікке айналдыратын кез келген $y = \varphi(x)$ функциясы осы теңдеудің *шешімі* деп, ал осы шешімді табуды дифференциалдық *теңдеуді интегралдау* деп атайды.

Бірінші ретті теңдеу туынды бойынша шешіліп, $y' = f(x, y)$ түрінде жазылуы да мүмкін.

Теорема. Егер $y' = f(x, y)$ теңдеуіндегі $f(x, y)$ функциясы және оның дербес f'_y туындысы (x_0, y_0) нүктесі жататын xOy жазықтығының D облысында үзіліссіз болса, онда $x = x_0$ болғанда $y = y_0$ шарты орындалатын осы теңдеудің жалғыз шешімі $y = \varphi(x)$ табылады.

Теореманың геометриялық мағынасы графигі (x_0, y_0) нүктесінен өтетін жалғыз ғана функцияның табылатынын көрсетеді.

Бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі $y = \varphi(x, C)$ түрінде жазылады, яғни бұл шешімге бір тұрақты C кіреді.

Дербес шешім жалпы шешімнен бастапқы шарт $y/_{x=x_0} = y_0$ берілгенде ғана анықталады да, $y = \varphi\left(x, C_0\right)$ түрінде жазылады.

Егер жалпы шешім $\phi\left(x, y, C\right) = 0$ түрінде алынса, онда оны интеграл деп атайды. Жалпы интегралдың (жалпы шешімінің) геометриялық мағынасы координата жазықтығында дифферциалдық теңдеудің интегралдық қисықтары деп аталатын бір параметрлік қисықтар тобынан тұрады.

Жалпы интегралға сәйкес дербес интегралды $\phi\left(x, y, C_0\right) = 0$ түрінде жазады, мұндағы C_0 - берілген $y/_{x=x_0} = y_0$ бастапқы шартқа сәйкес C параметрінің мәні. Дербес интеграл жазықтықтың берілген $\left(x_0, y_0\right)$ нүктесінен өтетін қисықтар тобының бір ғана қисығын өрнектейді.

1-мысал. $y = Cx^3$ функциясы $3y - xy' = 0$ дифферциалдық теңдеуінің жалпы шешуі болатынын тексер. Интегралдық қисықтарды салып, мына $y_{x=1} = \dfrac{1}{3}$ бастапқы шартты қанағаттандыратын дербес шешімді табу керек.

Шешуі. Берілген $y = Cx^3$ функциядан туынды тауып, олардың мәнін теңдеуге қояйық:

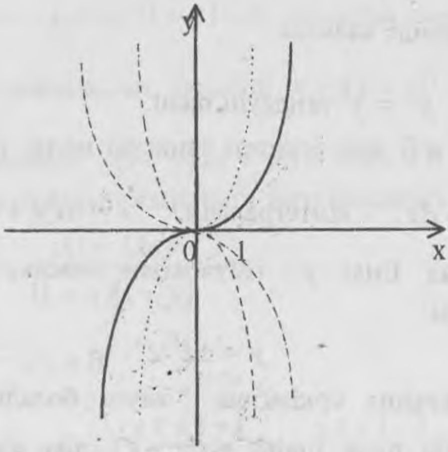
$$y' = 3Cx^2,\ 3 \cdot Cx^3 - x \cdot 3Cx^2 = 3Cx^3 - 3Cx^3 = 0,$$ яғни

$y = Cx^3$ функциясы берілген дифференциалдық теңдеуді тепе-теңдікке айналдырғандықтан, ол жалпы шешім болады.

Енді интегралдық қисықтарды салайық (1 - сурет) .

$C = 0$ болған жағдайда $y = 0$ (Ox өсі) $y = \dfrac{1}{3}x^3$ түзуі, $C > 0$ болғанда өспелі куб парабола графиктері тобын аламыз да, $C < 0$ болғанда кемімелі куб парабола графиктері тобын аламыз.

Енді бастапқы шартты қанағаттандыратындай дербес шешімді табайық: $C_0 \cdot 1^3 = \dfrac{1}{3} \Rightarrow C_0 = \dfrac{1}{3};$



1-сурет.

Яғни, $y = \frac{1}{3}x^3$ - дербес шешім. Ол графикте салынып көрсетілген.

Енді бірінші ретті дифференциалдық теңдеудің негізгі типтерімен танысайық.

1. Айнымалылары ажыратылатын теңдеулер.

Алдымен бір-екі дербес жағдайды қарастыра кетейік.

а) Егер теңдеу $y' = f(x)$ немесе $\frac{dy}{dx} = f(x)$ түрінде болса, онда ол теңдеуді $y = f(x)dx$ түрінде жазып алып, бірден интегралдап, шешімін табамыз:

$$y = \int f(x)dx$$

б) Егер теңдеу $y' = f(y)$ немесе $\frac{dy}{dx} = f(y)$ түрінде болса, онда ол теңдеуді $\frac{dx}{f(y)}$ көбейткішіне көбейтіп, былай жазамыз:

$$\frac{dy}{f(y)} = dx$$

Енді теңдеуді интегралдасақ, теңдеу шешімін мына $x = \int \frac{dy}{f(y)}$ түрінде аламыз.

2 - мысал. $y' = y$ теңдеуін шеш.

Шешуі. $y \neq 0$ деп есептеп теңдеуді мына түрде жазайық $\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = dx$. Интегралдап, $x = \ln|y| + C_1$ түріндегі шешуін аламыз. Енді y- ті табатын болсақ, шешім мына түрде жазылады:

$$y = \pm \ell^{C_1} \ell^{x}.$$

C_1 тұрақтыны еркімізше алуға болады, сондықтан жазуға қолайлы болу үшін $\pm \ell^{C_1} = C$ деп алайық. Сонда, жалпы шешім $y = C\ell^{x}$ түрінде болады.

13.1. Енді айнымалысы ажыратылатын теңдеуді қарастырайық.

$$M_1(x) \cdot N_1(y)dx + M_2(x) \cdot N_2(y)dy = 0$$

түріндегі теңдеуді айнымалылары ажыратылатын теңдеу деп атайды.

Бұл теңдеуді шешпес бұрын оның екі жағын да $N_1(y) \cdot M_2(x) \neq 0$ көбейткішіне бөлу арқылы айнымалыларын ажыратуға болады.

$$\frac{M_1(x)N_1(y)dx}{N_1(y)M_2(x)} + \frac{M_2(x)N_2(y)dy}{N_1(y)M_2(x)} = 0$$

немесе

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0$$

Бұл теңдеудің жалпы интегралы мынадай:

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C$$

3- мысал. $x + xy + yy'(1+x) = 0$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі. $y' = \frac{dy}{dx}$ болғандықтан, теңдеуді $x + xy + y(1+x)\frac{dy}{dx} = 0$ түрінде жазамыз немесе $x(1+y)dx + y(1+x)dy = 0$.

Енді айнымалыларды ажыратып, интегралдауға болады.

$$\frac{x(1+y)dx}{(1+x)(1+y)} + \frac{y(1+x)dy}{(1+x)(1+y)} = 0$$

$$\frac{x}{1+x}dx + \frac{y}{1+y}dy = 0.$$

$$\int \frac{x}{1+x}dx + \int \frac{y}{1+y}dy = C \Rightarrow \int \frac{x+1-1}{1+x}dx + \int \frac{y+1-1}{1+y}dy = C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int dx + \int \frac{dx}{1+x} + \int dy - \int \frac{dy}{1+y} = C$$

$$x - \ln|x+1| + y - \ln|1+y| = C,\quad x + y - \ln|(x+1)(y+1)| = C$$

Бұл берілген теңдеудің жалпы интегралы.

13.2. Біртекті дифференциалдық теңдеулер. Егер кез келген α үшін $f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^k f(x,y)$ теңбе-теңдігі орындалса, онда $f(x,y)$ функциясын x және y айнымалылары бойынша k өлшемді біртекті функция деп атайды.

Мысалы, $f(x,y) = x^2 - xy$ екі өлшемді біртекті функция, себебі $f(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x)^2 - (\alpha x)(\alpha y) = \alpha^2(x^2 - xy)$

Ал $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ - бір өлшемді біртекті функция, себебі

$$f(\alpha x, \alpha y) = \sqrt{\alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2} = \sqrt{\alpha^2(x^2 + y^2)} = \alpha\sqrt{x^2 + y^2} = \alpha f(x,y)$$

$f(x,y) = \frac{x^3 - y^3}{2x^2 y}$ функциясы - нөлдік өлшемді біртекті функция, себебі

$$f(\alpha x,\alpha y)=\frac{\alpha^3x^3-\alpha^3y^3}{2\alpha^2x^2\alpha y}=\frac{\alpha^3(x^3-y^3)}{2\alpha^3x^2y}=\frac{x^3-y^3}{2x^2y}=t^0f(x,y)$$

Егер $f(x,y)$ функциясы x және y бойынша нөлдік өлшемді біртекті функция болса, онда

$$y'=f(x,y)$$

бірінші ретті теңдеу біртекті теңдеуге келтіріледі

Біртекті теңдеу мынадай түрге $y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ келтірілуі мүмкін, яғни $f(x,y)$ функциясы айнымалылардың қатынасының функциясы түрінде көрсетіледі.

$y=x\cdot u$ (немесе $x=y\cdot u$) алмастыруының көмегімен біртекті теңдеу айнымалылары ажыратылатын теңдеуге түрленеді, мұндағы $u(x)$ функциясы әзірше белгісіз.

4- мысал. $y'=\frac{x+2y}{x}$ теңдеуін интегралдау керек.

Шешуі. $\frac{x+2y}{x}=1+\frac{2y}{x}$ болғандықтан теңдеу $y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ түрінде берілген. $y=x\cdot u$ алмастыруын енгізейік.

$$y'=u'x+u;\quad u'x+u=1+2u;\quad u'x=1+u;\quad xdu=(1+u)dx$$

$$\frac{du}{1+u}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\ln|1+u|=\ln x+\ln C\Rightarrow\ln|1+u|=\ln Cx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+u=Cx\Rightarrow 1+\frac{y}{x}=Cx\Rightarrow y=(Cx-1)x$$

13.3. Сызықты дифференциалдық теңдеулер. Белгісіз функция y және оның туындысы y' бойынша сызықты болатын теңдеуді бірінші ретті сызықты теңдеу деп атайды. Бұл теңдеу былайша жазылады:

$$y'+P(x)y=Q(x) \tag{2}$$

Мұндағы $P(x)$ және $Q(x)$ - айнымалы x - ке тәуелді үзіліссіз функциялар немесе тұрақтылар

$$y'+P(x)y=0 \tag{3}$$

теңдеуін біртексіз (2) теңдеуге сәйкес сызықты біртекті теңдеу (оң жағы жоқ) деп атайды.

Сызықты теңдеуді шешудің Бернулли әдісін қарастырайық.

(2) теңдеудің шешімін x- ке тәуелді екі функцияның көбейтіндісі түрінде іздейміз, яғни

$$y = u(x)\cdot v(x)$$

Бұл функцияның біреуін еркімізше алып, екіншісін (2) теңдеуден анықтаймыз. $y' = u'v + v'u$ болғандықтан, (2) теңдеудің орнына қойсақ $u'v + uv' + P(x)u\cdot v = Q(x)$ немесе $vu' + u(v' + P(x)v) = Q(x)$.

Ең алдымен

$$v' + P(x)v = 0 \qquad (*)$$

теңдеуінің бір $v = v(x)$ дербес шешімін табамыз. Онда $u = u(x)$ функциясы

$$vu' = Q(x) \qquad (**)$$

теңдеуінің шешуі болады.

Сонымен, берілген теңдеуді шешу айнымалысы ажыратылатын $(*)$ және $(**)$ теңдеулерді шешуге әкеледі.

5- мысал. $xy' - 2y = 2x^4$ теңдеуін интегралдау керек.

Шешуі. Теңдеудің екі жағын x-ке бөліп сызықты біртексіз теңдеу $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$ аламыз. Айталық $y = u\cdot v;\ \ y' = u'v + uv'$ болғандықтан теңдеу түрі мынадай болады.

$$\left.\begin{aligned} &u'v + uv' - \frac{2}{x}uv = 2x^3 \\ &u'v + u\left(v' - \frac{2}{x}v\right) = 2x^3 \end{aligned}\right. \qquad (4)$$

$v' - \frac{2}{x} v = 0$ дейік, немесе $\frac{dv}{dx} = \frac{2}{x} x$, бұдан $\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x}$.

Интегралдап, бір дербес шешуін аламыз. $C = 0$ $\ln|v| = 2\ln|x|$ және $v = x^2$. $v = x^2$ болғанда (4) теңдеу $u'x^2 = 2x^3$ түрінде немесе $\frac{du}{dx} = 2x$ келеді. Бұл айнымалысы ажыратылатын теңдеуді шешсек. $u = x^2 + C$ аламыз. Сонымен

$$y = u \cdot v = (x^2 + C)x^2 = x^4 + Cx^2.$$

Он төртінші лекция

КӨП АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯ

Алдыңғы лекцияларда біз бір айнымалыдан тәуелді функцияны қарастырған болатынбыз. Бірақ көптеген құбылыстар, оның ішінде экономикалық құбылыстар да, бірнеше айнымалылардың өзара байланысы арқылы сипатталады. Осы байланыстарды сипаттап зерттеу көп айнымалы функция ұғымын енгізуді қажет етеді.

14.1. Негізгі ұғымдар.

1-анықтама. Қандай да бір X жиынының $x_1, x_2, \dots, x_n$ элементтеріне нақтылы бір z айнымалысының мәні сәйкес келетін болса, онда n айнымалыдан тәуелді функция берілген деп аталады да, былайша белгіленеді.

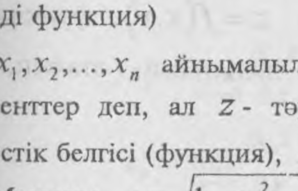
$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Мысалы, тік төртбұрыш ауданы z оның қабырғалары x пен y - тің өзгерісіне тәуелді функция (екі айнымалыдан тәуелді функция) $z = x \cdot y$.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ айнымалылары тәуелсіз айнымалылар немесе аргументтер деп, ал z - тәуелді айнымалы деп аталады. f - сәйкестік белгісі (функция), X - функцияның анықталу облысы.

Мысалы, $z = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ функциясының анықталу облысы мынадай: $1 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0$ немесе $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$, яғни центрі координат басында болатын, радиусы бірге тең дөңгелек.

Біз екі айнымалыдан тәуелді $z = f(x, y)$ функциясын қарастырумен шектелеміз. Бұл функцияның анықталу облысы X xOy - координат жазықтығының ішкі жиыны болады.



1-сурет.

$M_0(x_0, y_0) \in X$ нүктесінің маңайы деп M_0 нүктесі жатқан дөңгелекті айтамыз (1 - сурет)

$z = f(x, y)$ функциясының графигі үш өлшемді кеңістіктегі (x, y, z) нүктелерінің жиынтығы болады, мұндағы z - апликатасы x - абсциссасы мен y - ординатасынан $z = f(x, y)$ функциялық тәуелділікте.

14.2. Шек және үзіліссіздік. Бір айнымалыдан тәуелді функция үшін анықталған көптеген математикалық ұғымдарды екі айнымалыдан тәуелді функияға кеңейтіп қолдануға болады.

Өзінің анықталу облысы X - та берілген $z = f(x,y)$ функциясын қарастырайық.

2-анықтама. Егер кез келген $\varepsilon > 0$ санына сәйкес $\delta > 0$ саны табылып, $|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta$ шарттарын қанағаттандыратын барлық (x,y) парлары үшін $|f(x,y) - A| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда A санын $z = f(x,y)$ функциясының $x \to x_0$, $y \to y_0$ жағдайдағы шегі деп аталып, былай белгіленеді: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$

3-анықтама. Егер $z = f(x, y)$ функциясы

1) (x_0, y_0) нүктесінде анықталса;

2) $x \to x_0$ және $y \to y_0$ жағдайда ақырлы шегі болса;

3) бұл шек функцияның (x_0, y_0) нүктесіндегі мәніне тең болса, яғни $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$, онда $f(x, y)$ функциясы (x_0, y_0) нүктесінде үзіліссіз деп аталады.

14.3. Дербес туындылар және толық дифференциал. x аргументке Δx, y-ке Δy өсімше берейік. Сонда z функциясының мәні $f(x+\Delta x, y+\Delta y)$ түріне өзгереді. $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ шамасы функцияның (x,y) нүктесіндегі толық өсімшесі деп аталады. Егер тек x - аргументіне немесе y- аргументіне ғана өсімше берсек, онда функцияның $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ немесе $\Delta_y z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ шамалары $f(x,y)$ функциясының дербес өсімшелері деп аталады.

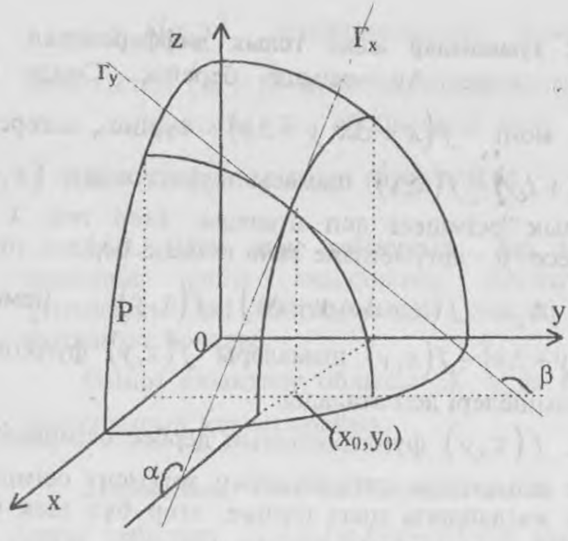
4-анықтама. $f(x,y)$ функциясының дербес өсімшесінің сәйкес аргумент өсімшесіне қатынасының аргумент өсімшесі нөлге ұмтылған жағдайдағы шегі (әрине, егер бұл шек бар болса) $f(x,y)$ функциясының дербес туындысы деп аталады да былайша белгіленеді:

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Кейде дербес туындыны $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ деп, немесе $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ деп те белгілей береді.

Дербес туындылардың геометриялық мағынасын 2 - суреттен көруге болады.



2-сурет.

$z = f(x, y)$ функциясының графигі P бет болсын. Онда $y = y_0$ болған да біз осы жазықтықтың P бетпен қиылысу сызығы - Γ_x аламыз. Бұл жағдайда z'_x туындысы Γ_x - сызығына (x_0, y_0) нүктеде жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициентін береді, яғни $z'_x = \cos\alpha$. Осы жолмен $z'_y = \cos\beta$ болатынын алуға болады.

Дербес туындылардың анықтамасынан z'_x дербес туындыны табу үшін y айнымалыны тұрақты шама деп, ал z'_y -ті табу үшін x -ті тұрақты шама деп алу керек. Және де бұл жерде функцияны дифференциалдаудың барлық ережелері сақталады.

<u>Мысал.</u> $z = x\ln + \dfrac{y}{x}$ функциясының дербес туындыларын табу керек.

Шешуі. x бойынша туындысын табу үшін y-ті тұрақты шама деп аламыз. Сонда $z'_x = \ln y + y\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \ln y - \dfrac{y}{x^2}$ y бойынша туындысын тапқанда x-ті тұрақты шама деп аламыз. Сонда $z'_y = x(\ln y)' + \dfrac{1}{x}\cdot y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{x}$

5-анықтама. $z = f(x,y)$ функциясының дифференциалы деп осы функцияның дербес туындыларының сәйкес аргумент өсімшелеріне көбейтіндісінің қосындысын айтамыз, яғни

$$dz = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y \qquad (*)$$

$f(x,y) = x$, $g(x,y) = y$ функциялары үшін $(*)$ бойынша $df = dx = \Delta x;$ $dg = dy = \Delta y$ екенін ескерсек $(*)$ формуласын былайша жазуға болады:

$$dz = z'_x dx + z'_y dy \text{ немесе } dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad (1)$$

Кейде (1) формуланы $z = f(x,y)$ функциясының *толық дифференциалы* деп те атайды.

6-анықтама. Егер $z = f(x,y)$ функциясының толық өсімшесін мынадай түрде жазуға болатын болса $\Delta z = dz + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$ онда $z = f(x,y)$ функциясы (x,y) нүктесінде дифференциалданады деп аталады.

Мұндағы dz - функция дифференциалы, $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y)$, $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y)$ $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ жағдайда ақырсыз аз шамалар.

Көп айнымалы функцияның дербес туындыларының бар болуы функцияның дифференциалдануының тек қажетті шарты болады.

Ал келесі теорема екі айнымалы функцияның дифференциалдануының жеткілікті шартын көрсетеді.

Теорема. Егер функцияның дербес $z'_x(x,y)$, $z'_y(x,y)$ туындылары (x,y) нүктесінің маңайында бар болып, (x,y) нүктесінің өзінде үзіліссіз болса, онда $z = f(x,y)$ функциясы осы нүктеде дифференциалданады және ол (1) формуламен өрнектеледі.

Δx пен Δy өсімшелері аз болғанда функция өсімшесін

$$\Delta f(x,y) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

оны дифференциалмен ауыстыруға болады:

$$df(x,y) = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y$$

Осыдан жуық теңдік шығады.

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \approx f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y$$

Δx пен Δy - тің мәндері неғұрлым аз болса, бұл жуық теңдік соғұрлым дәлірек болады.

Мысал келтірейік. Қырлары $x = 6$ м және $y = 8$ м болатын тік төртбұрыш берілсін. Егер x 5 см -ге ұзарып, y 10 см - ге қысқарса тік төртбұрыш диагоналы қаншаға өзгереді.

Шешуі. Тік төртбұрыш диагоналын z деп белгілейік, сонда $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Осыдан Δz өсімшесін dz дифференциалымен алмастырып, жуықтап мынаны табамыз:

$$\Delta z \approx dz = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\Delta x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\Delta y = \frac{x\Delta x + y\Delta y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Осы формулада $x = 6$ м, $\Delta x = 0.05$ м, $y = 8$ м, $\Delta y = -0.1$ м деп алып Δu есептейміз.

$$\Delta u \approx \frac{6 \cdot 0,5 + 8(-0.1)}{\sqrt{36+64}} = -0,05 \text{ м}$$

Сонымен, диагоналды жуықтап есептегенде 5 см - ге азаяды екен.

14.4. Жоғары ретті дербес туынды және дифференциал. Екі айнымалыдан тәуелді $z = f(x,y)$ функциясы бар болсын.

Оның $f'_x(x,y)$ және $f'_y(x,y)$ дербес туындылары x пен y-тен тәуелді функциялар. Кейбір жағдайларда бұл функциялардың да дербес туындылары бар болады. Оларды екінші ретті дербес туынды дейміз:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f''_{xx}(x,y); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f''_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f''_{yx}(x,y); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f''_{yy}(x,y)$$

Осылайша үшінші ретті және одан да жоғары ретті дербес туындыларды алуға болады.

Егер екінші ретті дербес туындылар үзіліссіз болса, онда $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$ болатынын дәлелдеуге болады.

Екінші ретті толық дифференциалды былайша жазып көрсетуге болады:

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

Мысал. $z=x^y(x>0)$ функциясының екінші ретті дербес туындылары мен толық дифференциалын табу керек.

Шешуі. $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$; $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y(y-1)x^{y-2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=yx^{y-1}\ln x+x^{y-1}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial^2}=x^y(\ln x)^2$$

Көріп отырғанымыздай $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

Енді толық дифференциалын жазайық:

$$d_x^2z=y(y-1)x^{y-2}dx^2+2\left(x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x\right)dxdy+x^y(\ln x)^2dy^2.$$

Шешуі. 1^0. Дербес туындыларын табамыз

$$z'_x = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, \quad z'_y = \frac{2(1-y^2)}{(1+y^2)^2}.$$

2^0. Сынақ нүктелерін табу үшін жүйе шешеміз.

$$\begin{cases} \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = 0 \\ \dfrac{2(1-y^2)}{(1+y^2)^2} = 0 \end{cases}$$

Бұл жүйенің $(1;1)$, $(1;-1)$, $(-1;1)$, $(-1;-1)$ төрт шешімі бар.

3^0. Екінші ретті дербес туындыларын табамыз:

$$z''_{xx} = -\frac{8x}{(1+x^2)^2}; \quad z''_{xy} = z''_{yx} = 0; z''_{yy} = -\frac{8y}{(1+y^2)^2}.$$

Бұлардың сынақ нүктелерінің әрқайсысындағы мәнін есептеп, жеткілікті шарттың орындалуын тексереміз.

Мысалы, $(1;1)$ нүктеде: $A = z''(1;1) = -2$; $B = 0$; $C = -2$
$\Delta = AC - B^2 = (-2)^2 - 0 = 4 > 0$ және $A = -2 < 0$ болғандықтан $(1;1)$ нүкте максимум нүктесі.

Осылайша зерттеп $(-1;-1)$ - минимум нүктесі екенін, ал $(1;-1)$ және $(-1;1)$ нүктелерінде экстремум жоқ (себебі, $\Delta = AC - B^2 < 0$) екенін анықтаймыз.

4^0. Функция экстремумын есептейміз:

$$z_{\max} = z(1;1) = 2, \qquad z_{\min} = z(-1;1) = 2.$$

15.2.Функцияның ең үлкен және ең кіші мәндерін табу. Қандай да бір тұйық жиында үзіліссіз функция өзінің ең үлкен және ең кіші мәндерін функцияның не экстремум нүктелерінде, не жиын шекарасында қабылдауы мүмкін.

Мысал қарастырайық. $z=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}$ функциясының радиусы 1-ге тең, центрі координат басында болатын шеңбер бойындағы ең үлкен және ең кіші мәндерін табу керек.

Шешуі.

1. Дербес туындыларын табамыз

$$z_x'=-\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2};\qquad z_y'=-\frac{2y}{\left(1+y^2\right)^2}.$$

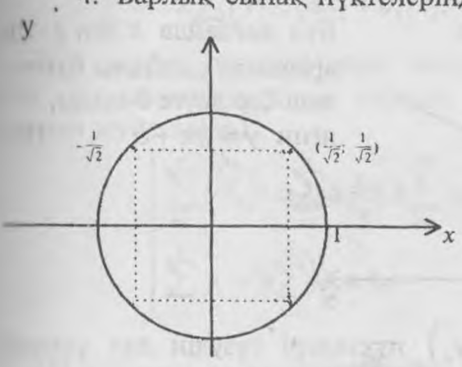
2. $z_x'=0,\quad z_y'=0$ жүйеден сынақ нүктелерін табамыз. Олар $x=0, y=0$, яғни бір сынақ нүктесі (0;0) бар.

3. $x^2+y^2=1$ теңдеуімен берілген облыс шекарасында сынақ нүктелерді іздейміз. $y^2=1-x^2$ өрнегін $z=z(x,y)$ функциясына қойып бір айнымалы функция аламыз:

$$z=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2-x^2}=\frac{3}{2+x^2-x^4},\qquad x\in[-1;1]$$

Туындысын $z'=\frac{2x\left(2x^2-1\right)}{\left(2+x^2-x^4\right)^2}$ тауып, нольге теңестіріп сынақ нүктелерін табамыз $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

4. Барлық сынақ нүктелеріндегі функция мәнін табамыз:



$$z(0;0)=2,$$

$$z\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{4}{3},$$

$z(-1)=z(1)=\frac{3}{2}$. Осылардың арасынан ең үлкені мен ең кішісін таңдап аламыз. Сонымен,

$$z_{\text{ең үлкен}} = z(0{,}0) = 2 \text{ және } z_{\text{ең кіші}} = z\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= z\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{4}{3}.$$

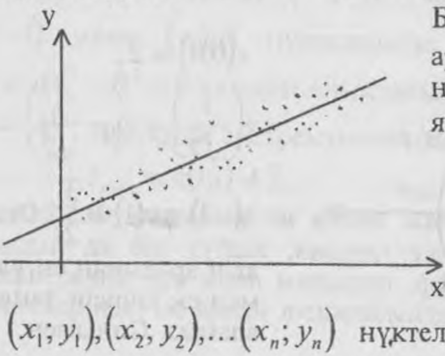
15.3.Ең аз квадраттар әдісі. Әр түрлі зерттеулерде эксперимент нәтижесінде пайда болған формулаларды қолданады. Осындай формулаларды алудың ең бір жақсы тәсілі ең аз квадраттар әдісі.

Айталық эксперимент нәтижесінде пайда болған мәндеріне қарай x және y айнымалы шамалардың арасындағы тәуелділікті анықтау керек болсын. Алынған мәндерді таблицаға жазайық.

x	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_i	...	y_n

Осы эксперименттік нүктелердің координат жазықтығындағы орналасу жағдайына қарай $y = f(x)$ функциясының түрін анықтаймыз.

Мысалы, осы нүктелер координат жүйесінде суреттегідей орналассын делік.



Бұл жағдайда x пен y-тің арасында сызықты байланыс бар деуге болады, яғни $y = ax + b$ (1)

$(x_1; y_1), (x_2; y_2), \ldots (x_n; y_n)$ нүктелері түзудің дәл үстінде емес, оған жақын орналасқандықтан (1) формула бұл тәуелділікті жуықтап білдіреді. Сондықтан нүктелердің мәнін $y-(ax+b)$ өрнегіне қойып мынадай теңдіктер аламыз:

$$y_1-(ax_1+b)=\delta_1,\ y_2-(ax_2+b)=\delta_2,\ldots,y_n-(ax_n+b)=\delta_n,$$

мұндағы $\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n$ - ауытқуды көрсететін сандар.

Мынадай міндет қоямыз: a мен b коэффициенттерін осы ауытқу сандары абсолют шамасы бойынша неғұрлым аз болатындай етіп таңдап алу керек.

Бұл міндетті шешу үшін ең кіші квадраттар әдісін пайдаланамыз. Ауытқу сандарының квадраттарының қосындысын қарастырайық

$$S(a,b)=\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-(ax_i+b)\right]^2=\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2$$

Мұндағы x_i және y_i - берілген сандар. Ал a және b - белгісіз сандарды $S(a,b)$ минимум қабылдау керек деген шарттан табу керек, яғни $S(a,b)$ -ны a және b екі айнымалыдан тәуелді функция деп қарастырып, экстремумға зерттейміз.

Сонымен, есеп $S(a,b)$ функциясы минимум мәнін қабылдайтындай a және b белгісіздерді табуға келтірілді.

$$\frac{\partial S}{\partial a}=-2\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-(ax_i+b)\right]x_i,\ \frac{\partial S}{\partial b}=-2\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-(ax_i+b)\right]$$

Бұл дербес туындыларды нольге теңестіре отырып a және b белгісіздерінен тәуелді екі сызықты теңдеуден тұратын жүйе аламыз.

$$\left[\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{n}yx_i=a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i,\\ \sum_{i=1}^{n}y_i=a\sum_{i=1}^{n}x_i+bn.\end{array}\right. \qquad (2)$$

(2) жүйе ең аз квадраттар әдісінің нормалды жүйесі деп аталады. Осы жүйеден a және b белгісіздерін тауып (1) теңдеуге қоямыз, сонда біздің ізделінді теңдеуімізді аламыз.

$S(a,b)$ функциясының табылған $M(a,b)$ нүктесінде минимум мәнін қабылдайтынын екінші ретті дербес туынды көмегімен тексеруге болады.

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = 2n.$$

Сонда

$$\Delta = \frac{\partial^2 S}{\partial a^2}\frac{\partial^2 S}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b}\right)^2 = 4n\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - \left(2\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2.$$

Бұл өрнекті басқаша жазуға болады $\Delta = 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_i\right)^2$, бұдан $\Delta > 0$ екенідігі шығады. $\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} > 0$ болғандықтан $M(a,b)$ нүктесінде $S(a,b)$ функциясы минимум мәнін қабылдайды.

Он алтыншы лекция

САНДЫҚ ҚАТАРЛАР

16.1.Сандық қатар анықтамасы және оның жинақтылығы. $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ақырсыз сандық тізбегі берілсін.

1-анықтама.

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

өрнегі (символы) ақырсыз сандық (немесе жәй ғана) қатар деп аталады, ал $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ сандары қатардың мүшелері, мұндағы a_n - қатардың жалпы (энінші) мүшесі деп аталады.

Кейде қатарды бергенде оның мүшелерінің реттік санын бірден бастамай, нөлден бастаған немесе тіпті басқа бір бірден үлкен натурал саннан бастаған ыңғайлы болады.

Мына қосындыларды жазып алайық:

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \ldots, S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ldots \qquad (2)$$

Бұл қосындылар (1) қатардың дербес қосындылары деп аталады. Сандық қатар жинақталатыны туралы мәселе құрастырғанда біз ол мәселені қатардың дербес қосындылары тізбегінің ақырлы шегі бар болуы мәселесімен салыстырамыз.

2-анықтама. Егер (1) қатардың $n \to \infty$ да S_n дербес қосындысының ақырлы шегі S бар болса, онда (1) қатар жинақталатын қатар деп аталып, былай жазылады:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n \Leftrightarrow S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (3)$$

S саны (1) қатардың қосындысы деп аталады.

Егер $n \to \infty$ да S_n - нің ақырлы шегі болмаса, онда (1) қатар жинақсыз қатар деп аталады.

Мысалы. Ақырсыз геометриялық прогрессия мүшелері қосындысынан тұратын

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots \qquad (4)$$

сандық қатар қарастырайық. Егер $q \neq 1$ болса, онда (4) қатардың n - ші дербес қосындысы мынаған тең:

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}$$

Егер $|q| < 1$ болса, онда $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q}$$

Демек, (4) қатар жинақталады және оның қосындысы $S = \dfrac{a}{1-q}$.

Ал егер $|q| \geq 1$ болса, онда $n \to \infty$ да S_n - нің шегі a - ның таңбасына байланысты $+\infty$ немесе $-\infty$- ке тең, немесе тіпті болмайды. Демек, $|q| \geq 1$ болғанда (4) қатар жинақталмайды.

Жеке жағдайда, $a = 1, q = -1$ болса, онда $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ қатары шығады. Бұл қатардың дербес қосындыларының шегі болмайтыны себепті қатар жинақталмайды

Сонымен, геометриялық прогрессия $|q| < 1$ болғанда $S = \dfrac{a}{1-q}$ қосындыға жинақталып, $|q| \geq 1$ болғанда жинақталмайды.

1 - теорема (қатар жинақталуының қажетті шарты).

Егер (1) қатары жинақталатын болса, онда $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Дәлелдеуі. (1) қатар жинақталатын қатар дейік. Сонда $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$ олай болса,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(S_n - S_{n-1}\right) = S - S = 0$$

Бұл теоремадан шығатын қорытынды мынадай: егер қатардың жалпы мүшесі $n \to \infty$ нөлге ұмтылмаса, онда ол жинақталмайтын қатар болады. Дәлелденген теорема қатар жинақталатынының тек қажетті шартын ғана береді. $n \to \infty$ қатардың жалпы мүшесінің нөлге ұмтылуы оның жинақталатынының жеткілікті шарты болмайды.

<u>Мысалы.</u> Гармоникалық қатар деп аталатын мынадай

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \qquad (5)$$

қатарды қарастырайық.

$a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ болғандықтан қатардың жинақталуының қажетті шарты орындалған.

Осы қатардың жинақталмайтын қатар екенін дәлелдейік. Шынында да, егер бұл қатар жинақталмайтын қатар болса, оның қосындысын S деп белгілеп, мынаны алған болар едік:

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=\lim_{n\to\infty}S_{2n}-\lim_{n\to\infty}S_n=S-S=0$$

Бірақ,

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}=n\frac{1}{2n}=\frac{1}{2},$$

яғни $S_{2n}-S_n>\frac{1}{2}$. Осыдан $\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=0$ теңдіктің орындалуы мүмкін еместігі шығады, яғни гармоникалық қатар жинақталмайды.

Солай бола тұрса да дәлелденген тұжырым сандық қатардың негізгі, аса маңызды қасиеттерінің бірі болып табылады.

16.2. Жинақталатын қатарлар қасиеттері.

3 - **анықтама**. (1) қатардың бірінші m мүшесін шығарып тастап, қалған мүшелерінен құрылған

$$a_{m+1}+a_{m+2}+\ldots+a_{m+k}+\ldots=\sum_{n=m+1}^{\infty}a_n \qquad (6)$$

қатарды, сол қатардың қалдық қатары немесе қалдығы деп атайды.

2 - теорема. Егер $\sum\limits_{n-1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ жинақталатын қатарлар болса, онда кез келген тұрақты α және β сандары үшін $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\alpha a_n \pm \beta b_n\right)$ қатары да жинақталатын қатар болып, мына теңдік орындалады:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha a_n \pm \beta b_n\right)=\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{7}$$

Дәлелдеуі. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k, C_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ қосындылары сәйкес $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ жинақталатын қатарларының бөлік қосындылары дейік.

$\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\alpha a_k \pm \beta b_k\right) = \alpha \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \pm \beta \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ арқылы (7) қатардың бөлік қосындысын белгілейік. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ мен $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ қатарлары жинақталатын болғандықтан, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ және $\lim\limits_{n\to\infty} C_n$ шектері бар болады. Демек, $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} C_n \pm \beta \lim\limits_{n\to\infty} C_n$ шегі бар болады.

Олай болса (7) теңдік орындалады. Сөйтіп, дәлелденген теорема жинақталатын ақырсыз қатарлар үшін ортақ көбейткішті қатар алдына шығару мүмкіндігі мен оларды мүшелеп қосу мүмкіндігін көрсетеді.

Келесі теореманы дәлелдеусіз қабылдаймыз.

3 - теорема. Егер (1) қатар жинақталатын болса, онда оның кез келген (6) қалдығы да, жинақталады. Керісінше, егер (1) қатардың (6) қалдық қатары жинақталатын болса, онда (1) қатардың өзі де жинақталатын қатар болады. Мұнда, егер

$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, S_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_m$ болса, онда $r_m = a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots; S = S_m + r_m$.

16.3. Сандық қатарлардың жинақталуының жеткілікті белгілері.

1^0. Қатарларды салыстыру белгісі.

Егер $a_n \geq 0, b_n \geq 0. (n = 1,2,\ldots)$ болып, кез келген n_0 үшін барлық $n > n_0$ номерлерінен бастап $a_n \leq b_n$ теңсіздігі орындалса, онда

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad (8)$$

қатарының жинақталатындығынан

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (8')$$

қатарының жинақталатындығы шығады да, (8') қатардың жинақталмайтындығынан (8) қатардың жинақталмайтындығы шығады.

Мысал қарастырайық.

1. $1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 3^2} + \ldots + \frac{1}{n \cdot 3^{n-1}} + \ldots$ қатардың жинақтылыққа зерттейік.

Шешуі. Берілген қатарды жинақталатын геометриялық қатармен $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^{n-1}} + \ldots \left(q = \frac{1}{3} < 1 \right)$ салыстырамыз. Берілген қатардың әр қосылғышы, екінші мүшесінен бастап, геометриялық қатардың сәйкес мүшелерінен кіші $\left(\frac{1}{2 \cdot 3} < \frac{1}{3}, \frac{1}{3 \cdot 3^2} < \frac{1}{3^2} \right.$ және жалпы түрде $\left. \frac{1}{n \cdot 3^{n-1}} < \frac{1}{3^{n-1}} \right)$ болғандықтан, салыстыру белгісі бойынша берілген қатар жинақталады.

2. $\frac{1}{\sqrt{2\cdot 1}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}+\ldots$ қатарын жинақтылыққа зерттейік.

Шешуі. Бұл қатарды $1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ жинақсыз болатын гармоникалық қатармен салыстырайық.

$\frac{1}{\sqrt{2\cdot 1}}>\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{3\cdot 2}}>\frac{1}{3}$, және жалпы түрде $\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}>\frac{1}{n}$.

(Себебі, $\sqrt{2\cdot 1}<2=\sqrt{2^2},\sqrt{3\cdot 2}<3=\sqrt{3^2},\ldots,\sqrt{n(n-1)}<n=\sqrt{n^2}$) мүшелері гармоникалық қатардың мүшелерінен үлкен болғандықтан, салыстыру белгісі бойынша, берілген қатар жинақталмайды.

2^0. **Даламбер белгісі**. Мүшелері оң сандар болатын

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \left(a_n > 0, n = 1,2\right) \quad (9)$$

қатары үшін $(n+1)$-ші мүшесінің n-ші мүшесінe қатынасының шегі $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$ бар болсын. Сонда $l<1$ болса (9) қатар жинақталады, ал $l>1$ болса ол жинақталмайды. Ал $l=1$ болғанда бұл белгі қатардың жинақталуы жөніндегі сұраққа жауап бере алмайды.

Мысал. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$ қатарын жинақтылыққа зерттейік.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+3)!}:\frac{1}{(2n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!}=$$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+3)(2n+2)}=0<1$ болғандықтан, Даламбер белгісі бойынша қатар жинақталады.

3^0. **Кошидің интегралдық белгісі**. Мүшелері теріс емес сандар болатын, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \left(a_n \geq 0\right)$ (10) қатарын қарастырайық. $x \geq 1$ теңсіздігін қанағаттандыратын x-тер үшін анықталған $f(x)$ функциясы теріс емес және кемиді дейік. Бұған қоса, $a_1 = f(1), a_2 = f(2), \ldots, a_n = f(n), \ldots$ болсын. Сонда, егер $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ меншіксіз интегралы жинақталатын болса, онда (10) қатар да жинақталады және керісінше; егер (10) қатар жинақталатын болса, онда меншіксіз интеграл да жинақталады.

Мысал. Жалпыланған гармоникалық қатарды қарастырайық:

$$1 + \frac{1}{2^\gamma} + \frac{1}{3^\gamma} + \ldots + \frac{1}{n^\gamma} + \ldots$$

Мұндағы $a_n = f(n) = \frac{1}{n^\gamma} (n = 1,2,\ldots)$. Сондықтан $f(x) = \frac{1}{x^\gamma}, x > 1$ деп аламыз. Егер $\gamma = 1$, онда

$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^\gamma} = \lim\limits_{b \to \infty} \left(\ln|x| \Big|_1^b \right) = \lim\limits_{b \to \infty} (\ln|b| - \ln 1) = \infty$. Егер $\gamma \neq 1$, онда

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^\gamma} = \lim\limits_{b \to \infty} \left(\frac{x^{-\gamma+1}}{-\gamma+1} \Big|_1^b \right) = \frac{1}{1-\gamma} \lim\limits_{b \to \infty} \left(b^{1-\gamma} - 1\right) = \begin{cases} 1/_{\gamma-1}, \gamma > 1 \\ \infty, \quad \gamma < 1 \end{cases}$$

Сонымен, $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^\gamma}$ интегралы $\gamma > 1$ болғанда жинақталатын, ал $\gamma \leq 1$ болғанда жинақталмайтын интеграл болғандықтан, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \left(a_n \geq 0, n = 1,2,\ldots\right)$ қатары да интегралдық белгі бойынша $\gamma > 1$ болғанда жинақталады да $\gamma \leq 1$ болғанда жинақталмайды.

Он жетінші лекция

ӨЗГЕРМЕЛІ ТАҢБАЛЫ ҚАТАРЛАР

17.1. Біз өткен лекцияда мүшелері теріс емес сандар болатын қатарлардың жинақталатындығының белгілерін қарастырдық. Енді мүшелері теріс таңбалы да, оң таңбалы да сандар болып келетін сан қатарларының жинақталуы туралы мәселені қарастырайық. Мұндай қатарлар өзгермелі таңбалы қатарлар деп аталады. Іс жүзінде қолдануда, мүшелері кезек оң және теріс сандар болып келетін өзгермелі таңбалы қатарлардың дербес түрі - ауыспалы таңбалы қатар деп аталатын қатардың маңызы зор.

1-анықтама. $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots \qquad (1)$$

қатары (мұндағы $a_n > 0, n = 1,2,\ldots$) ауыспалы таңбалы қатар деп аталады.

Таңбалары ауыспалы қатардың жинақталуы туралы мәселе мына теорема көмегімен шешіледі.

1-теорема (Лейбниц теоремасы). Егер ауыспалы таңбалы (1) қатардың мүшелері бірсарынды кемитін:

$$a_n \geq a_{n+1} \qquad (n = 1,2,\ldots) \qquad (2)$$

және жалпы мүшесі нөлге ұмтылатын: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (3) болса, онда (1) қатар жинақталады және оның мүшелерінің қосындысы қатардың бірінші мүшесі a_1-ден артпайды.

Дәлелдеу. (1) қатардың жұп ретті S_{2m} дербес қосындысын мына түрде жазуға болады

$S_{2m} = \left(a_1 - a_2\right) + \left(a_3 - a_4\right) + \ldots + \left(a_{2m-1} - a_{2m}\right)$. Сондықтан S_{2m} - де теріс емес сан бола тұра, m өскенде кемімейді. Ал енді S_{2m} - ді былай жазсақ:

$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}$ онда S_{2m} жоғарыдан a_1 санымен шенелген болады. Сөйтіп, $0 \le S_{2m} \le a_1$. Бұдан бірсарынды кемімейтін $\{S_{2m}\}$ тізбегі жоғарыдан шенелген, сондықтан $m \to \infty$ оның ақырлы шегі бар деген қорытынды шығады, яғни

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S$$

Егер де (1) қатардың тақ ретті дөңес қосындысы S_{2m+1}-ді қарастырсақ, онда $S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$.

(3) теңдік негізінде $\lim\limits_{m\to\infty} a_{2m+1} = 0$. Сондықтан $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m+1} = S$

Демек, S (1) -қатардың қосындысы деген сөз. Сөйтіп $0 \le S \le a_1$.

Мысал. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{1}{2n-1}$ қатарды жинақтылыққа зертте. Бұл қатар мүшелері 1-теореманың (2) және (3) шарттарын қанағаттандырады: $1 > \frac{1}{3} > \frac{1}{5} > \ldots, \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$.

Сондықтан Лейбниц белгісі бойынша қатар жинақталады.

Енді өзгермелі таңбалы қатарды қарастырайық (кез келген мүшесі оң да теріс те бола алады):

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (*)$$

Теорема. Егер (*) қатар мүшелерінің абсолют шамаларынан құралған

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots \qquad (**)$$

қатар жинақталатын болса, онда (*) қатар жинақталады.

Дәлелдеу. (*) қатардың оң таңбалы мүшелерінің қосындысын S_n^+ деп, теріс таңбалы мүшелерінің қосындысын S_n^- деп белгілейік.

Сонда (*) қатардың дербес қосындысы $S_{n_1} = S_n^{+} - S_n^{-}$ түрінде, ал (**) қатардың дербес қосындысы $S_{n_2} = S_n^{+} + S_n^{-}$ түрінде болады. Теорема шарты бойынша (**) қатар жинақталады, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n_2} = S$ ақырлы шегі бар.

S_n^{+} және S_n^{-} тізбектері өспелі (себебі, n өскен сайын S_n^{+} және S_n^{-} де өседі) және шектеулі $\left(S_n^{+} \le S,\ S_n^{-} \le S\right)$, яғни $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{+}$ және $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{-}$ шектері бар болады. Онда дербес қосындыларының шегі $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n_1} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n^{+} - \lim\limits_{n\to\infty} S_n^{-}$, немесе (*) қатар жинақталады.

Бұл теореманың керісінше тұжырымы дұрыс бола бермейді. Яғни (**) қатар жинақталмайтын болғанда, (*) қатар жинақталуы мүмкін. Мысалы, $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots$ қатары Лейбниц белгісі бойынша жинақталады, ал абсолют шамаларынан құралған $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ қатар (гармоникалық қатар) жинақталмайды.

Сондықтан мынадай анықтама енгізейік.

Анықтама. Егер (*) қатар мүшелерінің абсолют шамаларынан құралған (**) қатары жинақталатын болса, онда (*) қатар абсолютті жинақталатын қатар деп, ал егер (*) қатар жинақталып, (**) қатар жинақталмаса, онда (*) қатарды шартты жинақталатын қатар деп атайды.

17.2. Дәрежелік қатарлар.

1. Дәрежелік қатардың жинақталу радиусы.

1-анықтама. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \quad (4)$

функционалдық қатары дәрежелік қатар деп аталады. Мұндағы $a_n\ (n = 0,1,2,\ldots)$ белгілі нақты сандар, ал x-нақты айнымалы шама. $a_n\ (n = 0,1,2,\ldots)$ сандары дәрежелік қатардың коэффициенттері деп аталады.

Дәрежелік қатардың бөлік қосындылары көпмүшеліктер болғандықтан, олар функциялардың жуық мәндерін табуда аса бір ыңғайлы құрал болып табылады. Функцияларды жіктеудің талдау аппаратын (құралын) зерттеумен айналысамыз. Ол үшін, ең біріңші, дәрежелік қатардың жинақталу облысын табу мәселесімен айналысамыз, яғни дәрежелік қатар жинақталатын x мәндерінің жиыны X- ті табумен айналысамыз.

2 - теорема (Абель теоремасы). Егер дәрежелік қатар x-тің $x = x_0 \neq 0$ мәнінде жинақталатын қатар болса, онда ол $|x| < |x_0|$ теңсіздігін қанағаттандыратын x-тің барлық мәндерінде абсолютті жинақталады.

Дәлелдеуі. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ қатары жинақталады делік. Сонда қатар жинақталуының қажетті шарты бойынша $n \to \infty$ да бұл қатардың жалпы мүшесі $a_n x_0^n$ нөлге ұмтылады. Сондықтан $\{a_n x_0^n\}$ тізбегі шенелген тізбек, яғни $M > O$ саны табылып, $|a_n x_0^n| < M\ (n = 1,2,\ldots)$ теңсіздіктері орындалады. Енді $|x| < |x_0|$ теңсіздігін қанағаттандыратын

$$\left|a_n x_0^n\right| = \left|a_n \cdot x_0^n\right| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

теңсіздіктері орындалады. Бұл теңсіздіктер негізінде,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|a_n x_0^n\right| = |a_0| + |a_1 x| + \ldots + \left|a_n x_0^n\right| + \ldots$$

қатар мүшелері еселігі $q = \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$ болатын $M + Mq + Mq^2 + \ldots + Mq^n + \ldots$ және жинақталатын геометриялық прогрессияның сәйкес мүшелерінен кіші, сондықтан қатар жинақталады. Демек, (4) қатар $|x| < |x_0|$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x мәндерінде абсолютті жинақталады. Сонымен теорема дәлелденді.

3-теорема. Егер дәрежелік қатар $x = \bar{x}$ мәнінде жинақталмайтын болса, онда ол x - тің $|x| > |\bar{x}|$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық мәндерінде де жинақталмайды.

Дәлелдеуі. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{x}^n = a_0 + a_1 \bar{x} + a_2 \bar{x}^2 + \ldots + a_n \bar{x}^n + \ldots$ қатар жинақталмайды делік. Онда (4) қатар да жинақталмайды. Себебі, егер (4) қатар жинақталатын қатар болса, онда 2-теорема бойынша соңғы қатар да жинақталар еді. Алайда бұл 3-теорема шартына қайшы келеді. Сонымен 3 - теорема дәлелденді.

2-анықтама. Егер дәрежелік қатар $|x| < R$ болғанда жинақталатын қатар, ал $|x| > R$ болғанда жинақталмайтын қатар болса, онда $R(0 < R < +\infty)$ саны дәрежелік қатардың жинақталу радиусы деп аталады. Егер дәрежелік қатар тек қана $x = 0$ болғанда ғана жинақталса, онда оның жинақталу радиусы R нөлге тең деп алынады.

Сонымен мына тұжырым орындалады.

Егер дәрежелік қатар x-тің барлық мәндерінде жинақталатын қатар болмаса, онда ол қатар үшін оң $R(0 < R < +\infty)$ саны табылып, қатар x- тің барлық $|x| < R$ мәндерінде абсолют жинақталады, ал $|x| > R$ мәндерінде жинақталмайды. R саны қатардың *жинақталу радиусы* деп аталады.

Сонымен, (4) қатардың жинақталу облысы $(-R, R)$ интервалы болып табылады, интервал ұштарында қатардың жинақталу немесе жинақталмауы туралы мәселе $x = -R$ және $x = +R$ мәндерін қатарға қойғанда шығатын сәйкес сандық қатарларды зерттеу арқылы шешіледі, егер бұл сан қатарлары жинақталатын қатарлар болса, онда олардың жинақталуы абсолютті де немесе абсолютсіз де болуы мүмкін.

Мысалдар. 1. Ақырсыз геометриялық прогрессия мүшелерінің қосындысынан формалді түрде құралған $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ дәрежелік қатар $|x|<1$ болғанда жинақталады да, $|x|\geq 1$ болғанда жинақталмайды. Сондықтан бұл қатардың жинақталу радиусы $R=1$, ал жинақталу интервалы (-1,+1) болады.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ қатары $|x|\leq 1$ болғанда абсолютті жинақталады. Себебі $\left|\frac{x^n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$, ал $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ қатары жинақталатын қатар. $|x|>1$ болғанда бұл қатар жинақталмайды, сондықтан оның жинақталу радиусы $R=1$, ал жинақталу облысы $[-1,+1]$ кесіндісі болып табылады.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ дәрежелік қатары $|x|<1$ болғанда жинақталатын қатар. Бұған Даламбер белгісі көмегімен көз жеткізуге болады:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x^{n+1}|}{n+1} : \frac{|x^n|}{n} = \lim_{n\to\infty} |x| \frac{n}{n+1} = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |x|$$

Демек, дәрежелік қатар $|x|<1$ болғанда абсолютті жинақталады, ал $|x|>1$ болғанда жинақталмайды. Егер $x=-1$ болса, онда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ қатары жинақталады, бірақ бұл жинақталу абсолютсіз жинақталу болып табылады. $x=1$ болғанда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ гармониялық қатар болғандықтан, жинақсыз. Сонымен бұл қатардың жинақталу радиусы $R=1$ де, ал жинақталу облысы $[-1,+1)$ жарты интервалы болып табылады.

4. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ қатарының жинақталу радиусы (егер 0! бір деп санасақ) шексіздікке тең, ягни $R=+\infty$. Бұған Даламбер белгісін пайдаланып, көз жеткіземіз. Сонымен, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ дәрежелік қатары барлық сан өсінде жинақталатын қатар болады.

Бұл мысалдардан, дәрежелік қатардың жинақталу радиусын табу үшін кейде мүшелері оң қатарлар жинақталуының Даламбер белгісін қолдану мүмкіндігі туады. Мына тұжырым орындалады: егер ақырлы немесе ақырсыз $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ шегі бар болса, онда $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

Шынында да, егер $|x|<R$ (R- ді осы формуладан табамыз) болса, онда

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n\cdot x^n}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{|x|}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}=\frac{|x|}{R}<1$$

Сондықтан дәрежелік қатар жинақталады. Егер $|x|>R$ болса, онда

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n\cdot x^n}\right|=\frac{|x|}{R}>1.$$

Сондықтан (4) қатар жинақталмайды. Сонымен, R (4) қатардың жинақталу радиусы болады.

Он сегізінші лекция

ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ МАКЛОРЕН ҚАТАРЫНА ЖІКТЕЛУІ

18.1. Айталық $f(x)$ функциясы дәрежелік қатардың қосындысы түрінде жазылсын. Қатардың жинақталу интервалы $(-R,R)$ болсын.

$$f(x)=a_0+a_1x+a_1x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots \qquad (1)$$

Енді дәрежелік қатардың екі қасиетін дәлелдеусіз қабылдайық.

Теорема. Егер $f(x)$ функциясы $(-R,R)$ интервалында (1) дәрежелік қатарға жіктелсе, онда ол осы интервалда дифференциалданады және $f'(x)$ туындысы (1) қатарды мүшелеп дифференциалдағанға тең, яғни

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots$$

$f(x)$ функциясының кез келген ретті туындысын да осылай табуға болады және пайда болған қатарлардың жинақталу интервалы (1) қатардікіндей болады.

Теорема. Егер $f(x)$ функциясы $(-R,R)$ интервалында (1) дәрежелік қатарға жіктелсе, онда ол осы интервалда интегралданады және интегралы қатарды мүшелеп интегралдағанға тең, яғни

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx=\int_{x_1}^{x_2} a_0dx+\int_{x_1}^{x_2} a_1xdx+\ldots+\int_{x_1}^{x_2} a_nx^ndx+\ldots,$$

мұндағы $x_1, x_2 \in (-R,R)$.

Енді функцияның қатарға жіктелуін қарастырайық. (1) қатар коэффициенттерін $f(x)$ функциясы арқылы өрнектейік. $f(x)$ функциясын мүшелеп n рет дифференциалдаймыз:

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots$$

$$f''(x)=2a_2+3\cdot 2a_3x+4\cdot 3a_4x^2+\ldots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\ldots$$

$$f'''(x) = 3 \cdot 2a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4 x + \ldots + n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3} + \ldots$$

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2c_n + \ldots$$

Табылған теңдіктерде $x = 0$ деп алып, мыналарды аламыз

$$f(0) = a_0, f'(0) = a_1, f''(0) = 2 \cdot 1 \cdot a_2 = 2!a_2,$$

$$f'''(0) = 3 \cdot 2a_3 = 3!a_3, \ldots, f^{(n)}(0) = n!a_n, \text{ бұдан}$$

$$a_0 = f(0), a_1 = f'(0), a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}, \ldots, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Табылған коэффициенттер мәнін (1) қоямыз.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 +$$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \ldots \qquad (2)$$

Бұл қатарды *Маклорен қатары* деп атайды.

Кез келген функцияны Маклорен қатарына жіктей беруге болмайды. Формалді құрылған қатар жинақталмауы мүмкін не $f(x)$-ке емес басқа функцияға жинақталуы мүмкін.

Маклорен қатарының $f(x)$ қосындысын мына түрде жазуға болады.

$$f(x) = S_n(x) + r_n(x),$$

мұндағы $S_n(x)$-алғашқы n-мүшесінің дербес қосындысы; $r_n(x)$- қатардың қалдығы.

Мынадай теорема тұжырымдауға болады.

Теорема. Маклорен қатары $f(x)$ функциясына жинақталуы үшін қатардың қалдығы $n \to \infty$ жағдайда, жинақталу интервалының барлық x мәндерінде нөлге ұмтылуы қажетті де жеткілікті, яғни

$$\lim_{n \to \infty} r_n(x) = 0 \qquad (3)$$

Ескерту. Маклорен қатарын Тейлор қатарынан

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$$

$$\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

$x_0=0$ болғанда алуға болады.

Тейлор қатары Тейлор формуласымен тығыз байланысты.

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

мұндағы $R_n(x)$ - Тейлор формуласының қалдық мүшесі. Оның Лагранж түріндегі жазылуы:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\quad \text{мұндағы}\quad \xi\in(x_0,x).$$

(3) шарт орындалғанда Тейлор қатарының қалдығы $r_n(x)$ Тейлор формуласының қалдық мүшесіне тең болады.

Бұдан кез келген r үшін $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}=0.$ Сондықтан $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$.

18.2. Кейбір қарапайым функциялардың Маклорен қатарына жіктелуі.

Кейбір қарапайым функцияларының Маклорен қатарына жіктелуін қарастырамыз, яғни

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

1. $\underline{f(x)=e^x}$ болсын. $f^{(n)}(x)=\left(e^x\right)^{(n)}=e^x$ болатыны белгілі.

Олай болса, $f^{(n)}(0)=1, n=0,1,2,\ldots$

(2) формула негізінде $f(x)=e^{x}$ функциясы үшін Маклорен қатарына жіктелудің мына формуласын шығарып аламыз.

$$e^{x}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^{2}}{2!}+\ldots+\frac{x^{n}}{n!}+\ldots \qquad (4)$$

жинақталу облысы $(-\infty;\infty)$ болады.

2. Енді $f(x)=\sin x$ функциясын алайық.

$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}n\right)$ формуласы бізге белгілі. (2) формуланы қолдансақ,

$$\sin x=x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}-\ldots+(-1)^{k}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\ldots$$

Жинақталу облысы $(-\infty;\infty)$.

3. $f(x)=\cos x$ дейік. Сонда $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$ екенін біз білеміз. (2) формуланы қолданып $\cos x$ функциясының Маклорен қатарына жіктелуін аламыз.

Жинақталу облысы $(-\infty;\infty)$.

$$\cos x=1-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}-\ldots+(-1)^{k}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\ldots$$

жіктелуін аламыз.

4. Енді $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ дәрежелік функциясын Маклорен қатарына жіктейік. Бұл функцияның Маклорен формуласы былай жазылады.

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+r_{n}(x),$$

мұндағы $\alpha\in R$. Бұл жағдайда сәйкес Маклорен қатары былай жазылады.

$$1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+\ldots$$

Бұл қатар α - көрсеткішті биномдық қатар деп аталады, ал оның коэффициенттері биномдық коэффициенттер деп аталады. Егер α - теріс емес бүтін сандарға тең болса, онда қатардың нөлден өзге тек ақырлы санды мүшелері ғана болады. Егер α -теріс емес бүтін сандарға тең болмаса, онда $x \neq 0$ болғанда қатардың барлық мүшелері де нөлге тең емес. Даламбер белгісін қолданып, қатардың $|x| < 1$ теңсіздігін қанағаттандыратын x -тің барлық мәндерінде абсолютті жинақталатындығын көрсету қиын емес, Ал $|x| > 1$ үшін қатар жинақталмайды.

Егер $x \in (-1,+1)$ болса, онда $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$ теңдігін дәлелдеу қиын емес. Сонымен барлық $x \in (-1,+1)$ үшін

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots \quad (5)$$

жіктелуін аламыз.

5. Енді $f(x) = \ln(1+x)$ функциясының Маклорен формуласына жіктелу мәселесін қарастырамыз. Бұл функцияның жіктелуінің Маклорен формуласы былай жазылады.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + r_n(x)$$

Мұндағы Лагранж түріндегі қалдық мүше

$$r_n(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, \qquad 0 < \theta < 1$$

теңдігі арқылы беріледі. $0 \le x \le 1$ болғанда $\left|r_n(x)\right| < \frac{1}{n+1}$. Сондықтан $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$. Егер де $-1 < x < 0$ болса, онда да осы қорытындыға келеміз. Сонымен барлық $x \in (-1,+1]$ үшін

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \qquad (6)$$

Егер $x = -1$ болса, онда бұл қатар жинақталмайды, себебі бұл жағдайда алынған сан қатары гармоникалық қатардан айырмашылығы тек таңбасында ғана болады. Бұл қатар $|x|>1$ теңсіздігін қанағаттандыратын x-тің барлық мәндерінде де жинақталмайды, себебі оның жалпы мүшесі нолге ұмтылмайды.

Мысалдар.

1) $\alpha=-1, x=t^2$ болғанда (5) формуладан мына жіктелуді аламыз.

$$\frac{1}{1+t^2}=1-t^2+t^4-t^6+\ldots+(-1)^n t^{2n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}$$

Бұл қатардың жинақталу радиусы 1 - ге тең, сондықтан оны 0-ден x-ке дейін, мұндағы $x\in(-1,+1)$, мүшелеп интегралдап, мына формулаға келеміз.

$$arctgx=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Осы қатар $x=\pm1$ болғанда абсолютсіз жинақталады, себебі Лейбниц белгісі бойынша $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ ауыспалы таңбалы сан қатары жинақталады. Сонымен жіктелу барлық $[-1,+1]$ кесіндісінде орындалады.

$x=1$ деп алып және $arctg1=\frac{\pi}{4}$ теңдігін ескеріп, мынаны аламыз.

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$$

Бұл қатар Лейбниц қатары және одан π санының жуық мәнін есептеп шығаруға болады.

2) Егер жіктелуде $\alpha=-\frac{1}{2}, x=-t^2$ деп алсақ, онда

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}=1+\frac{t^2}{2!}+\frac{1\cdot 3}{2!2^2}t^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!2^3}t^6+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{n!}\cdot t^{2n}+$$

$$+\ldots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!2^n}\cdot t^{2n}$$

Бұл қатардың жинақталу радиусы 1- ге тең, сондықтан оны 0- ден x- ке дейін, мұндағы $x\in(-1,+1)$ мүшелеп интегралдап, $\arcsin x$ - тің дәрежелік қатарға жіктелу формуласын шығарып аламыз.

$$\arcsin x=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

мұндағы $(2n-1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$; $(2n)!!=2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n$

3) а) егер $\alpha=\frac{1}{2}$ болса, онда

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2!2^2}+\frac{1\cdot 3}{3!2^3}x^2-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n+\ldots=$$

$$=1+\frac{x}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n,\ -1\le x\le 1,$$

жіктелуі шығады. Бұдан, егер $x=1$ болса, онда

$$\sqrt{2}=1{,}5+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}$$

мәнін аламыз.

б) егер де $\alpha=-\left(\frac{1}{2}\right)$ болса, онда

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1+\frac{x}{2}+\frac{1\cdot 3}{2!2^3}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!2^3}x^3+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot$$

$$\cdot x^n+\ldots=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n,-1<x\le 1$$

жіктелуі шығады.

Сонымен, егер α-рационал сан болса, онда биноминалдық қатар көмегімен түбірлердің арифметикалық мәндерін есептеп табамыз.

4) Егер $x=1$ болса, онда $\ln 2$-нің жіктелуін шығарып аламыз.

$$\ln 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

5) Енді $x=1$ деп алып, $e=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$ жіктелуін аламыз.

Бұл жіктелуден e санының кез келген дәлдікпен табылған жуық мәнін алуға мүмкіндік туады.

Дәрежелік қатарлардың әр түрлі қолданысын көрдік. Олардың көмегімен кез келген дәлдікпен функция мәнін; интегралдарға қиын не элементар функциялар арқылы өрнектелмейтін анықталған интегралды есептеуге болады. Мысалы, $\int_0^a \frac{\sin x}{x}dx$ алынбайтын интеграл. Ал осы интегралды дәрежелік қатардың көмегімен оңай есептеуге болады. Шынында да, $\sin x = x-\frac{x^3}{5!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$ қатарын $\frac{1}{x}$-ке көбейтіп, мынаны аламыз

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots,$$

Ал бұл қатар x-тің кез келген мәнінде жинақталады. Оны 0 ден a-ға дейін интегралдап

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x}dx = a-\frac{a^3}{3!3}+\frac{a^5}{5!5}-\frac{a^7}{7!7}+\ldots$$

Осы теңдіктің көмегімен интегралды a-ның кез келген мәнінде, алдын ала берілген дәлдікпен есептеп алуға болады.

ЕКІНШІ БӨЛІМ

БІРІНШІ ПРАКТИКАЛЫҚ САБАҚ

ЭКОНОМИКА САЛАСЫНДАҒЫ ФУНКЦИЯНЫҢ ҚОЛДАНЫЛУЫ. САНДЫҚ ФУНКЦИЯ, БЕРІЛУ ТӘСІЛДЕРІ, КЛАССИФИКАЦИЯСЫ, СИПАТТАМАСЫ. НЕГІЗГІ ЭЛЕМЕНТАР ФУНКЦИЯЛАР

1.1. 1 тонна қорғасынды еріту үшін 1,5 тонна тас көмір керек. Осыны ескеріп қорғасын (x) мен тас көмір (y) арасындағы функциялық тәуелділікті жаз.

1.2. Қандай да бір зат жасау үшін кәсіпорын a_1 теңге жұмсайды. Бұдан қоса зат өндірісіне тәуелсіз a_0 теңге шығын (мысалы, мекемені жылыту жүйесіне, күзетке, т.с.с.) жұмсайды деп алып, жалпы шығын (y) мен өндіретін зат (x) арасындағы тәуелділікті жаз.

1.3. Жүкті бір түрлі көлікпен тасымалдау құнының жол ұзақтығынан (жүз км бірлікпен) тәуелділігі $y=150+50x$ теңдігімен берілген. Ал екінші көлікті қолданғанда бұл тәуелділік $y=250+25x$ теңдігімен берілген. Қай көлікті қандай ара қашықтықта қолданған тиімді.

1.4. Жылдық қарапайым өсу мөлшері $p=5\%$ деп алып, салынған $K=2000$ қаржының неше жылдан кейін қосылған процент мөлшері 500 болатынын анықта.

1.5. Айқындалмаған түрде берілген y функциясын айқындалған түрде жазу керек.

1) $x^2+y^2=1;$ 3) $\lg x+\lg(y+1)=4$

2) $xy=C;$ 4) $2^{x+y}(x^2-2)=x^3+7$

1.6. Функцияның анықталу облысын тап.

а) $f(x)=\dfrac{x-2}{2x-1};$ б) $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x-1};$

в) $f(x)=\sqrt{1-2x}+3\arcsin\dfrac{3x-1}{2}$

(*Ж.* *а)* $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$; б) $(-1;1)\cup(1;+\infty)$; в) $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$

1.7. Функцияның мәндер жиынын тап.

а) $f(x)=x^2-6x+5$; б) $f(x)=2+3\sin x$

(*Ж.* а) $[-4;+\infty)$; б) $[-1;5]$)

1.8. Функцияның негізгі периодын тап.

а) $f(x)=\cos 8x$; б) $f(x)=\sin 6x+tg4x$

(*Ж.* а) $T=\pi/4$; б) $T=\pi$)

1.9. Функцияның жұп, тақтылығын анықта.

1) $f(x)=x^2\sqrt[3]{x}+2\sin x$; 2) $f(x)=2^x+2^{-x}$; 3) $f(x)=x^2+5x$.

(*Ж.* 1)тақ ; 2) жұп; 3) жұп та емес, тақ та емес.)

1.10. $f(x)+f(-x)$ - жұп функция, $f(x)-f(-x)$ - тақ функция екенін дәлелде.

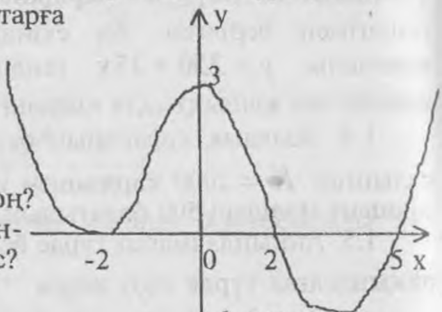
1.11. Функцияның өсу, кему, тұрақты болатын интервалдарын көрсет: 1) $y=|x|$; 2) $y=|x|-x$

1.12. Функция графиктік түрде берілген (1- сурет). График бойынша мына сұрақтарға жауап бер:

Тәуелсіз айнымалының қандай мәндерінде функция нөлге айналады?

Тәуелсіз айнымалының қандай мәндерінде функция оң?

Тәуелсіз айнымалының қандай мәндерінде функция теріс?



1-сурет

1.13. Берілген функцияға кері функцияны тап.

1) $y=x$; 2) $y=1-3x$, 3) $y=\dfrac{1}{1-x}$

4) $y=\dfrac{2^x}{1+2^x}$; 5) $y=10^{x+1}$, 6) $y=2\sin 3x$

(*Ж.* *1)* $y=x$; 2) $y=\dfrac{1-x}{3}$; 3) $y=\dfrac{x-1}{x}$, 4) $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$

$5)\ y=\lg\frac{x}{10}$; $6)\ y=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{2}\Big)$

1.14. Функция графигін графиктік қосу әдісімен сал.

а) $y=\frac{x^3-x}{3}$ функциясын $[-4;4]$ аралығында;

б) $y=x^2+2^x$ в) $y=x^2-2^x$

1.15. Элементар функциялардың графигін жылжыту және деформациялау арқылы төмендегі функциялардың графигін сал.

1) $y=\frac{1}{2}(x-2)^2-1$; 2) $y=\frac{3}{2}\sin(2x+3)$

1.16. Функция графигін сал.

$$y=\begin{cases}2-x & егер \quad x\le 3\\ 0{,}1x & егер \quad x>3\end{cases}$$

1.17. Теңдеуді графиктік тәсілмен шеш.

а) $2x^2-5x+2=0$, б) $10^{-x}=x$

(Ж. $a)\ x_1=\frac{1}{2}; x_2=2$; б) $x=0{,}4$)

1.18. Теңдеулер жүйесін графиктік тәсілмен шеш.

а) $\begin{cases}xy=10\\ x+y=7\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2-x+y=4\\ y^2-2x=0\end{cases}$

(Ж. а) (2;5),(5;2); б) (2;2),(3,1;-2,5))

1.19. Мақта (x) мен одан иірілетін жіп (y) арасындағы тәуелділік $y=5x$ теңдеуімен, ал жіп пен одан тоқылатын мата (z) арасындағы тәуелділік $z=600y$ теңдеуімен берілген. Мақта мен мата арасындағы тәуелділікті жазу керек.

1.20. Жылдық қарапайым өсу мөлшері 4%-ке тең бастапқы 5000$ қаржы 3 жылдан кейін қаншаға өседі.

1.21*. Тоғыз айға берілген 4500$ - дың қарапайым проценттік өсімі 270$ болу үшін қандай жылдық өсу мөлшерін (p) белгілеу керек.

1.22. Функцияның анықталу облысын тап.

а) $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{x}$; б) $f(x)=\frac{x-2}{\cos 2x}$;

в) $f(x)=\lg(3x-1)+2\lg(x+1)$

(*Ж.* а) $[-2;0]\cup(0;2]$; б) $x\neq\pi(2n+1), n\in Z$ в) $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$)

1.23. Функцияның мәндер жиынын тап.

а) $f(x)=|x|+1$; б) $f(x)=\sqrt{16-x^2}$;

в*) $f(x)=1-3\cos x$; г**) $f(x)=4^{-x^2}$

(*Ж.* а) $[1;+\infty)$; б) $[-4;4]$; в) $[-2;4]$, г) $(0;1]$)

1.24. Функцияның жұп, тақтылығын анықта.

1) $f(x)=|x|+2$; 2) $f(x)=|x+2|$; 3*) $f(x)=\frac{16^x-1}{4^x}$.

(*Ж.* 1) жұп, 2) жұп та емес, тақ та емес, 3) тақ)

1.25. Функцияның негізгі периодын тап.

1) $f(x)=\sin 5x$, 2) $\lg\cos 2x$, 3) $f(x)=tg3x+\cos 4x$

(*Ж.* 1) $2\pi/5$, 2) π, 3) π)

1.26*. Мына функцияларды жұп және тақ функциялардың қосындысы түрінде жаз. (10 есепті қара.)

1) $y=10^x$ 2) $y=(1+x)^{100}$

1.27. $y=f(x)$ функциясының графигі белгілі деп төмендегі функциялардың графигін сал.

1) $y=|f(x)|$; 2) $y=\frac{1}{2}[|f(x)|+f(x)]$; 3) $y=\frac{1}{2}[|f(x)|-f(x)]$

1.28. Функция графигін анықталу облысында графиктік қосу тәсілімен сал: $y=\sqrt{x}+\sqrt{4-x}$

1.29. Берілген функцияға кері функцияны тап.

1) $y=2x,$ 2) $y=\sqrt[3]{x^2+1}$ 3*) $y=\dfrac{10^x-10^{-x}}{10^x+10^{-x}}+1,$

4**) $y=1+2\sin\dfrac{x-1}{x+1},$ \ 5**) $y=4\arcsin\sqrt{1-x^2}.$

(*Ж.* 1) $y=\dfrac{x}{2}$; 2) $y=\pm\sqrt{x^3-1}$; 3) $y=\dfrac{1}{2}\lg\dfrac{x}{2-x}$; 4) $y=\dfrac{1+\arcsin\dfrac{x-1}{2}}{1-\arcsin\dfrac{x-1}{2}}$;

5) $y=\pm\cos\dfrac{x}{4}\,(0\le x\le 2\pi)$)

1.30*. Цельси (C) шкаласынан Фаренгейт (F) шкаласына көшетін формуланы төмендегідей берілген сәйкестіктер көмегімен құру керек: 0^0C шамасына 32^0F және 100^0C шамасына 212^0F сәйкес келеді. Алынған функция графигін сал. (*Ж.* $F=32+1{,}8C$)

1.31**. Табаны a, биіктігі h болатын тең бүйірлі үшбұрышқа 2 - суретте көрсетілгендей төртбұрыш салынған. Төртбұрыштың ауданы ең үлкен болуы үшін оның биіктігі қандай болуы керек? (*Ж.* Төртбұрыштың биіктігі үшбұрыш биіктігінің жартысына тең болуы керек.)

2-сурет

ЕКІНШІ ПРАКТИКАЛЫҚ САБАҚ

БІРЖАҚТЫ ШЕКТЕР. АҚЫРСЫЗ АЗ, АҚЫРСЫЗ ҮЛКЕН ШАМАЛАР. ШЕККЕ ҚОЛДАНЫЛАТЫН АРИФМЕТИКАЛЫҚ АМАЛДАР

2.1. Мына шекті $\lim\limits_{x\to 3}(2x-1)=5$ дәлелдеу керек. Берілген $\varepsilon>0$ саны бойынша, 3 санының δ - аймағында жатқан кез келген x үшін $2x-1$ функциясының мәні 5 санының ε - аймағында жататындай ең үлкен $\delta>0$ табу керек. (*Ж.* $\delta=\varepsilon/2$)

2.2. Мына шекті $\lim\limits_{x\to -1}\left(3-2x-x^2\right)=4$ дәлелдеу керек. $3-2x-x^2$ функция мәнінің өз шегінен өзгешелігі $\varepsilon=0{,}0001$-ден аз болуы үшін x айнымалыны -1 санының қандай ең үлкен δ -аймағынан алу керек. (*Ж.* $\delta=0{,}01$)

2.3. Мына шекті $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+4}{x}=3$ дәлелдеу керек. x пен $\dfrac{3x+4}{x}$ өрнегін x - тің $1,10,100,1000,\ldots$ мәндерінде таблицаға толтырып түсіндір. Нұсқау. $x\to\infty$ жағдайда $\dfrac{3x+4}{x}-3$ айырмасы ақырсыз аз шама екенін көрсету керек.

2.4. $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{3}{x-2}$ және $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{3}{x-2}$ шектерін тауып, таблица көмегімен түсіндіру керек.

2.5. $f(x)=\dfrac{1}{x+2^{1/(x-3)}}$ функциясының $x\to 3$ жағдайында оң жақты және сол жақты шегін табу керек.

(*Ж.* $\lim\limits_{x\to 3-0}f(x)=1/3$; $\lim\limits_{x\to 3+0}f(x)=0$)

2.6. Төмендегі "шартты" жазулардың нақтылы мағынасын анықта: 1) $\frac{2}{\infty}=0$, 2) $\frac{2}{0}=\pm\infty$, 3) $3^{\infty}=\infty$, 4) $3^{-\infty}=0$;

5) $\lg 0=-\infty$, 6) $tg90^{0}=\pm\infty$.

2.7. $f(x)=1/(x-2)$ функциясы $x\to 2$ жағдайда ақырсыз үлкен функция болатынын дәлелдеу керек. Егер E кез келген оң сан болса, 2 санының қандай δ-аймағында $(|x-2|<\delta)$ $|f(x)|>E$ теңсіздігі орындалады? Егер а) $E=10$, б) $E=100$, в) $E=1000$ тең болса δ неге тең болады?

(Ж. $|x-2|<\frac{1}{E}=\delta$; а) $\delta=0{,}1$; б) $\delta=0{,}01$; в) $\delta=0{,}001$)

Шектерді табу керек:

2.8. 1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4x+1}{2x+1}$; (Ж. $-0{,}6$) 2) $\lim\limits_{x\to \pi/4}\frac{1+\sin 2x}{1-\cos 4x}$; (Ж. 1)

2.9. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-3x+2}$; (Ж.1) 2.10. $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{tgx}{\sin 2x}$; (Ж. $\frac{1}{2}$)

2.11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$; (Ж. $\frac{2}{3}$) 2.12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$; (Ж.1)

2.13. 1) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x^2-1}{3x^2-4x}$; (Ж. $\frac{2}{3}$) 2) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{5x^3-7x}{1-2x^3}$; (Ж. $-\frac{5}{2}$)

2.14. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{3x-1}{x^2+1}$; (Ж.0) 2.15. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^3-1}{x^2+1}$; (Ж. ∞)

2.16. $\lim\limits_{n\to \infty}\frac{\sqrt{2n^2+1}}{2n-1}$; (Ж. $\frac{1}{\sqrt{2}}$)

2.17. $\lim\limits_{n\to \infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{\sqrt{9n^4+1}}$; (Ж. $\frac{1}{6}$)

2.18. 10 жылға жинақ кассасына 100000 теңге салынған. Жылдық күрделі процент мөлшері $p=3\%$ деп алып, жинақ кассасының осы уақыт өткеннен кейін қанша ақша беретінін есепте ($1{,}03^{10}=1{,}34392$). (*Ж.* 134392 т.)

2.19. Кооператив 8 жылға 120 мың доллар кредит алды. Жылдық күрделі процент мөлшері 5% деп алып, кооперативтің қайыратын ақша мөлшерін (қарызын) есептеу керек ($1{,}05^{8}=1{,}47746$).

(*Ж.* 177295,2 $)

2.20. Жылдық өсімі 15% тең халық неше жылда екі еселенеді ? (*Ж.* 5 жылда)

2.21. Мына шекті $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+2}{2x}=2{,}5$ дәлелдеу керек. Ол үшін $\dfrac{5x+2}{2x}-2{,}5$ айырмасы $x\to\infty$ жағдайда ақырсыз аз шама екенін көрсету керек. x-ке $1, 10, 100, 1000, \ldots$ мәндерін беріп, таблица толтырып есепті түсіндір.

2.22. Мына шекті $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x^2}{2+4x^2}=-0{,}5$ дәлелдеу керек. x-тің қандай мәндерінде функцияның өз шегінен өзгешелігі 0,01 - ден кем болады? (*Ж.* $|x|>7{,}036$)

2.23. $f(x)=e^{1/(x-a)}$ функциясының $x\to a$ жағдайда оң жақты және сол жақты шегін табу керек.

(*Ж.* $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\pm\infty$)

2.24. Табу керек: 1) $\lim\limits_{x\to 1-0}2^{\frac{1}{x-1}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1+0}2^{\frac{1}{x-1}}$;

3) $\lim\limits_{x\to \pi/4-0}3^{tg2x}$; 4) $\lim\limits_{x\to \pi/4+0}3^{tg2x}$; 5) $\lim\limits_{x\to \pi/2-0}\dfrac{2}{1+2^{tgx}}$;

6) $\lim\limits_{x\to \pi/2+0}\dfrac{2}{1+2^{tgx}}$; 7) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{a}{1+a^{x}}$.

(*Ж.* 1) 0; 2) ∞; 3) ∞; 4) 0; 5) 2; 6) 0; 7) 0, егер $a>0$, $1/2$, егер $a=1$, a, егер $0<a<1$)

2. 25**. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ функциясы $x\to\infty$ жағдайда ақырсыз аз шама екенін дәлелдеу керек. Егер ε кез келген сан болса, x-тің қандай мәндерінде $|f(x)|<\varepsilon$ теңсіздігі орындалады ? Есептеуді ε-нің мынадай мәндерінде жүргіз: а) ε =0,1; б) ε =0,01; в) ε = 0,001.

(*Ж.* $|x|>\dfrac{1}{\varepsilon}$; а) $|x|>10$; б) $|x|>100$; в) $|x|>1000$)

Шектерді табу керек:

2.26. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x+6}{x^3+8}$; (*Ж.* $\dfrac{1}{4}$). 2.27. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$; (*Ж.* –12)

2.28*. $\lim\limits_{x\to\pi+0}\dfrac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}$; (*Ж.* $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$).

2.29. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{\sqrt{3n^2+1}}$; (*Ж.* $\sqrt{3}$)

2.30*. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$; (*Ж.* $-\dfrac{1}{56}$)

2.31**. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\cos x-\sin x}$; (*Ж.* $-\sqrt{2}$)

2.32. Жинақ кассасына 10000 теңге салынған. Жылдық күрделі процент өсуі 5% деп алып, 10 жылдан кейін жинақ кассасы қанша ақша беретінін есептеу керек

(r^{10}=1,62889). (*Ж.* 16288,9 теңге.)

2.33. Қандай да бір қала халқы 47 жыл ішінде 4 есе өседі. Жылдық өсу проценті қандай? (*Ж.* $p\approx 3\%$)

ҮШІНШІ ПРАКТИКАЛЫҚ САБАҚ

БІРІНШІ ЖӘНЕ ЕКІНШІ ТАМАША ШЕКТЕР. ШЕК ТАБУҒА АРАЛАС ЕСЕПТЕР. АҚЫРСЫЗ АЗДАРДЫ САЛЫСТЫРУ

Шек табу керек:

3.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}$; $(Ж.4)$ 3.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\cdot\sin x}$; $(Ж.2)$

3.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$; $(Ж.6\sqrt{2})$

3.4. $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$; $(Ж.-\dfrac{1}{2})$

3.5. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$; $(Ж.1{,}5)$

3.6. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\dfrac{\pi}{2}x$; $(Ж.\dfrac{\pi}{2})$

3.7. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4x}\right)$; $(Ж.-2)$

3.8. $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{4}{x^2-4}\right)$; $(Ж.-\dfrac{1}{4})$

3.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$; $(Ж.\dfrac{1}{20})$

3.10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$; $(Ж.\dfrac{3}{4})$

3.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{n}\right)^n$; $(Ж.\dfrac{1}{e^5})$

3.12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3n}\right)^n$; $(Ж.e^{-\frac{1}{3}})$

3.13. $\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{n+3}$; (Ж. e^4)

3.14. $\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$; (Ж. e^2)

3.15. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$; (Ж. e^{-1})

3.16. $\lim_{n\to\infty}n(\ln(n+3)-\ln n)$; (Ж. 3)

3.17. $\lim_{x\to0}(\cos x)^{ctg^2x}$. ($\sin^2 x=\alpha$. деген белгілеу енгізу керек (Ж. $\frac{1}{\sqrt{e}}$)

3.18. $\lim_{x\to0}\frac{a^{2x}-1}{x}$; (Ж. $2\ln a$)

3.19. Ақырсыз аз x-ке байланысты төмендегі ақырсыз аз функцияның ақырсыздық ретін табу керек:

1) $1-\cos x$, 2) $tgx-\sin x$,

3) $2\sin^4 x-x^5$, 4) $\sqrt{\sin^2 x+x^4}$.

(Ж. 1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 1)

3.20. $x\to1$ жағдайда 1-x және 1-$\sqrt[3]{x}$ ақырсыз аз шамаларының ақырсыз аздық реті бірдей екеніне көз жеткізіңіздер. Олар өзара эквивалентті болады ма ?

3.21. $x\to0$ жағдайда $e^{2x}-e^x$ және $\sin2x-\sin x$ ақырсыз аз шамалары эквивалентті екенін дәлелдеу керек.

3.22. Екі ақырсыз аз шамалардың қатынасы туралы теореманы қолданып мына шекті есепте:

1) $\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{\sin2x}$; 2) $\lim_{x\to0}\frac{\sin ax+x^2}{tgbx}$; 3) $\lim_{x\to0}\frac{3x+\sin^2 x}{\sin2x-x^3}$;

(Ж. 1) 2,5; 2) a/b; 3) 1,5)

Шек табу керек:

3.23. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\sin 3x}$; (Ж. $\frac{1}{3}$) 3.24. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin\ x}{\sec x-1}$; (Ж. 4)

3.25. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x+tg^2 x}{x\cdot\sin x}$; (Ж. 3)

3.26**. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}}$; (Ж. ∞)

3.27. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)$; (Ж. 0)

3.28. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2-ax}\right)$; (Ж. $-a$)

3.29*. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+1}{\sin(x+1)}$; (Ж. 0)

3.30**. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{\sqrt{1+\cos 2x}}{\sqrt{\pi}-\sqrt{2x}}$; (Ж. $-\sqrt{2\pi}$)

3.31. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n}$; (Ж. e^6)

3.32. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x}$; (Ж. $\frac{1}{e^2}$)

3.33*. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$; (Ж. $\frac{1}{a}$)

3.34*. $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$; (Ж. $\frac{1}{e}$)

3.35**. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$; (Ж. $\frac{3}{2}$)

3.36**. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$; (Ж. 1)

3.37. Ақырсыз аз x -ке байланысты төмендегі ақырсыз аз функциялардың ақырсыздық ретін табу керек:

1) $\sqrt{1+x^2}-1$; 2) $\sin 2x - 2\sin x$; 3*) $1-2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

(*Ж.* 1) 2; 2) 3; 3) 1)

3.38. $x \to 0$ жағдайда мыналарды дәлелдеу керек:

1) $arctgmx \approx mx$; 2) $\sqrt[3]{1+x}-1 \approx \dfrac{1}{3}x$; 3) $1-\cos^3 x \approx 1{,}5\sin^2 x$.

3.39*. $x \to 0$ жағдайда $x/2$ және $\sqrt{1+x}-1$ шамалары бірдей ретті ақырсыз аз шамалар екенін дәлелде. Осы нәтижені пайдаланып, $|x|$ -тің аз шамасында

$$\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{x}{2} \qquad (1)$$

жуық теңдігінің орындалатынын көрсету керек. (1) формуланы қолданып, мынаны жуықтап есептеп, шыққан мәнді таблицалық мәнімен салыстыр:

а) $\sqrt{1{,}06}$, б) $\sqrt{0{,}97}$, в) $\sqrt{10}$

(*Ж.* а) 1,03 (1,0296); б) 0,985 (0,9849); в) 3,167 (3,1623))

ТӨРТІНШІ ПРАКТИКАЛЫҚ САБАҚ

ФУНКЦИЯ ҮЗІЛІССІЗДІГІ

4.1. y функциясы мына түрде анықталған:

$$y=\begin{cases}0, & \text{егер } x<0\\ x, & \text{егер } 0\le x<1\\ -x^2+4x-2, & \text{егер } 1\le x<3\\ 4-x, & \text{егер } x\ge 3\end{cases}$$

Осы функция үзіліссіз бола ма? (Жауабы. Иә)

4.2. x аргументінің кез келген мәнінде $y=\sin x$ функциясы үзіліссіз болатынын дәлелдеу керек.

4.3. $y=\dfrac{4}{x-2}$ функцияның үзілу нүктелерін көрсету керек. $\lim\limits_{x\to 2-\infty} y$, $\lim\limits_{x\to 2+\infty} y$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y$ табу керек және $x=-2,0,1,3,4$ және 6 нүктелері бойынша қисықты сал.

4.4. Функцияның графигін құру керек.

$$y=\begin{cases}x/2, & \text{егер } x\ne 2\\ 0, & \text{егер } x=2\end{cases}$$

Үзілу нүктесін көрсету керек. Осы нүктеде үзіліссіздіктің қандай шарты орындалады және қандай шарты орындалмайды ?

4.5. Функцияның графигін құру керек:

1) $y=\dfrac{x+1}{|x+1|}$; 2) $y=x+\dfrac{x+1}{|x+1|}$;

Үзілу нүктелеріндегі үзіліссіздіктің қандай шарттары орындалады және қайсысы орындалмайды ?

4.6. $x=4$ болғанда $y=\dfrac{x}{x-4}$ функциясы үзіліске ұшырайтынын көрсету керек.

4.7. $x=4$ болғанда $y=arctg\dfrac{1}{x-4}$ функциясы үзіліске ұшырайтынын көрсету керек.

4.8. $x=5$ болғанда $y=\dfrac{x^2-25}{x-5}$ функциясы үзіліске ұшырайтынын көрсету керек.

4.9. $x^3-3x+1=0$ теңдеуі (1; 2) интервалында нақты түбірге ие болатынын көрсету керек. Жуықтап осы түбірді есептеу керек.
(Жауабы. 1,53)

4.10. Функцияны үзіліссіздікке зерттеу керек.

а) $y=\dfrac{x^2}{x-2}$; б) $y=\dfrac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$;

(Жауабы: а) $x=2$ - II -ші түрдегі үзіліс нүктесі.
б) $x=-2$ - II -ші түрдегі үзіліс нүктесі
$x=2$ - жойылатын үзіліс нүктесі.

4.11. Көрсетілген нүктеде функцияны үзіліссіздікке зерттеу керек. $f(x)=\dfrac{x+7}{x-2}$, $x_1=5$, $x_2=2$.

4.12. $y=\dfrac{x}{x+2}$ функцияның үзіліс нүктесін көрсету керек.

$\lim\limits_{x\to 2-\infty} y$, $\lim\limits_{x\to -2+\infty} y$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y$ табу керек және $x=-6$, -4, -3, -1,0, 2 нүктелері бойынша қисық құру керек.

4.13. x аргументінің кез-келген мәні үшін $y=x^2$ функциясы үзіліссіз екенін көрсету керек.

4.14. $y=|x|$ функциясы үзіліссіз екенін көрсету керек. Осы функцияның графигін құру керек.

4.15. Функцияның графигін салып,

$$y=f(x)=\begin{cases}2, & \textit{егер} \quad x=0,\ x=\pm 2\\ 4-x^2, & \textit{егер} \quad 0<|x|<2\\ 4, & \textit{егер} \quad |x|>2\end{cases}$$

үзіліс нүктелерін көрсету керек. Үзіліс нүктелерінде үзіліссіздіктің қандай шарттары орындалды және қайсысы орындалмады ?

4.16. $x=0$ болғанда $f(x)$ функциясы анықталмаған. $x=0$ болғанда $f(x)$ - үзіліссіз болатындай етіп $f(0)$ -ді анықтау керек:

а*) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

б**) $f(x)=\dfrac{(1+x)^n-1}{x}$ (n – натурал сан)

(Жауабы. а) $f(0)=\dfrac{1}{2}$, б) $f(0)=n$)

4.17*. $f(x)=\begin{cases} -2\sin x, & егер\ \ x\le -\pi/2 \\ A\sin x+B, & егер\ \ -\pi/2<x<\pi/2 \\ \cos x, & егер\ \ x>\pi/2 \end{cases}$

болсын.

$f(x)$ функциясы үзіліссіз болатындай етіп A және B сандарын таңдап алу керек. Оның графигін құру керек.
(Жауабы. A=-1, $B=1$)

4.18. Функцияны үзіліссіздікке зерттеу керек.

а) $y=\dfrac{1+x^3}{1+x}$, б) $y=\sin\dfrac{\pi}{x}$, в) $y=\dfrac{x}{\sin x}$.

(Жауабы: а) $x=-1$ - жойылатын үзіліс нүктесі.

б) $x=0$ - II -ші түрдегі үзіліс нүктесі.

в) $x=0$ - жойылатын үзіліс нүктесі, $x=k\pi$ -шексіз үзіліс нүктесі $(k=\pm1,\pm2,\ldots)$)

4.19. $x^5-3x=1$ теңдеуінің (1; 2) аралықта ең болмағанда бір түбірге ие болатынын көрсету керек.

$\int_1^2 x^5$

БЕСІНШІ ПРАКТИКАЛЫҚ САБАҚ

ФУНКЦИЯ ТУЫНДЫСЫ. ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ МАҒЫНАСЫ. ТАБЛИЦАЛЫҚ ДИФФЕРЕНЦИАЛДАУ

5.1. $C=\frac{5}{9}(F-32)$ теңдеуі Цельсий шкаласы бойынша C - температурамен, Фаренгейт шкаласы бойынша F - температурасын байланыстырады. F -ге қатысты C -ның өзгеру жылдамдығын табу керек. (*Ж.* 5/9).

5.2. Темір стерженьді қыздырғанда ұзарады. $0^0 C$ температурадағы ұзындығы 50 см стержень $T^0 C$ - қыздырғанда 50+0,00006 см- ге ұзарады. Температураға қатысты темір стерженінің ұзындығының өзгеру жылдамдығы неге тең ? (*Ж.* 0,0006)

5.3. Қандай да бір уақыт аралығында өнім өндіру $y=300+2x^2$ функциясымен өрнектеледі, мұндағы x уақытты көрсетеді. Δx уақыт аралығындағы өнім өндіру жылдамдығын табу керек.

5.4. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ есептей отырып, функцияның туындысын табу керек: 1) $y=\sqrt{x}$, 2) $y=\frac{1}{x}$.

Функцияның туындысын формула бойынша табу керек.

5.5. 1) $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+4x-5,$ 2) $y=\frac{bx+c}{a}.$

(*Ж.* 1)$x^2-4x+4;$ 2)b/a)

5.6. 1) $y=x+2\sqrt{x}$, 2) $y=3x-6\sqrt{x}$

(*Ж.* 1)$1+\frac{1}{\sqrt{x}};$ 2)$3\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$)

5.7. 1) $y = \frac{1}{x} + \frac{10}{x^3}$, 2) $y = x +$ [illegible]

(*Ж.* 1) $-\frac{x^2 + 30}{x^4}$; 2) [illegible]

5.8. 1) $y = 6\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x}$, 2) $y =$ [illegible]

(*Ж.* 1) $\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$; 2) [illegible]

5.9. 1) $y = x - \sin x$. 2) $y =$ [illegible]

(*Ж.* 1) $2\sin^2 \frac{x}{2}$; 2) [illegible]

5.10. 1) $y = x^2 \cos x$, 2) $y = x \ln x$ [illegible]

(*Ж.* 1) $x(2\cos x - x\sin x)$; [illegible]

5.11. 1) $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$, 2) $y = \frac{1 + \ln x}{x}$ [illegible]

(*Ж.* 1) $\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$, 2) $-\frac{\ln x}{x^2}$)

5.12. 1) $y = x^2 \cdot 2^x$, 2) $y =$ [illegible]

(*Ж.* 1) $(2x + x^2 \ln 2) \cdot 2^x$; 2) [illegible]

5.13. 1) $y = x - arctgx$, 2) $y =$ [illegible]

(*Ж.* 1) $\frac{x^2}{1 + x^2}$; 2) [illegible]

5.14. $y = x^2$ параболасының [illegible] көлбеулік бұрышын табу керек.

(*Ж.* $k = tg\alpha = \pm 4$)

[illegible] параболасының Ox өсімен $(x>0)$ [illegible] жүргізілген жанамасы мен нормаль [illegible] графиктерін салу керек.

(Ж. $y=8-4x$, $x-4y=2$)

$y=\frac{x^3}{3}$ қисығына $x=-1$ нүктесінде жүргізілген [illegible] жазу керек. (Ж. $y=x+\frac{2}{3}$)

[illegible] (C) шкаласынан Фаренгейт (F) шкаласына [illegible] $F=32+1{,}8C$ теңдеуімен берілген. C - [illegible] F-тің өзгеру жылдамдығын табу керек. (Ж. 1,8)

Қандай да бір халық санының өсуі [illegible] функциясымен берілген, мұндағы x - [illegible] алынған уақыт көрсеткіші. Δx уақыт [illegible] халық санының өсу жылдамдығын табу керек. (Ж. $4x+25$)

Қозғалмайтын A нүктесінен M нүктесі, AM [illegible] уақыттың квадратына тура пропорционал [illegible], алыстайды. Қозғалыс басталғанына 2 мин. [illegible] кейін AM ара қашықтығы 12 м болды. [illegible] алғашқы 5 минуттағы; б) $t=4$ тен $t=7$ [illegible] аралығындағы; в) $t=t_1$ ден $t=t_2$ уақыт [illegible] орташа жылдамдығын табу керек.

(Ж. а) $v=0{,}25$ м/сек; б) $v=0{,}35$ м/сек; в) $\frac{t_1+t_2}{1200}$ м/сек.)

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ шегін есептей отырып, функцияның [illegible] табу керек: 1) $y=x^3$; 2*) $y=\sin x$; 3**) $y=tgx$

[illegible] Егер $f(x)=\sqrt[3]{x}$ болса, $f'(8)$ есепте. (Ж. $\frac{1}{12}$)

1) $y=\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+x,$ 2) $y=\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2$

(Ж. 1) $\left(x^2-1\right)^2$; 2) $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)$)

5.23. 1) $y=\frac{1}{10x^5}-\frac{1}{4x^4}$; 2) $y=\frac{3}{\sqrt[3]{x}}-\frac{2}{\sqrt{x}}$;

(Ж. 1) $\frac{2x-1}{2x^6}$, 2) $\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$)

5.24. 1) $y=\sqrt{x}\cos x,$ 2) $y=\frac{\cos x}{1+2\sin x}$;

(Ж. 1) $\frac{\cos x-2x\cdot\sin x}{2\sqrt{x}}$; 2) $-\frac{2+\sin x}{(1+2\sin x)^2}$)

5.25. 1) $y=x^2e^x$. 2) $y=x\lg x$.

(Ж. 1) $x(2+x)e^x$; 2) $y=\frac{x\ln x+1}{x\ln 10}$)

5.26. $x_1=0$ және $x_2=1$ нүктелерінде $y^2=x^3$ қисықтың жанама теңдеуін жазу керек.

(Ж. $y=0,$ $y=\pm\frac{1}{2}(3x-1)$)

5.27. $y=x^2$ және $y^2=x$ параболалары қандай бұрыш жасай қиылысады ?

(Ж. $\alpha_1=\frac{\pi}{2},$ $\alpha_2=arctg\frac{3}{4}$)

5.28. $y=\sqrt[3]{x^2}$ функциясы $x=0$ нүктесінде ақырлы туындыға ие болмайтынын көрсету керек.

cos 3x' = -sin 3x .

АЛТЫНШЫ ПРАКТИКАЛЫҚ САБАҚ

КҮРДЕЛІ ФУНКЦИЯНЫҢ ТУЫНДЫСЫ. ФУНКЦИЯНЫҢ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ. ЖУЫҚТАП ЕСЕПТЕУ

Функцияның туындысын тап:

6.1. 1) $y = \sin 6x$; 2) $y = \cos(a - bx)$

($Ж.$ 1) $6\cos 6x$; 2) $b\sin(a - bx)$)

6.2. 1) $y = (1 - 5x)^4$, 2) $y = \sqrt[3]{(4 + 3x)^2}$

($Ж.$ 1) $-20(1 - 5x)^3$; 2) $2/3\sqrt{4 + 3x}$)

6.3. 1) $y = \dfrac{1}{(1 - x^2)^5}$, 2) $y = \sqrt{\cos 4x}$

($Ж.$ 1) $\dfrac{10x}{(1 - x^2)^6}$; 2) $-2tg4x\sqrt{\cos 4x}$)

6.4. 1) $y = \sin^2 x$, 2) $y = \cos^2 x$

($Ж.$ 1) $\sin 2x$; 2) $-\sin 2x$)

6.5. 1) $y = \sqrt[4]{1 + \cos^2 x}$, 2) $y = \sin\sqrt{x}$.

($Ж.$ 1) $\dfrac{-\sin 2x}{4\sqrt[4]{(1 + \cos^2 x)^3}}$; 2) $\dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$)

6.6. 1) $y = x\sqrt{x^2 - 1}$, 2) $y = \dfrac{\sqrt{2x - 1}}{x}$

($Ж.$ 1) $\dfrac{2x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$; 2) $\dfrac{1 - x}{x^2\sqrt{2x - 1}}$)

6.7. 1) $y = \ln(x^2 + 2x)$, 2) $\ln tg\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)$

($Ж.$ 1) $\dfrac{2(x + 1)}{x(x + 2)}$; 2) $\dfrac{1}{\cos x}$)

6.8. 1) $y=\sqrt{x}\cdot e^{\sqrt{x}}$, 2) $y=e^{x/a}\cdot\cos\frac{x}{a}$

(*Ж.* 1) $\frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$; 2) $\frac{1}{a}e^{x/a}\left(\cos\frac{x}{a}-\sin\frac{x}{a}\right)$)

6.9. 1) $y=\arcsin\sqrt{1-4x}$, 2) $y=\arccos(1-2x)$,

(*Ж.* 1) $-\frac{1}{\sqrt{x-4x^2}}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$)

6.10. Алдын-ала логарифмдеу арқылы функцияның туындысын тап: 1) $y=x^x$, 2) $y=(\sin x)^x$

(*Ж.* 1)$x^x(\ln x+1)$; 2)$(\sin x)^x(\sin x+xctgx)$)

Функцияның дифференциалын тап:

6.11. 1) $y=x^3-3x^2+3x$ 2) $r=2\varphi-\sin 2\varphi$

(*Ж.* 1)$dy=3(x-1)^2dx$, 2)$dr=4\sin^2\varphi du$)

6.12. 1) $d(\sin^2 t)$, 2) $d(1-\cos u)$

(*Ж.* 1) $\sin 2tdt$, 2) $\sin udu$)

6.13. 1) $d\left(\frac{a}{x}+arctg\frac{x}{a}\right)$, 2) $d\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)$

(*Ж.* 1) $-\frac{a^3dx}{x^2(a^2+x^2)}$; 2) $-\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$)

6.14. $y=5x+x^2$ функциясының $x=2$ және $\Delta x=0{,}001$ болғандағы dy дифференциалымен Δy өсімшесін табу керек.

(*Ж.* $\Delta y=0{,}009001$, $dy=0{,}009$)

6.15. Егер квадраттың ауданы 9 м^2-тан 9,1 м^2-қа дейін өсетін болса, онда оның қабырғасы жуықтап қаншалықты өзгереді ? (*Ж.* 0,016 м)

6.16. x_0 нүктесінде функцияның дифференциалын есепте:

а) $y = e^x$, $x_0 = 0$, $dx = 0{,}04$,

б) $y = \ln\sqrt{\sin 2x}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{8}$, $dx = 0{,}03$

6.17. Қант ерітіндісінде ашытқы массасы әр сағат сайын 3 %-ке көбейіп отырады. Егер бастапқы масса 1г болса, онда t уақыттан кейін массаның өлшемі $\omega(t) = 1{,}03^t$ тең болады. Ашытқының а) 10 мин, б) 20 мин кейінгі массасының жуық мәнін табу керек.

6.18. Дифференциалды пайдалана отырып, $x = x_0 + \Delta x$ нүктесінде функцияның жуық мәнін есептеу керек.

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2\sqrt{x}, \quad x = 4{,}02.$$

6.19. Жуық формуланы қорытып шығарып (x-пен салыстырғанда аз болатын $|\Delta x|$ үшін) $\sqrt{x+\Delta x} \approx \sqrt{x} + \dfrac{\Delta x}{2\sqrt{x}}$ осы формуланың көмегімен $\sqrt{5}$; $\sqrt{17}$; $\sqrt{70}$; $\sqrt{640}$ үшін жуық мәнін табу керек.

Функцияның туындысын тап:

6.20. 1) $y = \sqrt{4x + \sin 4x}$, 2) $y = x^2\sqrt{1 - x^2}$

$$\left(Ж.\quad 1)\ \frac{4\cos^2 2x}{\sqrt{4x + \sin 4x}};\quad 2)\ \frac{x(2 - 3x^2)}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$$

6.21. 1) $y = tgx + \dfrac{2}{3}tg^2 x + \dfrac{1}{5}tg^5 x$, 2) $y = \sin^2 x^3$

$$\left(Ж.\quad 1)\ \sec^6 x;\quad 2)\ 3x^2 \sin 2x^3\right)$$

$2x\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{2\sqrt{...}}$

6.22. 1) $\ln\dfrac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x}$; 2) $\ln\left(\sqrt{x} - \sqrt{x - 1}\right)$

$$\left(Ж.\quad 1)\ -\frac{1}{x\sqrt{1 + x^2}};\quad 2)\ -\frac{1}{2\sqrt{x^2 - x}}\right)$$

6.23*. 1) $y = e^x\sqrt{1 - e^{2x}} + \arcsin e^x$,

2) $y = x\arccos x - \sqrt{1-x^2}$

(*Ж.* 1)$2e^x\sqrt{1-e^{2x}}$; 2)$\arccos x$)

6.24**. 1) $y = \ln\left(x\sin x\sqrt{1-x^2}\right)$ 2) $y = \dfrac{xe^x arctgx}{\ln^5 x}$

(*Ж.* 1)$\dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{1-x^2} + ctgx$; 2)$\dfrac{e^x arctgx}{\ln^5 x}\left[1 + x + \dfrac{x}{\left(1+x^2\right)arctgx} - \dfrac{5}{\ln x}\right]$)

Функцияның дифференциалын тап:

6.25. 1) $y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$; 2) $s = \sqrt{1-t^2}$

(*Ж.* 1)$\dfrac{(1-x)dx}{x^3}$; 2)$\dfrac{-tdt}{\sqrt{1-t^2}}$)

6.26. 1) $d\left(\sqrt{x}+1\right)$; 2) $d\left(bt - e^{-bt}\right)$

(*Ж.* 1)$\dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$; 2)$b\left(1+e^{-bt}\right)dt$)

6.27. $y = x^2$; x 2- ден 1,98 - ге дейін өзгергенде Δy және dy- ті есептеу керек. (*Ж.* $\Delta y = -0{,}3276$, $dy = -0{,}24$)

6.28. Маятниктің тербеліс периоды $T = 2\pi\sqrt{l/980c}$ тең, мұндағы l- сантиметр бойынша маятниктің ұзындығы. Тербеліс периоды 0,1 с -қа кему үшін, маятниктің ұзындығын қалай l = 20см өзгертуге болады ?

(*Ж.* $dl = -14/\pi \approx 4{,}46$ см)

6.29. Берілген dx және x_0 нүктесінде функцияның дифференциалын есепте:

1) $y = \log_2 x$, $x_0 = 8$, $dx = -0{,}02$;

2) $y = \sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$, $x_0 = 0$, $dx = 0{,}015$

6.30*. Радиусы r-ге тең шар тәрізді клетка, формасын өзгертпей көлемі үзіліссіз өседі. Көлем $\frac{4}{3}\pi r^3$ -қа тең. Клеткалардың радиусы $2{,}5\cdot10^{-3}$-тен $2{,}6\cdot10^{-3}$ см-ге дейін өсетін болса, оның көлемі қалай өзгереді ?

(*Ж.* $7{,}85\cdot10^{-9}$)

6.31*. Өрнектің жуық мәнін есепте: $\sqrt[5]{31}$.

6.32**. $y=e^{-|x|}$ функциясының $x=0$ болғандағы үзіліссіздігін және дифференциалдануын зерттеу керек.

ЖЕТІНШІ ПРАКТИКАЛЫҚ САБАҚ

ЖОҒАРЫ РЕТТІ ТУЫНДЫЛАР. РОЛЛЬ, ЛАГРАНЖ ТЕОРЕМАЛАРЫ. ЛОПИТАЛЬ ЕРЕЖЕСІ. АСИМПТОТА

7.1. Функцияның екінші ретті туындысын тап.

1) $y=\sin^2 x$; 2) $y=tgx$; 3) $y=\sqrt{1+x^2}$

(Ж. 1) $2\cos 2x$, 2) $2tgx\sec^2 x$, 3) $\dfrac{1}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$)

7.2. Функцияның n - ретті туындысын тап.

1) $y=e^{-x/a}$; 2) $y=\ln x$; 3) $y=\sqrt{x}$

(Ж. 1) $\left(-\dfrac{1}{a}\right)^n e^{-\frac{x}{a}}$; 2) $\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$; 3) $\dfrac{(-1)^{n-1}1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2^n\sqrt{x^{2n-1}}}$)

7.3. Теңдіктен y' тап.

1) $x^2+y^2=a^2$; 2) $y^2=2px$; 3) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

(Ж. 1) $-\dfrac{x}{y}$; 2) $\dfrac{p}{y}$; 3) $\dfrac{b^2x}{a^2y}$)

7.4. Теңдіктен y'' тап.

1) $x^2+y^2=a^2$; 2) $ax+by-xy=c$; 3) $x^m y^n=1$

(Ж. 1) $-\dfrac{a^2}{y^3}$; 2) $\dfrac{2(y-a)}{(x-b)^2}$; 3) $\dfrac{m(m+n)y}{n^2x^2}$)

7.5. $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$ функциясынан $[-1;1]$ аралығында Ролль теоремасын қолдануға бола ма? График түрінде түсіндір.

7.6. $f(x)=x^2-4x+3$ функциясының түбірлері арасында оның туындысының түбірі бар екенін тексер.

7.7. $f(x)=x^2$ функциясы үшін $[a,b]$ аралығында Лагранж формуласын жазып, C-ны тап. Графигін түсіндір.

Лопиталь ережесін қолданып шектерді есепте.

7.8. а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi-2arctgx}{e^{3/x}-1}$

(Ж. а) $3/e$; б) $3/5$)

7.9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$

(Ж. а) 0; б) 1/2)

7.10. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\ln x\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(xctg\pi x\right)$

(Ж. а) 0; б) $1/\pi$)

7.11. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

(Ж. а) 1/2; б) -1/2)

7.12. а) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$; б) $\lim\limits_{x\to \pi/2}(\pi-2x)^{\cos x}$

(Ж. а) 1; б) 1)

7.13. а) $\lim\limits_{x\to \pi/2}(tgx)^{2\cos x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+2^x\right)^{\frac{1}{x}}$

(Ж. а) 1; б) 2)

7.14. а) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\ln x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^2}$

(Ж. а) 1; б) e^{-6})

Функция графигінің асимптоталарын тап.

7.15. а) $y=\frac{3-4x}{2+5x}$; б) $y=2+\frac{12}{x^2-4}$

(Ж. а) $x=-\frac{2}{5}; y=-\frac{4}{5}$; б) $x=-2; x=2; y=0$)

7.16. а) $y=(2+x)e^{-x}$; б) $y=\frac{x}{\ln x}$

(Ж. а) $y=0$; б) $x=1$)

7.17. а) $y=x+2arctgx$; б) $y=\frac{x^3}{x^2-4}$

(Ж. а) $y=x+\pi; y=x-\pi$; б) $x=-2; x=2; y=x$)

7.18. Функцияның n -ші ретті туындысын тап.

1) x^n; 2*) $\sin x$; 3**) $\cos^2 x$

(*Ж.* 1) $n!$; 2) $\sin\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$; 3) $2^{n-1}\cos\left(2x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$)

7.19. Теңдіктен y'' табу керек.

1) $x^2-y^2=a^2$, 2) $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$, 3*) $arctgy=x+y$

(*Ж.* 1) $-\dfrac{a^2}{y^3}$; 2) $-\dfrac{R^2}{(y-\beta)^3}$; 3) $\dfrac{-2(1+y^2)}{y^5}$)

7.20. $f(x)=x-x^3$ функциясы $-1\le x\le 0$ және $0\le x\le 1$ аралықтарында Ролль теоремасының шартын қанағаттандыратынын көрсету керек. C-ның сәйкес мәнін тап.

7.21*. $f(x)=x(x+1)(x+2)(x+3)$ функциясы берілсін. $f'(x)=0$ теңдеуінің үш нақты түбірі болатынын көрсету керек.

7.22*. $A(1;1)$ және $B(3;9)$ нүктелері арасындағы $y=x^2$ парабола графигі бойынан, AB хордасына параллель жанама жүргізуге болатын нүктені тап. (*Ж.* (2;4))

Лопиталь ережесін қолданып шекті есепте.

7.23. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}\,(n>0)$

(*Ж.* а) 2; б) 0)

7.24*. а) $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x\cdot ctgx)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^n}-ctg^2x\right)$

(*Ж.* а) 1; б) 2/3)

7.25**. а) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}x^{3/(4+\ln x)}$ (*Ж.* а) $1/e$; б) e^3)

7.26. Функция графигінің асимптотасын тап.

а) $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$; б*) $y=-xarctgx$

СЕГІЗІНШІ ПРАКТИКАЛЫҚ САБАҚ

ФУНКЦИЯНЫ ЗЕРТТЕУ

8.1. Жалпы ауданы S болатын бір қабатты үй салу керек. Үйді қандай етіп салғанда сыртқы қабырғаларына кететін материал мөлшері ең аз болады ?

(*Ж.* Үйді квадрат қылып салу керек.)

8.2. Жалпы ауданы S болатын бір қабатты үй салу керек. Егер алдыңғы бетінің (фасад) әр метрін өңдеу басқа қабырғаларының әр метрін теңдеуге қарағанда m есе қымбат (көркемдік өңдеулер нәтижесінде) тұратыны белгілі болса, ең аз шығын шығатындай етіп үй салуды ұйымдастыру керек.

(*Ж.* Алдыңғы есептің жауабымен салыстырғанда үйдің алдыңғы беті $\sqrt{(m+1)/2}$ есе қысқа болуы керек.)

8.3. Түбі квадрат, көлемі 32 м^3 болатын ашық бассейннің түбі мен қабырғаларын өңдеуге ең аз материал кететіндей етіп бассейн өлшемін анықтау керек.

(*Ж.* 4м × 4м × 2м)

8.4. A заводына жақын жерден B қаласына қарай темір жол жүргізілген. Егер 1 тонна-километр жүкті тас жолмен тасымалдау сол жүкті темір жолмен тасымалдаумен салыстырғанда m есе қымбат екені белгілі болса, A заводынан темір жолға қандай бұрыш жасай тас жол жүргізу керек.

(*Ж.* $ctg\alpha = \sqrt{m^2-1}$)

Функция экстремумын тауып, графигін сал.

8.5. $y = x^2 + 4x + 5$ 8.6. $y = 4x - \dfrac{x^3}{3}$

8.7. $y = \sqrt[3]{x^2} - 1$

8.8. $y = 3x - x^3$ функциясының $[-2;3]$ аралығындағы ең үлкен және ең кіші мәнін табу керек.

(*Ж.* $y_{\text{ең үлкен}} = 2$; $y_{\text{ең кіші}} = -18$)

Функцияны зерттеп, графигін салу керек.

8.9. $y=2+\dfrac{12}{x^2-4}$; 8.10. $y^2=x^3$.

8.11. $y=(2+x)e^{-x}$; 8.12. $y=\dfrac{x}{\ln x}$

8.13. $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$; 8.14. $y=(x-1)\sqrt{x}$

(Ж 8.9. Асимптоталары $x=-2, x=2, y=0, y_{\max}(0)=-1$.

8.10. Ox өсіне қарағанда симметриялы. $x\geq 0$ жарты жазықтықта орналасқан. Oy өсімен K әрпін құрайды. 8.11. Асимптотасы $y=0$, $y_{\max}(-1)=2, (-\infty;-1)$ аралығында өседі, $(-1;\infty)$ аралығында кемиді, $(-\infty;0)$ аралығында дөңес, $(0;+\infty)$ аралығында ойыс, $(0;2)$ иілу нүктесі. 8.12. Асимптотасы $x=1, y_{\min}(e)=e, (e,\infty)$ аралығында кемиді. $(0;1)$ аралығында дөңес, $(1;+\infty)$ аралығында ойыс, иілу нүктелері жоқ.

8.13. Асимптоталары $x=-2$, $x=2$, $y=x$, $y_{\min}(2\sqrt{3})=3\sqrt{3}$, $y_{\max}(-2\sqrt{3})=-3\sqrt{3}$; $(0,0)$ - иілу нүктесі. 8.14. $y_{\min}(1/3)=-2/(3\sqrt{3})$).

8.15. Периметрі p болатын бір қабатты үй салу керек. Үйді қандай етіп салғанда оның ауданы ең үлкен болады ?

(*Ж.* Үйді квадрат қылып салу керек)

8.16*. Жол бойында орналасқан A пунктінен шыққан турист жолдан 8 км қашықтықта орналасқан B пунктіне бару керек. Егер турист жолмен 5км/сағ, ал жолсыз жерде 3км/сағ жылдамдықпен жүретіні белгілі болса, ең аз уақытта B пунктіне жету үшін ол жолдың қай жерінде бұрылуы керек болады ?

(*Ж.* A пунктінен 9км қашықтықта.)

8.17. $x=3,\ x=1,\ x=-1,\ x=0{,}5$ нүктелері берілген. $y=x^3-3x^2$ функциясы осы нүктелердің қайсысында өседі ? қайсысында кемиді?

8.18. Егер $0\le x\le 2\pi$ болса, $y=x-2\sin x$ функциясының өсу және кему аралықтарын тап.

8.19. Функция экстремумдарын табу керек.

а) $y=x+\sqrt{3-x}$; б) $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$

$\left(Ж.\right.$ а) $y_{\max}\left(\frac{11}{4}\right)=\frac{13}{4}$; б) $y_{\max}(1)=\frac{1}{\sqrt{e}},y_{\min}(-1)=-\frac{1}{\sqrt{e}}$ $\left.\right)$

8.20. $y=x^4-2x^2+3$ функциясының $[-3;2]$ кесіндідегі ең үлкен және ең кіші мәнін анықта.

(Ж. $y_{\text{ең үлкен}}=66$; $y_{\text{ең кіші}}=2$)

8.21. $y=xe^x$ функция графигінің ойыс және дөңес болатын аралықтарын тап.

(Ж. $(-\infty;-2)$ аралығында дөңес, $(-2;+\infty)$ аралығында ойыс.)

8.22. $y=(x-4)^5+4x+4$ қисығының иілу нүктесін табу керек.

(Ж. (4; 20))

Функцияны зерттеп графигін сал.

8.23. $y=\ln(x+2)$; 8.24*. $y^2=(x+3)^3$

8.25**. $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$; 8.26**. $y^2=xe^{-x}$

(Ж. 8.23. Асимптотасы $x=-2$, өспелі, дөңес. 8.24*. Графигі 8.10 есептегідей, тек солға қарай үш бірлікке жылжыған. 8.25**. $y_{\min}(0)=a$, ойыс. 8.26**. Асимптотасы $y=0$, $x=1$ нүктесі экстремум $y_э=\pm\frac{1}{e}\approx\pm0{,}3$)

ТОҒЫЗЫНШЫ ПРАКТИКАЛЫҚ САБАҚ

АНЫҚТАЛМАҒАН ИНТЕГРАЛ. АЙНЫМАЛЫНЫ АУЫСТЫРУ ЖӘНЕ БӨЛІКТЕП ИНТЕГРАЛДАУ

Интегралды есепте:

9.1. а) $\int\left(x^2+2x+\frac{1}{x}\right)dx$; б) $\int\frac{10x^8+3}{x^4}dx$

(*Ж.* а) $\frac{x^3}{3}+x^2+\ln|x|+C$; б) $2x^5-\frac{1}{x^3}+C$)

9.2. а) $\int\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$; б) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx$

(*Ж.* а) $x\left(\frac{2}{3}\sqrt{x}+\frac{3}{4}\sqrt[3]{x}\right)+C$; б) $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+C$)

9.3. а) $\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{x^2}\right)dx$; б) $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}dx$

(*Ж.* а) $e^x+\frac{1}{x}+C$; б) $-ctgx-tgx+C$)

9.4. а) $\int\cos 3x dx$; б) $\int e^{-3x}dx$

(*Ж.* а) $\frac{1}{3}\sin 3x+C$; б) $-\frac{1}{3}e^{-3x}+C$)

9.5. а) $\int\sqrt{4x-1}dx$; б) $\int(3-2x)^4dx$

(*Ж.* а) $\frac{1}{6}(4x-1)^{3/2}+C$; б) $-\frac{(3-2x)^5}{10}+C$)

9.6. а) $\int\frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$; б) $\int\sin(a-bx)dx$

(*Ж.* а) $-\sqrt{3-2x}+C$; б) $\frac{1}{b}\cos(a-bx)+C$)

9.7. а) $\int\frac{2x-5}{x^2-5x+7}dx$; б) $\int\frac{xdx}{x^2+1}$

(*Ж.* а) $\ln\left(x^2-5x+7\right)+C$; б) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C$)

9.8. а) $\int tgxdx$; б) $\int\frac{\sin xdx}{1+3\cos x}$

(*Ж.* а) $-\ln|\cos x|+C$; б) $-\frac{1}{3}\ln|1+3\cos x|+C$)

9.9. а) $\int\sin^2 x\cos xdx$; б) $\int e^{\cos x}\sin xdx$

(*Ж.* а) $\frac{\sin^3 x}{3}+C$; б) $-e^{\cos x}+C$)

9.10. а) $\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int\frac{\sqrt{1+\ln x}dx}{x}$

(*Ж.* а) $2e^{\sqrt{x}}+C$; б) $2\sqrt{(1+\ln x)^3/3}+C$)

9.11. а) $\int\frac{dx}{x^2-25}$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+5}}$

(*Ж.* а) $\frac{1}{10}\ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right|+C$; б) $\ln\left|x+\sqrt{x^2+5}\right|+C$)

9.12. а) $\int\frac{xdx}{\sqrt{3-x^4}}$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$

(*Ж.* а) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{\sqrt{3}}+C$; б) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{\sqrt{3}}+C$)

9.13. а) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$; б) $\int\frac{dx}{x^2+3x+3}$

(*Ж.* а) $\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right)+C$; б) $\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+3}{\sqrt{3}}+C$)

9.14. а) $\int\ln xdx$; б) $\int x\ln(x-1)dx$

(*Ж.* а) $x\ln|x|-x+C$; б) $\frac{x^2}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|\right)+C$)

9.15. а) $\int xe^{2x}dx$; б) $\int e^x \sin x dx$

(Ж. а) $\frac{1}{2}e^{2x}\left(x-\frac{1}{2}\right)+C$; б) $\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$)

9.16. а) $\int \frac{\left(x^2-1\right)^2}{x^3}dx$; б) $\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)dx$

(Ж. а) $\frac{x^4-1}{2x^2}-2\ln|x|+C$; б) $3\sqrt[3]{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}+C$)

9.17. а) $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^3}}dx$; б) $\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)dx$

(Ж. а) $\frac{2(x+2)}{\sqrt{x}}+C$; б) $\ln|x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+C$)

9.18. а) $\int\left(e^x+e^{-x}\right)^2dx$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-4x}}$

(Ж. а) $2x+\frac{1}{2}\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)+C$; б) $-\frac{1}{2}\sqrt{1-4x}+C$)

9.19. а) $\int\sqrt[3]{1+3x}dx$; б) $\int\sqrt[6]{1-2x^3}\,x^2dx$

(Ж. а) $\frac{1}{4}(1+3x)^{4/3}+C$; б) $-\frac{1}{7}\left(1-2x^3\right)^{7/6}+C$)

9.20*. а) $\int\frac{1+\sin 2x}{\sin^2 x}dx$; б) $\int\frac{dx}{(a-bx)^3}$

(Ж. а) $2\ln|\sin x|-ctgx+C$; б) $\frac{1}{2b(a-bx)^2}+C$)

9.21. а) $\int\left(\frac{3}{x^2+3}+\frac{6}{x^2-3}\right)dx$; б) $\int\frac{x^2dx}{x^2-2}$

(Ж. а) $\sqrt{3}\left(arctg\frac{x}{\sqrt{3}}+\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|\right)+C$; б) $x+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+C$)

9.22. а) $\int \frac{dx}{x^2+4x+29}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$

(*Ж.* а) $0{,}2arctg\frac{x+2}{5}+C$; б) $\arcsin\frac{x+2}{3}+C$)

9.23. а) $\int \sqrt{x}\ln x dx$; б) $\int x^2 e^{-\frac{x}{2}}dx$

(*Ж.* а) $\frac{2}{5}\sqrt{x^3}\left(\ln|x|-\frac{2}{3}\right)+C$; б) $-2e^{-x/2}\left(x^2+4x+8\right)+C$)

9.24**. а) $\int \frac{\arcsin\frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}}dx$; б) $\int \frac{x\cos x dx}{\sin^3 x}$

(*Ж.* а) $4\sqrt{2+x}-2\sqrt{2-x}\arcsin\frac{x}{2}+C$; б) $-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sin^2 x}+ctgx\right)+C$).

$\frac{1}{4}\ x\ (1-4x)^{-\frac{1}{2}+1})^2$

$-\frac{1}{3}+1)^3$

$\frac{2}{3}$

ОНЫНШЫ ПРАКТИКАЛЫҚ САБАҚ

КЕЙБІР ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ, РАЦИОНАЛ, ИРРАЦИОНАЛ ЖӘНЕ ТРАНСЦЕНДЕНТТІ ФУНКЦИЯЛАРДЫ ИНТЕГРАЛДАУ

Интегралды есепте:

10.1. $\int \sin^2 3x dx$; (*Ж.* $\frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\sin 6x + C$)

10.2. $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx$; (*Ж.* $\frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C$)

10.3. $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx$; (*Ж.* $\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$)

10.4. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^2 x}$; (*Ж.* $\frac{1}{\cos x} + \cos x + C$)

10.5. $\int \frac{dx}{\sin 2x}$; (*Ж.* $\frac{1}{2}\ln|tgx| + C$)

10.6. $\int \sin 3x \cdot \cos x dx$; (*Ж.* $-\frac{1}{8}(\cos 4x + 2\cos 2x) + C$)

10.7. $\int \frac{x^3}{x-2}dx$; (*Ж.* $\frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + 8\ln|x-2| + C$)

10.8. $\int \frac{x^4}{x^2 + a^2}dx$; (*Ж.* $\frac{x^3}{3} - a^2 x + a^3 arctg\frac{x}{a} + C$)

10.9. $\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)}dx$; (*Ж.* $\ln\frac{C(x-2)^2}{x-3}$)

10.10. $\int \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^3 - 2x^2 + x}dx$; (*Ж.* $\ln Cx(x-1) + \frac{2}{x-1}$)

10.11. $\int \frac{2x^2 + x + 4}{x^3 + x^2 + 4x + 4}dx$; (*Ж.* $\ln|x+1|\sqrt{x^2+4} + C$)

10.12. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$; (Ж. $\frac{x+2}{5}\sqrt[3]{(3x+1)^2}+C$)

10.13. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$ (Ж. $6\left[\frac{\sqrt{x}}{3}-\frac{\sqrt[3]{x}}{2}+\sqrt[6]{x}-\ln\left(1+\sqrt[6]{x}\right)\right]+C$)

10.14. $\int \sqrt{3-x^2}dx$; (Ж. $\frac{1}{2}\left[x\sqrt{3-x^2}+3\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}\right]+C$)

10.15. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}$; (Ж. $\frac{x}{4\sqrt{4+x^2}}+C$)

10.16. $\int \frac{e^{2x}-2e^x}{e^{2x}+1}dx$; (Ж. $\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right)-2arctg\left(e^x\right)+C$)

10.17. $\int tg^4 x dx$; (Ж. $\frac{1}{3}tg^3 x-tgx+x+C$)

10.18. $\int \frac{dx}{3\sin x+4\cos x}$; (Ж. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{2tg\frac{x}{2}+1}{tg\frac{x}{2}-2}\right|+C$)

10.19. $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$; (Ж. $\frac{1}{2}arctg\left(\frac{tgx}{2}\right)+C$)

10.20. $\int (1+3\cos 2x)^2 dx$; (Ж. $\frac{11x}{2}+3\sin 2x+\frac{9}{8}\sin 4x+C$)

10.21. $\int \cos^2 x dx$; (Ж. $\sin x-\frac{2\sin^3 x}{3}+\frac{\sin^5 x}{5}+C$)

10.22. $\int \sin 3x\sin x dx$; (Ж. $\frac{1}{8}(2\sin 2x-\sin 4x+C)$)

10.23. $\int \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos x dx$; (Ж. $-\frac{1}{4}\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{4}x+C$)

10.24. $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}dx$; (*Ж.* $\ln\frac{C(x-2)^3}{x-1}$)

10.25. $\int \frac{5x-14}{x^3-x^2-4x+4}dx$; (*Ж.* $\ln\frac{C(x-1)^3}{(x+2)^2(x-2)}$)

10.26. $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}dx$; (*Ж.* $\frac{(x-2)\sqrt{2x-1}}{3}+C$)

10.27**. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$; (*Ж.* $\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C$)

10.28. $\int \frac{e^{2x}dx}{e^x-1}$; (*Ж.* $e^x+\ln\left|e^x-1\right|+C$)

10.29. $\int \frac{dx}{3+\cos x}$; (*Ж.* $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\frac{tg\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}\right)+C$)

10.30*. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$; (*Ж.* $\frac{tg^3x}{3}+tgx+C$)

10.31**. $\int \frac{1+tgx}{\sin 2x}dx$; (*Ж.* $\frac{1}{2}\left(tgx+\ln\left|tgx\right|\right)+C$)

ОН БІРІНШІ ПРАКТИКАЛЫҚ САБАҚ

АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛ. НЬЮТОН - ЛЕЙБНИЦ ФОРМУЛАСЫ. ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ МАҒЫНАСЫ. ЖОҒАРҒЫ ШЕГІ АЙНЫМАЛЫ БОЛЫП КЕЛЕТІН ИНТЕГРАЛ

Интегралды есепте:

11.1. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$; 11.2. $\int\limits_0^1 xe^{-x}dx$; 11.3. $\int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$

(*Ж.* 11.1. $1-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 11.2. $\frac{e-2}{e}$; 11.3. $\frac{1}{3}$)

11.4. $\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx$; (*Ж.* $2\left(\frac{2\pi}{3}-\ln tg\frac{5\pi}{12}\right)$)

11.5. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1+x^2}}dx$; (*Ж.* 0)

Келесі сызықтармен шектелген ауданды есепте:

11.6. $y=4-x^2, y=0.$ (*Ж.* $\frac{32}{3}$)

11.7. $y=2-x^2, y^3=x^2.$ (*Ж.* $2\frac{2}{15}$)

11.8. $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ циклойданың бір аркасымен және Ox осімен шектелген. (*Ж.* $3\pi a^2$)

Келесі сызықтармен шектелген денені Ox осінің бойымен айналдырғанда пайда болған дененің көлемін тап.

11.9. $y^2=2px, x=h.$ (*Ж.* πph^2)

11.10. $xy=4. x=1, x=4, y=0.$ (*Ж.* 12π)

Қисық доғаның ұзындығын анықта.

11.11. $y^2=x^3$ -тің $x=4/3$ түзуімен кесілген. (*Ж.* 112/27)

11.12. $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ циклойданың бір аркасы. (*Ж.* $8a$)

Интегралды есепте.

11.13. $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$; (*Ж.* 1) 11.14. $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}$; (*Ж.* жинақталмайды)

11.15. $\int_1^{\infty}e^{-x}dx$; (*Ж.*1) 11.16. $\int_1^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$; (*Ж.* $\pi/4$)

11.17. $\int_0^{+\infty}\cos x dx$; (*Ж.* жинақталмайды)

Интегралды есепте.

11.18. $\int_0^1\frac{xdx}{1+x^4}$; 11.19. $\int_1^{e^{\pi/2}}\cos\ln x dx$; 11.20*. $\int_0^1 e^{x+e^x}dx$

(*Ж.* 11.18. $\pi/2$, 11.19. $e^{-\sqrt{e}}$, 11.20*. e^e-e)

11.21*. $\int_0^1\frac{x^2\sin 2x}{x^2+1}$; (*Ж.* 0) 11.22. $\int_{-1}^1 x arctgx dx$; (*Ж.* $\frac{\pi}{2}-1$)

Келесі сызықтармен шектелген ауданды есепте.

11.23. $y=x^3,\ \ y=8,\ \ x=0$; . (*Ж.* 12)

11.24*. $y^2=2px\ ,x^2=2py$; (*Ж.* $\frac{4}{3}p^2$)

11.25**. Астроида $x=a\cos^3 t,\ \ y=a\sin^3 t$. (*Ж.* $\frac{3\pi a^2}{8}$)

Келесі сызықтармен шектелген фигураны Ox өсінің бойымен айналдырғанда пайда болған дененің көлемін тап:

11.26. $y=\sin x$ (бір жарты доғасының) , $y=0$. (*Ж.* $\frac{\pi^2}{6}$)

11.27*. $y^2=x,x^2=y$. (*Ж.* $0{,}3\pi$)

Қисық доғаның ұзындығын анықта:

11.28. $y=\ln(\sin x)$ $x=\dfrac{\pi}{3}$ -тен $x=\dfrac{2\pi}{3}$ -ке дейін. (*Ж.* $\ln 3$)

11.29**. $y=1-\ln(\cos x)$ $x=0$ - ден $x=\dfrac{\pi}{6}$ - ге дейін. (*Ж.* $\dfrac{1}{2}\ln 3$)

Интегралды есепте.

11.30. $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$; (*Ж.* жинақталмайды)

11.31. $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+x}$; (*Ж.* $\ln 2$)

ОН ЕКІНШІ ПРАКТИКАЛЫҚ САБАҚ

АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛДЫ ЖУЫҚТАП ЕСЕПТЕУ. АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛДЫҢ ЭКОНОМИКАДАҒЫ ҚОЛДАНЫЛУЫ

12.1. $\int_a^b f(x)dx \approx h\left[\frac{y_0+y_n}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right]$ (1), мұнда $h=\frac{b-a}{n}$

трапеция формуласы бойынша $\ln 2=\int_1^2 \frac{dx}{x}$ -ті есепте және қателікті $\varepsilon(h)\le \frac{(b-a)h^2}{12}|y''|_{\max}$ (2) формуласы бойынша бағала.

12.2. $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[y_0+y_{2n}+4\sum_{i=1}^{n} y_{2i-1}+2\sum_{i=1}^{n-1} y_{2i}\right]$ (3),

мұнда $h=(b-a)/2n$, Симпсон формуласы бойынша $\int_1^5 x^3dx$, $\int_0^2 x^4dx$ интегралдарын есепте және қателікті $\varepsilon(h)\le \frac{(b-a)h^4}{180}|y^4|_{\max}$ (4) формуласымен бағала.

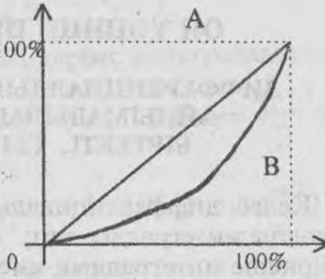
12.3. $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0+4y_1+y_2\right)$ (5) , мұнда $h=\frac{b-a}{2}$

Симпсон формуласын қолданып $\pi=6\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ интегралын жуықтап есепте.

12.4. Егер Кобба- Дугольс функциясы $g(t)=(1+t)e^{3t}$ түрде болса, онда 4 жылда өндірілген өнімнің көлемін тап.

(*Ж.* 2,5310 ш.б)

12.5. Жүргізілген зерттеу бойынша бір мемлекетте кірісті бөлуде Лоренц қисығы OBA (1 - сурет) $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ теңдеуімен өрнектелуі мүмкін, мұндағы x - жергілікті тұрғындардың бөлігі. Джани коэффициентін есепте. (*Ж.* $K = 0,57$)



1-сурет

12.6. Егер бастапқы ақша құжатын жұмсау 10 млрд. сомды құраса, және жыл сайын бұл 1 млрд. сомға өсіп отыратындығын ескеріп, 3 жыл көлеміндегі 8 % - тік дисканттық кірісті анықта.

(*Ж.* $K = 30,5$ млрд.сом)

12.7. $t = ax^{-b}, a = 600$ /мин/, $b = 0,5$ формуласын қолданып, $x_1 = 100$ - ден $x_2 = 121$ - ге дейінгі периодтағы бір өнімді өндіруге жұмсалған орташа уақытты тап.

12.8. $[0, \pi]$ аралығындағы $y = \sin x$ функциясының орташа мәнін анықта. (*Ж.* $2/\pi$)

12.9. $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$ интегралын (2) Симпсонның жалпы формуласы бойынша есепте $/ 2n = 10 /$ және қателікті (4) - формулада $h^4 |y^4|_{\max} \approx |\Delta^4 y|_{\max}$ деп алып бағала.

12.10. $y = \sin x$ синусоиданың бір доғасының ұзындығын (3) Симпсон формуласы бойынша $[0, \pi]$ аралығын бірдей алты бөлікке бөліп есепте. (*Ж.* $\approx 1,22\pi$)

ОН ҮШІНШІ ПРАКТИКАЛЫҚ САБАҚ

ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУ ЖАЙЛЫ ТҮСІНІК. АЙНЫМАЛЫЛАРЫ АЖЫРАТЫЛАТЫН, БІРТЕКТІ, СЫЗЫҚТЫ ТЕҢДЕУЛЕР

Келесі дифференциалдық теңдеулерде
1) жалпы интегралды тап;
2) бірнеше интегралдық қисықтарды тұрғыз.
3) $y=4, x=-2$ бастапқы шартты қанағаттандыратын интегралды тап.

13.1. $xy'-y=0.$ (*Ж.* $y=Cx,\quad y=-2x$)

13.2. $xy'+y=0.$ (*Ж.* $xy=c,\quad xy=-8$)

13.3. $yy'+x=0.$ (*Ж.* $x^2+y^2=c^2,\quad x^2+y^2=20$)

13.4. $y'=y.$ (*Ж.* $y=ce^x,\quad y=4e^{x+2}$)

Теңдеудің жалпы интегралын тап:

13.5. $x^2y'+y=0.$ (*Ж.* $y=ce^{1/x}$)

13.6. $x+xy+y'(y+xy)=0.$ (*Ж.* $x+y=\ln C(x+1)(y+1)$)

Келесі теңдеуде бастапқы шарт бойынша жалпы және дербес интегралын тап.

13.7. $2y'\sqrt{x}=y,\quad y=1,\quad x=4.$ (*Ж.* $y=ce^{\sqrt{x}}, y=e^{\sqrt{x}-1}$)

13.8. $y'=(2y+1)ctgx,\quad y=1/2,\quad x=\pi/4.$

(*Ж.* $y=(C\sin^2 x-1)/2,\quad y=2\sin^2 x-1/2$)

Теңдеуді шеш.

13.9. $yy'=2y-x.$ (*Ж.* $y-x=ce^{\frac{x}{y-x}}$)

13.10. $\dfrac{ds}{dt}=\dfrac{s}{t}-\dfrac{t}{s}.$ (*Ж.* $s^2=2t^2\ln\dfrac{c}{t}$)

13.11. $y'-\dfrac{3y}{x}=x.$ (*Ж.* $y=cx^3-x^2$)

13.12. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$. (Ж. $y = \frac{c - e^{-x^2}}{2x^2}$)

Берілген бастапқы шарт бойынша дербес интегралды тап:

13.13. $y + \sqrt{x^2 + y^2} + xy' = 0, \quad y = 0, \quad x = 1.$ (Ж. $y = \frac{x^2 - 1}{2}$)

13.14. $xy' = y\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right), \quad y = \frac{1}{\sqrt{e}}; \quad x = 1.$ (Ж. $y = xe^{-x/2}$)

Теңдеуді шеш.

13.15. $y'x^3 = 2y.$ (Ж. $y = ce^{-1/x^2}$)

13.16. $\left(x^2 + x\right)y' = 2y + 1.$ (Ж. $2y = \frac{cx^2}{1 + x} - 1$)

13.17. $\left(1 - x^2\right)y' + 1 + y^2 = 0.$ (Ж. $y = (c - x)/(1 + cx)$)

13.18. $dr + rtg\varphi d\varphi = 0. \quad r = 2, \varphi = \pi.$

(Ж. $r = c\cos\varphi, \quad r = -2\cos\varphi$)

13.19. $y' = 2\sqrt{y}\ln x, \quad y = 1, \quad x = e.$

(Ж. $\sqrt{y} = x\ln x - x + c, \quad \sqrt{y} = x\ln x - x + 1$)

13.20*. $xy + y^2 = \left(2x^2 + xy\right)y'.$ (Ж. $y^2 = cxe^{-x/y}$)

13.21*. $\left(a^2 + x^2\right)y' + xy = 1.$ (Ж. $y = \frac{\ln c\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)}{\sqrt{x^2 + a^2}}$)

13.22. $(2x + 1)y' + y = x.$ (Ж. $y = \frac{x - 1}{3} + \frac{c}{\sqrt{2x + c}}$)

13.23. $y' - ytgx = ctgx.$ (Ж. $y = 1 + \frac{\ln ctg\frac{x}{2}}{\cos x}$)

13.24**. $tds - 2sdt = t^3\ln t dt.$ (Ж. $s = t^3(\ln t - 1) + ct^2$)

13.25*. $y' + xy = xy^3$. (Ж. $y^2 = \frac{1}{1+ce^{x^2}}$)

13.26. $y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}$, $y=1$, $x=-1$ (Ж. $y = \frac{2x}{1-cx^2}$, $y = \frac{2x}{1-3x^2}$)

13.27*. $3y^2 y' + y^3 = x + 1$, $y = -1$, $x = 1$.

(Ж. $y^3 = x + Ce^{-x}$, $y^3 = x - 2e^{1-x}$)

13.28**. $(x+2y)y' = 1$. ($x + 2y = z$ алмастыруын енгіз).

(Ж. $y - \ln|x + 2y + 2| = C$)

ОН ТӨРТІНШІ ПРАКТИКАЛЫҚ САБАҚ

ЕКІ АЙНЫМАЛЫДАН ТӘУЕЛДІ ФУНКЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ. ДЕРБЕС ТУЫНДЫ, ТОЛЫҚ ДИФФЕРЕНЦИАЛ. АЙҚЫНДАЛМАҒАН ФУНКЦИЯ ТУЫНДЫСЫ

14.1. Конус көлемін оның жасаушысы мен радиусынан тәуелді функция түрінде өрнекте.

(*Ж.* $V = \frac{1}{3}\pi y^2 \sqrt{x^2 - y^2}$)

14.2. Функцияның анықталу облысын тап:

а) $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$; б) $z = \sqrt{xy}$; в) $z = \frac{4}{x^2 + y^2}$

(*Ж.* а) $x^2 + y^2 \le a^2$; б) $xy > 0$ (бірінші және үшінші квадраттар; в) $O(0;0)$ нүктесінен басқа барлық жазықтық).

Функцияның дербес туындысын тап:

14.3. $z = x^3 + 3x^2 y - y^3$. (*Ж.* $3x(x + 3y); 3(x^2 - y^2)$)

14.4. $z = \frac{y}{x}$. (*Ж.* $-\frac{y}{x^2}; \frac{1}{x}$)

14.5. $z = arctg\frac{y}{x}$. (*Ж.* $-\frac{y}{x^2 + y^2}; \frac{x}{x^2 + y^2}$)

14.6. $u = xe^{-yx}$. (*Ж.* $e^{-xy}(1 - xy), -x^2 e^{-xy}$)

14.7. Егер $z = \ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)$ болса, онда $x \cdot \frac{dz}{dx} + y \cdot \frac{dz}{dy} = \frac{1}{2}$ болатынын дәлелде.

14.8. Егер $z = \sqrt{x} \sin\frac{y}{x}$ болса, онда $x \cdot \frac{dz}{dx} + y \cdot \frac{dz}{dy} = \frac{z}{2}$ болатынын дәлелде.

14.9. Функцияның толық дифференциалын тап:

1) $z = x^2 y$; 2) $z = \frac{xy}{x - y}$; 3) $u = e^{\frac{s}{t}}$

14.10. $x=2, y=1, dx=0{,}1, dy=0{,}2$ тең болғандағы, $z=\frac{y}{x}$ функциясының толық дифференциалын есепте. (*Ж.* 0,075)

14.11 . $z=\sqrt{\sin^2 x+8e^y}$ функциясының $x=\frac{\pi}{2}\approx 1{,}571, y=0$ болғандағы мәнін ескере отырып мына өрнекті $\sqrt{\sin^2 1{,}55+8e^{0{,}015}}$ жуықтап есепте. (*Ж.* 3,02)

14.12. $z=y\ln x$. Табу керек: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

(*Ж.* $-\frac{y}{x^2};\frac{1}{x};0$)

14.13. $z=\ln(x^2-y^2)$, мұндағы $y=e^x$. $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{dz}{dx}$ табу керек. (*Ж.* $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2-y^2}$; $\frac{dz}{dx}=\frac{2(x-ye^x)}{x^2-y^2}$)

14.14. $z=\frac{1}{2}\ln\frac{u}{v}$, мұндағы $u=tg^2 x$, $v=ctg^2 x$. $\frac{dz}{dx}$ табу керек. (*Ж.* $4/\sin 2x$)

14.15. $z=x^2 y$, мұндағы $y=\cos x$. $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{dz}{dx}$ табу керек. (*Ж.* $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\cos x$, $\frac{dz}{dx}=x(2\cos x-x\sin x)$)

14.16. $\cos(x+y)+y=0$. y' табу керек.

(*Ж.* $y'=\frac{\sin(x+y)}{1-\sin(x+y)}$)

14.17. $y-\sin y=x$. y' пен y'' табу керек.

(*Ж.* $y'=\frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2\frac{y}{2}$; $y''=-\frac{1}{4}\operatorname{cosec}^4\frac{y}{2}ctg\frac{y}{2}$)

14.18. $z^3 - 3xyz = a^3$. $\frac{\partial z}{\partial x}$ және $\frac{\partial z}{\partial y}$ табу керек.

(*Ж.* $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{z^2 - xy}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{z^2 - xy}$)

14.19. $xyz = x + y + z$. dz табу керек.

(*Ж.* $dz = -\frac{1}{xy-1}\left[(yz-1)dx + (xz-1)dy\right]$

Функцияның анықталу облысын тап.

4.20. а) $u = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$; б) $z = \frac{4}{x+y}$;

в*) $u = \arcsin(x+y)$.

14.21. $u = x^2 + 2y^2 - 3xy - 4x + 2y + 5$. $\frac{\partial x}{\partial x}$; $\frac{\partial u}{\partial y}$ табу керек. (*Ж.* $2x - 3y - 4$; $4y - 3x + 2$)

14.22. $u = (x-y)(x-z)(y-z)$. $\frac{\partial u}{\partial x}$; $\frac{\partial u}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial z}$ табу керек.

(*Ж.* $(y-z)(2x-y-z)$, $(x-z)(x-2y+z)$, $(x-y)(-y+2z-x)$)

14.23. $z = \ln tg\frac{y}{x}$. dz табу керек. (*Ж.*) $dz = \frac{2(xdy - ydx)}{x^2 \sin(2y/x)}$

14.24. $z = x^y$. dz табу керек. (*Ж.* $dz = x^y\left(\frac{y}{x}dx + \ln x dy\right)$)

14.25*. $z = x^y$ функциясының $x = 1$, $y = 4$ болғандағы мәнін ескеріп мына өрнекті $1{,}02^{4{,}05}$ жуықтап есепте. (*Ж.* 1,08)

14.26. $z = \frac{y}{x}$, $x = e^t$, $y = 1 - e^{2t}$. $\frac{dz}{dt}$ табу керек.

(Ж. $\dfrac{dz}{dt} = -\left(e^{t} + e^{-t}\right)$)

14.27*. $z = \cos(x + y)$. $d^2 z$ табу керек.

(Ж. $d^2 z = -\cos(x + y)(dx + dy)^2$).

14.28. $z = \dfrac{x^2}{y}$, мұндағы $x = u - 2v$, $y = v + 2u$. $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ және $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ табу керек. (Ж. $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{2x}{y}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right)$, $\dfrac{\partial z}{\partial v} = -\dfrac{x}{y}\left(4 + \dfrac{x}{y}\right)$)

14.29**. $x^2 + y^2 + z^2 - 2zx = a^2$. $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ және $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ табу керек. (Ж. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y}{x - z}$)

14.30**. $x = z \ln\dfrac{z}{y}$. dz табу керек. (Ж. $\dfrac{dx + \frac{z}{y} dy}{1 + \ln\frac{z}{y}}$)

14.31**. $z = x + arctg\dfrac{y}{z - x}$. $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ табу керек. (Ж. 1)

ОН БЕСІНШІ ПРАКТИКАЛЫҚ САБАҚ

КӨП АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯ ЭКСТРЕМУМЫ. ШАРТТЫ ЭКСТРЕМУМ

15.1. Функция экстремумын табу керек.

а) $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$; б) $z = \frac{1}{2}xy + (47 - x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right)$

в) $z = xy^2(1 - x - y)$.

(*Ж.* а) $z_{min} = -9$, б) $z_{max} = 289$, в) $z_{max} = 1/64$)

15.2. Көлемі V болатын ашық бассейн салу керек. Бетінің ауданы ең аз болуы үшін осы бассейннің өлшемдерін қалай анықтау керек.

(*Ж.* $\sqrt[3]{2V}$; $\sqrt[3]{2V}$; $0{,}5\sqrt[3]{2V}$)

15.3. Берілген V көлемдегі үйдің алдыңғы бетінің, ұзындығының және енінің (төбесімен қоса есептегендегі) өлшемдері қандай болғанда оның төбесі мен қырларын жасауға кететін жалпы шығын ең аз болады және де алдыңғы бетінің 1м^2 -ның құны a , басқа қабырғаларынікі - b , төбесінікі - c екені белгілі.

(*Ж.* $2b\sqrt[3]{\dfrac{V}{2bc(a+b)}}$ - алдыңғы бетінің ұзындығы,

$(a+b)\sqrt[3]{\dfrac{V}{2bc(a+b)}}$ - ені, $C\sqrt[3]{\dfrac{V}{2bc(a+b)}}$ - биіктігі)

15.4. Егер x пен y өзара мына $2x + 3y - 5 = 0$ теңдеуімен байланысқан болса, $z = xy$ функциясының экстремумын табу керек.

(*Ж.* $z_{max} = 25/24$, $(5/4, 5/6)$ нүктеде)

15.5. x және y айнымалылары $x^2 + y^2 = 1$ теңдеуін қанағаттандыру керек деп алып, $z = 6 - 4x - 3y$ функциясының экстремумын табу керек.

(*Ж.* $z_{max} = 11$, $z_{min} = 1$)

15.6. Берілген $x \le 0, y \le 0, x + y \ge -3$ облысында $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ функциясының ең үлкен және ең кіші мәнін анықтау керек.

($Ж.$ $z_{\text{ең үлкен}} = 6,$ $z_{\text{ең кіші}} = -1$)

15.7. 300га жердің егін өнімділігінің сол жерге себілетін тыңайтқыштан, 1га x-қа есептегенде, тәуелділігі $3 + 4x_1 + 2x_1^2$ формуласымен, ал екінші 100га жердегі бұл тәуелділік $5 + 3x_2 - x_2^2$ формуласымен, ал үшінші 100га жердегісі $1 + 8x_3 - 3x_3^2$ формуласымен берілсін. Тыңайтқыш алуға бөлінген шектеулі 1000 теңге ақша бар және де тыңайтқыштардың сәйкес бағасы 3,4 және 2 теңге болсын делік. Осы шартты ескере отырып жалпы өнім ең жоғары болатындай етіп тыңайтқыш сатып алуды ұйымдастыру керек.

($Ж.$ $x_1 = 0{,}627,$ $x_2 = 0{,}505,$ $x_3 = 1{,}168$)

Функцияның ең үлкен және ең кіші мәнін тап.

15.8. $z = xy, x^2 + y^2 \le 1$ дөңгелегінде.

($Ж.$ $z_{\text{ең үлкен}} = 1/2,$ $z_{\text{ең кіші}} = -1/2$)

15.9. $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$, мына облыста:

$0 \le x \le \pi/2, \quad 0 \le y \le \pi/2$

($Ж.$ $z_{\text{ең үлкен}} = 3\sqrt{3}/2$, $z_{\text{ең кіші}} = 0$)

Функция экстремумын тап.

15.10. $z = xy^2(1 - x - y)$ ($Ж.$ $z_{\max} = 1/64$)

15.11. $z = x^3 + y^3 - 15xy$ ($Ж.$ $z_{\min} = -125$)

15.12. Егер x пен y айнымалылары $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ теңдеуімен байланысқан болса, $z = x^2 + y^2$ функциясының экстремумын тап.

Функцияның ең үлкен және ең кіші мәнін тап.

15.13*. $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$, мына түзулермен шектелген жабық облыста: $x = 0$, $y = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$.

($Ж.$ $z_{\text{ең үлкен}} = 16$, $z_{\text{ең кіші}} = -16/3$)

15.14*. $z = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$, мына облыста:

$$0 \le x \le 3\pi/2, \quad 0 \le y \le 3\pi/2$$

($Ж.$ $z_{\text{ең кіші}} = -3$, $x = y = \dfrac{3\pi}{2}$ болғанда,

$z_{\text{ең үлкен}} = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $x = y = \dfrac{5\pi}{6}$ болғанда)

15.15**. Аудандары S болатын барлық тік төртбұрыштардың ішінен периметрі ең үлкенін табу керек. ($Ж.$ Квадрат)

ОН АЛТЫНШЫ ПРАКТИКАЛЫҚ САБАҚ

САН ҚАТАРЛАРЫ, ЖИНАҚТЫЛЫҚ. ҚАТАРДЫҢ ЖНАҚТЫЛЫҒЫНЫҢ ҚАЖЕТТІ ШАРТТАРЫ. ҚАТАР ЖИНАҚТЫЛЫҒЫНЫҢ ЖЕТКІЛІКТІ БЕЛГІЛЕРІ (САЛЫСТЫРУ, ДАЛАМБЕР, ИНТЕГРАЛДЫҚ БЕЛГІЛЕР)

Қатардың жинақтылығының қажетті шарты орындала ма:

16.1. $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{8}{7}+\ldots$ (*Ж.* жоқ)

16.2. $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{27}+\frac{8}{81}+\ldots$ (*Ж.* иә)

Қатардың жинақталатынын интегралдық белгі бойынша зертте :

16.3. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots$ (*Ж.* жинақталмайды)

16.4. $1+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{10}}+\ldots$ (*Ж.* жинақталмайды)

16.5. $\frac{1}{2^3}+\frac{2}{3^3}+\frac{3}{4^3}+\ldots$ (*Ж.* жинақталады, өйткені $\int_1^\infty\frac{xdx}{(x+1)^3}=\frac{3}{8}$)

16.6. $\frac{1}{1+1^2}+\frac{2}{1+2^2}+\frac{3}{1+3^2}+\ldots$ (*Ж.* жинақталмайды, $\int_1^\infty\frac{xdx}{1+x^2}=\infty$)

16.7. $\frac{1}{2\ln^2 2}+\frac{1}{3\ln^2 3}+\frac{1}{4\ln^2 4}+\ldots$ (*Ж.* жинақталады)

Даламбер белгісі бойынша қатарды жинақтылыққа зертте:

16.8. $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{27}+\frac{8}{81}+\ldots$ (*Ж.* жинақталады)

16.9. $1+\frac{2}{2!}+\frac{4}{3!}+\frac{8}{4!}+\ldots$ (*Ж.* жинақталады)

16.10. $1+\frac{3}{2\cdot 3}+\frac{3^2}{2^2\cdot 5}+\frac{3^3}{2^3\cdot 7}+\ldots$ (*Ж.* жинақталмайды)

16.11. $\frac{1}{2}+\frac{3!}{2\cdot 4}+\frac{5!}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{7!}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\ldots$ (*Ж.* жинақталмайды)

Қатарды гармоникалық қатармен немесе кемімелі прогрессиямен салыстыра отырып жинақтылыққа зертте:

16.12. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots$ (*Ж.* жинақталмайды.)

16.13. $1+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5^2}+\frac{1}{4\cdot 5^3}+\ldots$ (*Ж.* жинақталады)

Қатардың қосындысын тап:

16.14. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots$ (*Ж.* 1)

Қатарды жинақтылыққа зертте:

16.15. $1+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{5\sqrt{5}}+\ldots$ (*Ж.* жинақталады)

16.16. $1+\frac{1}{101}+\frac{1}{201}+\frac{1}{301}+\ldots$ (*Ж.* жинақталмайды,

$\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{100x-99}=\infty$)

16.17. $\frac{1}{1+1^4}+\frac{2}{1+2^4}+\frac{3}{1+3^4}+\ldots$ (*Ж.* жинақталады,

$\int\limits_1^{\infty}\frac{xdx}{1+x^4}=\frac{\pi}{8}$)

16.18. $1+\frac{3}{4}+\frac{5}{9}+\frac{7}{16}+\ldots$ (*Ж.* жинақталмайды,

$\int\limits_1^{\infty}\frac{2x-1}{x^2}dx=\infty$)

16.19. $1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{10^2}+\ldots$ (*Ж.* жинақталады)

16.20. $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+\ldots$ (*Ж.* жинақталады)

16.21*. $\frac{21}{3}+\frac{41}{9}+\frac{61}{27}+\ldots$ (*Ж.* жинақталады, өйткені

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{20n+21}{3(20n+1)}=\frac{1}{3}<1)$$

16.22. $\frac{2}{1}+\frac{4}{3!}+\frac{6}{5!}+\ldots$ (*Ж.* жинақталады)

Қатардың қосындысын тап:

16.23*. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots$ (*Ж.* $S=1/2$)

16.24**. $\frac{1}{4}+\frac{1\cdot 3}{4\cdot 8}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 8\cdot 12}+\ldots$ (*Ж.* жинақталады)

ОН ЖЕТІНШІ ПРАКТИКАЛЫҚ САБАҚ

ТАҢБАСЫ АУЫСПАЛЫ ҚАТАРЛАР. ЛЕЙБНИЦ БЕЛГІСІ. ҚАТАРДЫҢ АБСОЛЮТТІ, АБСОЛЮТТІ ЕМЕС ЖИНАҚТЫЛЫҒЫ. ДӘРЕЖЕЛІК ҚАТАРЛАР. ЖИНАҚТЫЛЫҚТЫҢ РАДИУСЫ МЕН ИНТЕРВАЛЫ

Қатарды жинақтылыққа зертте:

17.1. $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots$

(*Ж.* абсолютті емес жинақталады)

17.2. $1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\ldots$

(*Ж.* абсолютті жинақталады)

17.3. $\frac{1}{2\ln 2}-\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4}+\ldots$

(*Ж.* абсолютті емес жинақталады)

17.4. $\frac{\sin\alpha}{1}+\frac{\sin 2\alpha}{2}+\frac{\sin 3\alpha}{3}+\ldots$

(*Ж.* абсолютті жинақталады)

Қатардың жинақтылық интервалын анықта және интервалдың шекарасында жинақтылыққа зертте:

17.5. $1+\frac{x}{3\cdot 2}+\frac{x^2}{3^2\cdot 3}+\frac{x^3}{3^3\cdot 1}+\ldots$ (*Ж.* $-3\le x<3$)

17.6. $1-\frac{x}{5\sqrt{2}}+\frac{x^3}{5^2\sqrt{3}}-\frac{x^5}{5^3\sqrt[3]{4}}+\ldots$ (*Ж.* $-\sqrt{5}\le x\le\sqrt{5}$)

17.7. $1+\frac{2x}{3^2\sqrt[2]{3}}+\frac{4x^2}{5^2\sqrt{3^2}}+\frac{8x^3}{7^2\sqrt{3^3}}+\ldots$ (*Ж.* $-\frac{\sqrt{3}}{2}\le x\le\frac{\sqrt{3}}{2}$)

17.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. (*Ж.* бүкіл сан осінде абсолютті жинақталады)

17.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^{n-1}}{n}$. (*Ж.* $-1<x\le 1$)

17.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}}$. (*Ж.* $-\frac{\sqrt{2}}{3} < x < \frac{\sqrt{2}}{3}$)

17.11. $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \cdot n!$. (*Ж.* $R = 0$)

17.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{(n+1)^n}$. (*Ж.* $R = e$)

17.13. $(x+1) + \frac{(x+1)^2}{2 \cdot 4} + \frac{(x+1)^3}{3 \cdot 4^2} + \frac{(x+1)^4}{4 \cdot 4^3} + \ldots$

(*Ж.* $-5 \le x < 3$)

17.14. $\frac{2x-3}{1} - \frac{(2x-3)^2}{3} + \frac{(2x-3)^3}{5} - \ldots$ (*Ж.* $1 < x \le 2$)

Қатарды жинақтылыққа зертте:

17.15. $1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \ldots$ (*Ж.* абсолютті емес жинақталады)

17.16. $1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \ldots$ (*Ж.* абсолютті жинақталады)

17.17. $1 - \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{3a^4} - \frac{1}{4a^6} + \ldots$

(*Ж.* $a > 1$ болғанда абс.жинақталады, $a = 1$- абс.емес жинақталады, $a < 1$ -жинақталмайды)

Қатардың жинақтылық интервалын анықта және интервал шекарасында жинақтылыққа зертте:

17.18. $1 + \frac{2x}{\sqrt{5 \cdot 5}} + \frac{4x^2}{\sqrt{9 \cdot 5^2}} + \frac{8x^3}{\sqrt{13 \cdot 5^3}} + \ldots$

(*Ж.* $-\sqrt{5}/2 < x < \sqrt{5}/2$)

17.19. $1 - \frac{x^2}{3 \cdot 2\sqrt{2}} + \frac{x^4}{3^2 \cdot 3\sqrt{3}} - \frac{x^6}{3^3 \cdot 4\sqrt{4}} + \ldots$

(*Ж.* $-\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}$)

17.20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$. $\quad$ (*Ж.* $-0{,}1 \le x < 0{,}1$)

17.21*. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2^n - 1}$. $\quad$ (*Ж.* $-1 \le x \le 1$)

17.22*. $\frac{x-1}{1 \cdot 2} + \frac{(x-1)^2}{3 \cdot 2^2} + \frac{(x-1)^3}{5 \cdot 2^3} + \ldots$ $\quad$ (*Ж.* $-1 \le x < 3$)

17.23**. $\frac{2x+1}{1} + \frac{(2x+1)^2}{4} + \frac{(2x+1)^3}{7} + \ldots$ $\quad$ (*Ж.* $-1 \le x < 0$)

ОН СЕГІЗІНШІ ПРАКТИКАЛЫҚ САБАҚ

ФУНКЦИЯНЫ МАКЛОРЕН ҚАТАРЫНА ЖІКТЕУ.ОСЫ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ МӘНІН ЖУЫҚТАП ЕСЕПТЕУ

18.1. Функцияларды x дәрежесі бойынша қатарға жікте және қалдық мүшенің формуласын зертте:

$$1)\cos(x-\alpha); \qquad 2)\sin^2 x; \qquad 3)xe^x; \quad 4)\sin\left(mx+\frac{\pi}{3}\right)$$

(*Ж.* $1)\cos(x-\alpha)=\sin\alpha\left(\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\right)+$

$$+\cos\alpha\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\right); \ |P_n(x)|=\frac{x^n}{n!}\cos\left(\theta x-\alpha+n\frac{\pi}{2}\right);$$

$$2)\sin^2 x=\frac{2\cdot x^2}{2!}-\frac{2^3\cdot x^4}{4!}+\frac{2^5\cdot x^6}{6!}-\ldots$$

$$3)xe^x=x+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^4}{3!}+\ldots$$

$$4)\sin\left(mx+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\frac{m^2x^2}{2!}+\frac{m^4x^4}{4!}-\ldots\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{mx}{1!}-\frac{m^3x^3}{3!}+\frac{m^5x^5}{5!}-\ldots\right))$$

18.2. Биномдық қатардың көмегімен функцияны қатарға жікте:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^4-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^4+\ldots$$

$|x|<1$ үшін.

18.3.Функцияны x дәрежесі бойынша қатарға жікте:

$$1)\ln\frac{1+x}{1-x}; \qquad 2)\ln\left(2-3x+x^2\right); \qquad 3)\ln\left(1-x+x^2\right)$$

(*Ж.* 1) $\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right]$;

2) $\ln\left(2-3x+x^2\right)=\ln(1-x)(2-x)=\ln 2-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+2^{-n}\right)\frac{x^n}{n}$;

3) $\ln\left(1-x+x^2\right)=\ln\frac{1+x^3}{1+x}=-\left[x-\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\right.$

$\left.+\frac{x^5}{5}+\frac{2x^6}{6}+\ldots\right]=-2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi n}{3}\cdot\frac{x^n}{n}$)

18.4. 18.2.- есептегі қатарды интегралдау арқылы $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ функциясы үшін қатарды жаз:

(*Ж.* $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=x+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n n!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$)

18.5. $f(x)=x^3-3x$ функциясын x-1 дәрежесі бойынша жікте.

(*Ж.* $x^3-3x=-2+3(x-1)^2+(x-1)^3$)

18.6. $f(x)=\sqrt[3]{x}$ функциясын $x+1$ дәрежесі бойынша қатарға жікте және алынған қатарды Даламбер белгісі бойынша жиақтылыққа зертте:

(*Ж.* $\sqrt[3]{x}=-\sqrt[3]{1-(x+1)}=-1+\frac{x+1}{3\cdot 1!}+\frac{2(x+1)^2}{3^2\cdot 2!}+$

$+\frac{2\cdot 5(x+1)^3}{3^3\cdot 3!}+\ldots=-1+\frac{x+1}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{3^{n+1}(n+1)!}\cdot(x+1)^{n+1}$,

$-2<x<0$ үшін)

18.7. $\sqrt{x+1}$ үшін биномдық қатар жаз және қатардың екі мүшесімен шектелген $\sqrt{1{,}004}$, $\sqrt{0{,}992}$, $\sqrt{90}$ есепте. Қателікті бағала.

(*Ж.* $\sqrt{0{,}992}=\sqrt{1-0{,}008}\approx 1-0{,}004=0{,}996$

$$\sqrt{90}=\sqrt{81+9}=9\sqrt{1+\frac{1}{9}}\approx 9\left(1+\frac{1}{18}\right)=9{,}5\Big)$$

18.8. 1) 2^x; 2) $\cos\left(mx+\frac{\pi}{4}\right)$ функцияларын x дәрежесі бойынша қатарға жікте және қалдық мүшенің формуласын зерттеп жаз.

$$\text{(Ж. 1)}\,2^x=1+\frac{x\ln 2}{1!}+\frac{x^2\ln^2 2}{2!}+\ldots,\left|R_n\right|=\frac{x^n\ln^n 2}{n!}2^x;$$

$$2)\cos\left(mx+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[1-\frac{mx}{1!}-\frac{m^2x^2}{2!}+\ldots\right]=$$

$$\left.=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(mx)^{n-1}}{(n-1)!}\cos(2n-1)\frac{\pi}{4};(0!=1)\right)$$

18.9. $f(x)=x^4-4x^2$ функциясын $x+2$ дәрежесі бойынша жікте.

$$\text{(Ж. } x^4-4x^2=(x+2)^4-8(x+2)^3+20(x+2)^2--16(x+2)).$$

18.10*. $f(x)=\sqrt{x}$ функциясын $x-4$ дәрежесі бойынша қатарға жікте және алынған қатарды Даламбер белгісі бойынша жинақтылыққа зертте.

$$\text{(Ж. }\sqrt{x}=2\left[1+\frac{x-4}{2^3\cdot 1!}-\frac{(x-4)^2}{2^6\cdot 2!}+\frac{1\cdot 3(x-4)^3}{2^9\cdot 3!}-\frac{1\cdot 3\cdot 5(x-4)^4}{2^{12}\cdot 4!}+\ldots\right])$$

18.11. $(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)x^2}{2!}+\ldots$ биномдық қатардың екі мүшесімен шектелген $\sqrt{1{,}005}$, $\sqrt[3]{1{,}0012}$, $\sqrt{0{,}993}$, $\sqrt[3]{0{,}997}$, $\sqrt{110}$, $\sqrt[3]{70}$ есепте.

(Ж. $\sqrt{1{,}005}\approx 1{,}0025$; $\sqrt[3]{1{,}0012}\approx 1{,}0004$; $\sqrt{0{,}993}\approx 0{,}09965;)$ $\sqrt[3]{0{,}997}\approx$ $\approx 0{,}999$; $\sqrt{110}=\sqrt{100+10}\approx 10\left(1+\frac{1}{20}\right)=10{,}5$ $\sqrt[3]{70}\approx 4\left(1+\frac{1}{32}\right)=4{,}125$).

МАЗМҰНЫ

ЕКІНШІ БӨЛІМ

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. *Апанасов П.Т.* Сборник математических задач с практическим содержанием. - М.: Наука, 1987.
2. *Бектаев Қ. Б.* Орысша-қазақша математикалық сөздік. - Алматы: Мектеп, 1986.
3. *Берман Г.И.* Сборник задач по курсу математического анализа. - М.: Наука, 1980.
4. *Боярский А.Я.* Математика для экономистов. - М.: Госстаниздат ЦСУ СССР, 1961.
5. *Высшая* математика для экономистов /Под ред.Н.Ш.Кремера, М.: Издат. объединение ЮНИТИ.
6. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. - М.: Высшая школа, 1986, ч.1 и 2.
7. *Задачи* и упражнения по математическому анализу/для втузов/. /Под ред. Б.П. Демидовича, М.: Наука, 1972.
8. *Колесников А.Н.* Краткий курс математики для экономистов. М.ИНФРА. М.: 1997.
9. *Кудрявцев В.А., Демидович Б.П.* Краткий курс высшей математики. М.: Наука, 1989.
10. *Қ.Қабдықайырұлы* Жоғары математика. - Алматы, Респ. Баспа кабинеті, 1993.
11. *ҚабдықайыровҚ, Еселбаева Р.У.* Дифференциалдық және интегралдық есептеулер. - Алматы: Мектеп,1985.
12. *Минорский В.П.* Сборник задач по высшей математике. - М.:Наука,1987.

Құрмет Қабдықайырұлы,
Оразбекова Ляззат Ниязбекқызы

Экономикадағы математика

Редакторы *Г. Батырғалиева*
Компьютерде көркемдеген *Ж. Іллиясова*

ИБ № 704
Басылуға 24.09.99 қол қойылды. Пішімі 60х84 1/16. Офсетті қағаз.
Офсетті басылыс. Көлемі 13,1 б.т. Тараламы 500 дана. Тапсырыс №792.
Бағасы келісімді. әл-Фараби атындағы "Қазақ университеті" баспасы. 480078.
Алматы, әл-Фараби даңғылы, 71.